



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 10/12/16

Ώρα εξέτασης: 09:30 -12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα .Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Προτεινόμενες Λύσεις

Πρόβλημα 1: Να βρείτε όλα τα ζεύγη ακεραίων (x, y) που αποτελούν λύσεις της εξίσωσης
 $x^2 + 2xy + y^2 - x + y - 4 = 0$.

Λύση

Η εξίσωση γράφεται $x^2 + (2y - 1) \cdot x + y^2 + y - 4 = 0$, που, θεωρούμενη ως δευτεροβάθμια ως προς x , έχει διακρίνουσα

$$\Delta(y) = (2y - 1)^2 - 4(y^2 + y - 4) = 17 - 8y.$$

Αρχικά πρέπει $\Delta(y) \geq 0 \Rightarrow y \leq 2$, αφού ο y είναι ακέραιος. Τότε

$$x = \frac{-(2y - 1) \pm \sqrt{17 - 8y}}{2} : (1)$$

και, επειδή ο x είναι ακέραιος, το $17 - 8y$ με $y \leq 2$ πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο περιττού, δηλαδή πρέπει $17 - 8y = (2t + 1)^2$, $t \in \mathbb{Z}$ απ' όπου

$$y = \frac{17 - (2t + 1)^2}{8} = 2 - \frac{t(t + 1)}{2}$$

που είναι ακέραιος για κάθε $t \in \mathbb{Z}$, αφού $t, t + 1$ είναι διαδοχικοί ακέραιοι και μάλιστα

$$y \leq 2, \text{ αφού } 2 - \frac{t(t+1)}{2} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{t(t+1)}{2} \geq 0, \forall t \in \mathbb{Z}.$$

Τότε από την (1) έχουμε:

$$x = \frac{-(4 - t(t + 1) - 1) \pm (2t + 1)}{2} = \begin{cases} \frac{t(t + 1)}{2} + t - 1 \\ \text{ή} \\ \frac{t(t + 1)}{2} - t - 2 \end{cases}, t \in \mathbb{Z}$$

Έτσι όλα τα ζεύγη ακεραίων (x, y) που αποτελούν λύσεις της εξίσωσης $x^2 + 2xy + y^2 - x + y - 4 = 0$, είναι:

$$\boxed{(x, y) = \left(\frac{t(t+1)}{2} + t - 1, 2 - \frac{t(t+1)}{2}\right)} \text{ ή } \boxed{(x, y) = \left(\frac{t(t+1)}{2} - t - 2, 2 - \frac{t(t+1)}{2}\right)}, \text{ με } t \in \mathbb{Z}.$$

Πρόβλημα2: (α) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 - 32x + 64$.

Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία της.

(β) Έστω $\alpha, \beta > 0$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $\alpha\beta = 1$. Αποδείξτε την ανισότητα

$$(\alpha + \beta)^6 > 32(\alpha^2 + \beta^2)$$

Λύση

(α) Παραγωγίζοντας την συνάρτηση f έχουμε

$$f'(x) = 3x^2 - 32$$

$$\text{Επομένως, } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 32 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{32}{3}}$$

Από τον πίνακα μονοτονίας της θα έχουμε

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{32}{3}}$	$\sqrt{\frac{32}{3}}$	$+\infty$	
$f'(x)$	+	○	-	○	+
$f(x)$					

Επομένως η f είναι

- Γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -\sqrt{\frac{32}{3}}]$ και $[\sqrt{\frac{32}{3}}, +\infty)$
- Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-\sqrt{\frac{32}{3}}, \sqrt{\frac{32}{3}}]$

(β) Επειδή $\alpha\beta = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{\beta}$ με $\alpha, \beta > 0$ η δεδομένη ανισότητα γίνεται

$$(\alpha + \beta)^6 > 32(\alpha^2 + \beta^2) \Leftrightarrow \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^6 > 32\left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}\right) \quad (1)$$

Θέτουμε, $x = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2$ τότε παίρνουμε ότι

$$\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 - 2 \Leftrightarrow \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} = x - 2$$

Επειδή είναι γνωστό ότι ισχύει $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$ για α θετικό πραγματικό αριθμό, θα έχουμε

$$x = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 \geq 2^2 = 4$$

Με τον μετασχηματισμό αυτό η (1) γίνεται

$$\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^6 > 32\left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}\right) \Leftrightarrow x^3 > 32(x - 2) \Leftrightarrow x^3 - 32x + 64 > 0 \text{ ή } f(x) > 0 \quad \forall x > 4 \quad (2)$$

Άρα αρκεί να αποδείξουμε την (2)

Επειδή $\sqrt{\frac{32}{3}} < 4$, από την μονοτονία της f έχουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[4, +\infty)$. Επομένως

$$x > 4 \Rightarrow f(x) > f(4) \text{ ή } f(x) > 0 \quad \forall x > 4.$$

Πρόβλημα 3: Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB < A\Gamma$) φέρουμε τις διαμέσους $\Gamma\Delta$ και BE . Έστω (ω_1) ο κύκλος διαμέτρου BE και (ω_2) ο κύκλος διαμέτρου $\Gamma\Delta$. Από την κορυφή A φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα $AK, A\Lambda$ που άγονται προς τους κύκλους (ω_1) και (ω_2) αντίστοιχα. Αν P ένα από τα κοινά σημεία των κύκλων (ω_1) και (ω_2) , η ευθεία AP τέμνει το $K\Lambda$ στο Z και την πλευρά $B\Gamma$ στο T . Η διχοτόμος της γωνίας $\angle KAL$ τέμνει το $K\Lambda$ στο M και την πλευρά $B\Gamma$ στο N . Να αποδείξετε ότι τα σημεία Z, T, M, N είναι ομοκυκλικά.

Λύση

Έστω E' το σημείο που ο (ω_1) τέμνει την πλευρά AB και Δ' το σημείο που ο (ω_2) τέμνει την πλευρά $A\Gamma$. Τότε $EE' \perp AB$ και $\Delta\Delta' \perp A\Gamma$.

Από το εγγράψιμο $\Delta E' \Delta' E$ έχουμε:

$$AE' \cdot A\Delta = A\Delta' \cdot AE : (1)$$

$$\Delta E \parallel B\Gamma \Rightarrow \frac{AB}{A\Delta} = \frac{A\Gamma}{AE} : (2)$$

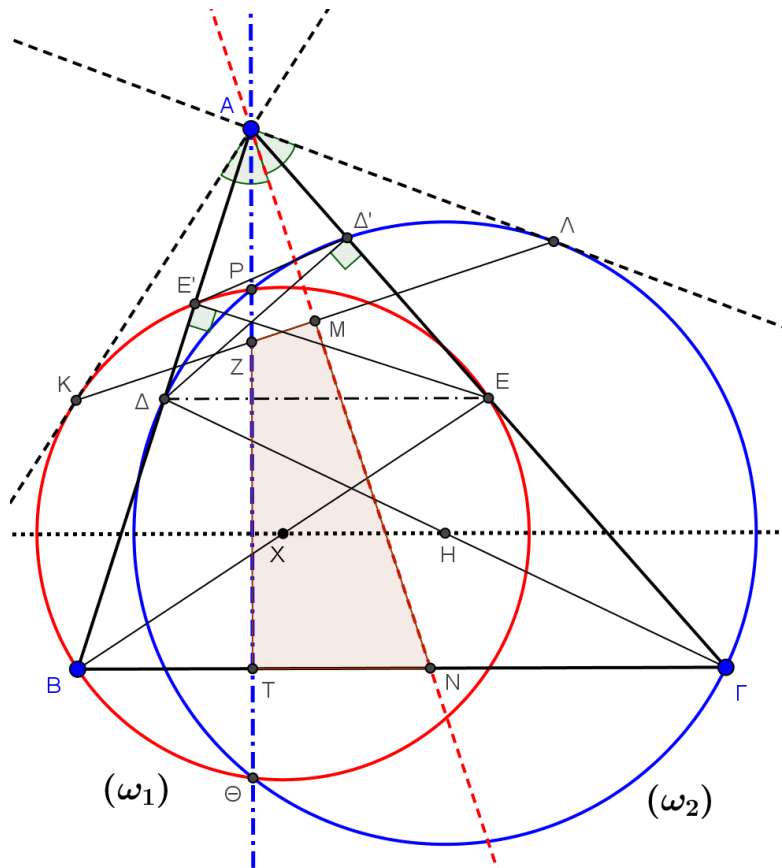
Πολλαπλασιάζουμε τις (1) και (2) και παίρνουμε

$$AE' \cdot AB = A\Delta' \cdot A\Gamma \quad \text{που σημαίνει ότι}$$

$\Delta_{(\omega_1)}(A) = \Delta_{(\omega_2)}(A)$ και άρα από το A άγονται ίσα εφαπτόμενα τμήματα προς τους δυο κύκλους. Δηλαδή $AK = A\Lambda$, και επομένως το τρίγωνο $\Delta A\Lambda K$ είναι ισοσκελές. Άρα, η διχοτόμος της γωνίας $\angle KAL$ είναι και ύψος του τριγώνου, από το οποίο συμπεραίνουμε ότι $AM \perp K\Lambda$ (3)

Αφού από το A άγονται ίσα εφαπτόμενα τμήματα προς τους δυο κύκλους, το σημείο A ανήκει στο ριζικό άξονα των κύκλων, που είναι η κοινή χορδή τους $P\Theta$ (σχήμα). Η κοινή χορδή $P\Theta$ είναι κάθετη στη διάκεντρο XH των δυο κύκλων, η οποία συνδέει τα μέσα των διαγωνίων του τραπεζίου $B\Delta E\Gamma$ ($\Delta E \parallel \frac{B\Gamma}{2}$) και συνεπώς είναι παράλληλη προς τη βάση του $B\Gamma$.

Έτσι, τελικά έχουμε ότι η $AP \perp B\Gamma$ (4). Από (3) και (4) παίρνουμε ότι τα σημεία Z, T, M, N είναι ομοκυκλικά.



Πρόβλημα 4: Να βρείτε τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν

$$(1): 4032 \cdot f(x+y) = f(x) \cdot f(2-y) + f(y) \cdot f(2-x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\text{και } (2): f(0) = 2016.$$

i) Να αποδείξετε ότι $f(x) = f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

ii) Να βρείτε τον τύπο της f και να αποδείξετε ότι η f είναι μοναδική.

Λύση

i) Αν $x = y = 0$ η (1) γίνεται:

$$4032f(0) = f(0) \cdot f(2) + f(0) \cdot f(2) \Rightarrow 4032f(0) = 2f(0) \cdot f(2)$$

και επειδή $f(0) = 2016$ παίρνουμε

$$4032 \cdot 2016 = 2 \cdot 2016 \cdot f(2) \Rightarrow f(2) = 2016 \quad (3).$$

Αν $y = 0$ η (1) γίνεται

$$4032 \cdot f(x) = f(x) \cdot f(2) + f(0) \cdot f(2-x)$$

και λόγω της (3) και (2) έχουμε

$$4032 \cdot f(x) = f(x) \cdot 2016 + 2016 \cdot f(2-x) \Leftrightarrow f(x) = \frac{f(x) + f(2-x)}{2} \Leftrightarrow \\ f(x) = f(2-x) \quad (4).$$

Για $x = -x$ η (4) γίνεται

$$f(-x) = f(2+x) \quad (5)$$

Αν $x = 2$ και $y = -x$ η (1) γίνεται

$$4032 \cdot f(2-x) = f(2) \cdot f(2+x) + f(-x) \cdot f(0) \Rightarrow$$

$$4032 \cdot f(2-x) = 2016 \cdot f(2+x) + f(-x) \cdot 2016 \Leftrightarrow 2f(2-x) = f(2+x) + f(2+x) \\ \Leftrightarrow f(2-x) = f(2+x)$$

και λόγω των (4) και (5)

$$f(x) = f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Επομένως η f είναι άρτια συνάρτηση.

ii) Αν θέσουμε $y = -x$ στην (1) παίρνουμε

$$4032 \cdot f(0) = f(x) \cdot f(2+x) + f(-x) \cdot f(2-x) \Leftrightarrow 4032 \cdot 2016 = 2 \cdot f^2(x) \\ \Leftrightarrow f^2(x) = 2016 \Leftrightarrow f(x) = \pm 2016, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Όμως, αφού από την υπόθεση έχουμε $f(0) = 2016$, έπεται ότι $f(x) = 2016, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Πράγματι η συνάρτηση $f(x) = 2016$ επαληθεύει τις συνθήκες του προβλήματος.

Έστω ότι υπάρχει και μια δεύτερη $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι συνθήκες του προβλήματος. Τότε με την ίδια επεξεργασία καταλήγουμε ότι $g(x) = 2016, \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Άρα $f = g$. Επομένως η f είναι μοναδική.