



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2018

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 08/12/2018

Ώρα Εξέτασης: 09:30-12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1. Έστω f πραγματική συνάρτηση, συνεχής στο διάστημα $[2, 3]$ και α, β ομόσημοι πραγματικοί αριθμοί.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \frac{\alpha}{2-x} + \frac{\beta}{3-x}$ έχει λύση στο διάστημα $(2, 3)$.

Λύση:

Η δεδομένη εξίσωση γράφεται

$$f(x)(2-x)(3-x) = \alpha(3-x) + \beta(2-x)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $F: A \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$F(x) = f(x)(2-x)(3-x) + \alpha(x-3) + \beta(x-2)$$

Η F είναι συνεχής και

$$\left. \begin{array}{l} F(2) = -\alpha \\ F(3) = \beta \end{array} \right\} \text{ άρα } F(2)F(3) = -\alpha\beta < 0$$

Επομένως, από το θεώρημα του Bolzano υπάρχει $x_0 \in (2, 3)$ τέτοιο ώστε

$$F(x_0) = 0 \text{ ή}$$

$$f(x_0)(2-x_0)(3-x_0) + \alpha(x_0-3) + \beta(x_0-2) = 0 \text{ ή}$$

$$f(x_0) = \frac{\alpha}{2-x_0} + \frac{\beta}{3-x_0}$$

Δηλαδή x_0 είναι ρίζα της εξίσωσης στο διάστημα $(2, 3)$.

Πρόβλημα 2. (i) Να αποδείξετε ότι κάθε πρώτος αριθμός $p > 3$ γράφεται ως $p = 3k + 1$ ή $p = 3k + 2$, για κάποιο θετικό ακέραιο k .

(ii) Δίνονται οι αριθμοί

$$\alpha = p + 2, \quad \beta = p^2 + 2p - 8, \quad \gamma = 2^p + p^2$$

όπου p πρώτος αριθμός. Να βρείτε όλες τις τριάδες (α, β, γ) τέτοιες ώστε τα α, β, γ να είναι πρώτοι αριθμοί.

Λύση:

α) Κάθε πρώτος $p > 3$ είναι περιττός δηλαδή της μορφής $p = 2\lambda + 1$, $\lambda \in \mathbb{N}$. Τότε

- Αν $\lambda \equiv 0 \pmod{3}$ τότε $p \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow p = 3k + 1$, για κάποιο θετικό ακέραιο k .
- Αν $\lambda \equiv 1 \pmod{3}$ τότε $p \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow p = 3k$ για κάποιο θετικό ακέραιο k και δεν είναι πρώτος αριθμός.
- Αν $\lambda \equiv 2 \pmod{3}$ τότε $p \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow p = 3k + 2$, για κάποιο θετικό ακέραιο k .

β) Αν $p = 2$ τότε $\alpha = 4$. Άτοπο.

Αν $p = 3$ τότε

$$\alpha = 5, \quad \beta = 3^2 + 2 \cdot 3 - 8 = 7, \quad \gamma = 2^3 + 3^2 = 17$$

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (5, 7, 17)$$

Έστω $p > 3$, τότε από το (α) θα έχουμε ότι $p = 3k + 1$ ή $3k + 2$, $k \in \mathbb{N}$.

- Αν $p = 3k + 1$ τότε $\alpha = p + 2 = 3k + 1 + 2 \equiv 0 \pmod{3}$, επομένως δεν υπάρχει τριάδα πρώτων (α, β, γ) .
- $p = 3k + 2$ τότε για τον αριθμό β έχουμε
$$\beta = (3k + 2)^2 + 2(3k + 2) - 8 = 9k^2 + 18k \equiv 0 \pmod{3}$$
επομένως δεν υπάρχει τριάδα πρώτων (α, β, γ) .

Επίσης για κάθε $p > 3$ γράφουμε $p = 2\lambda + 1$, $\lambda \in \mathbb{N}$ με $\lambda > 1$. Τότε

$$\left. \begin{array}{l} 2^p = 2^{2\lambda+1} = 4^\lambda \cdot 2 \equiv 2 \pmod{3} \\ p^2 \equiv 1 \pmod{3} \end{array} \right\} \text{ άρα } \gamma = 2^p + p^2 \equiv 0 \pmod{3}$$

Άρα, η μόνη δυνατή τριάδα είναι

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (5, 7, 17).$$

Πρόβλημα 3. Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($\angle A = \angle \Delta = 90^\circ$). Έστω E το συμμετρικό του Γ ως προς το Δ . Έστω ακόμα M το μέσον του BE και N η ορθή προβολή του Δ πάνω στην $B\Gamma$. Αν η AM τέμνει την ΓE στο H , να αποδείξετε ότι οι γωνίες $\angle A\Delta N$ και $\angle A\Delta H$ είναι ίσες.

Λύση:

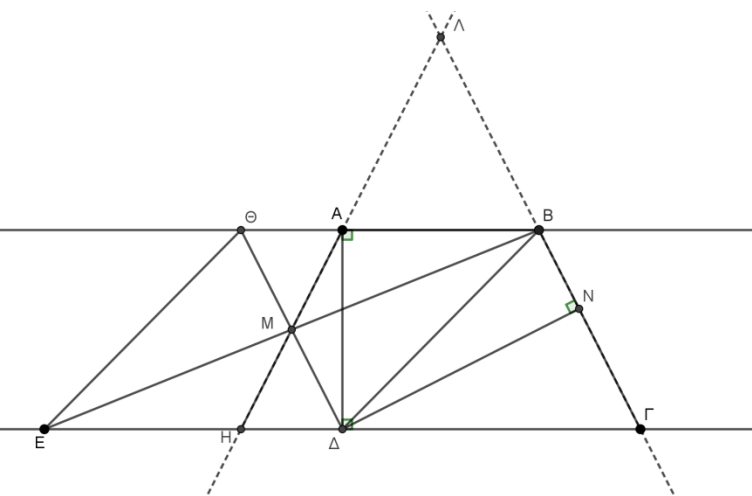
Για να είναι οι γωνίες $\angle A\Delta N$ και $\angle A\Delta H$ ίσες όπως ζητά το πρόβλημα θα πρέπει $AB < \Gamma\Delta$.

Έστω ότι η ευθεία $M\Delta$ τέμνει την AB στο σημείο Θ . Τότε

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \text{ μέσο του } \Gamma E \\ M \text{ μέσο του } BE \end{array} \right\} \text{ Άρα } M\Delta \parallel B\Gamma$$

και αφού και $AB \parallel \Gamma\Delta$ το τετράπλευρο $\Theta B\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

Επομένως



$$\left. \begin{array}{l} \Theta B \parallel \Delta \Gamma \\ \Delta \Gamma = \Delta E \end{array} \right\} \Rightarrow \Theta B \parallel \Delta E$$

Άρα, το τετράπλευρο $\theta B \Delta E$ είναι παραλληλόγραμμο. Επομένως το M είναι μέσον του $\theta \Delta$, και από το ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta \theta A \Delta$ θα έχουμε

$$\theta M = M \Delta = M A.$$

Έστω Λ το σημείο τομής της AH με την ευθεία $B\Gamma$. Τότε διαδοχικά έχουμε

$$\angle \Lambda B A = \angle B \Gamma \Delta = \angle A \theta M = \angle \theta A M = \angle \Lambda A B = \angle A H \Gamma$$

Άρα,

$$\angle B \Gamma H = \angle A H \Gamma$$

και από το εγγράψιμο τετράπλευρο $A \Delta N B$ παίρνουμε

$$\angle \Lambda B A = \angle A \Delta N$$

Συνεπώς,

$$\angle A \Delta N = \angle A H \Delta.$$

Πρόβλημα 4. Έστω $x_1, x_2, x_3, \dots$ μια ακολουθία ακεραίων τέτοια, ώστε

$$1 = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n+1} \leq 2n \text{ για } n = 1, 2, 3, \dots$$

Να αποδείξετε ότι κάθε θετικός ακέραιος k είναι ίσος με μια διαφορά της μορφής $x_j - x_i$ για κάποια i και j .

Λύση:

Σταθεροποιούμε το k και θεωρούμε τους αρχικούς $k + 1$ όρους της ακολουθίας :

$$1 = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_k < x_{k+1} \leq 2k$$

Χωρίζουμε το σύνολο των δεικτών $\{1, 2, 3, \dots, 2k - 1, 2k\}$ σε ένωση υποσυνόλων

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_{k-1} \cup A_k$$

όπου,

$$A_1 = \{1, k + 1\}, \quad A_2 = \{2, k + 2\}, \dots, A_{k-1} = \{k - 1, 2k - 1\}, A_k = \{k, 2k\}.$$

Χρησιμοποιώντας την αρχή του Dirichlet (περιστερονοφωλιάς), τουλάχιστον ένα από αυτά τα k σύνολα θα περιέχει κάποιους από τους δύο αριθμούς μεταξύ των αριθμών $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, x_{k+1}$, αφού έχουμε

$k + 1$ αριθμούς και k σύνολα.

Με άλλα λόγια, υπάρχουν δείκτες i, j με $1 \leq i < j \leq k + 1$ έτσι ώστε $x_i, x_j \in A_r$ για κάποιο $r (1 \leq r \leq k)$. Αλλά αυτό ακριβώς σημαίνει ότι

$$x_i = r, \quad x_j = k + r$$

Επομένως, $x_j - x_i = k$.