



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΠΑΓΚΥΠΡΙΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2019

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 21/12/2019

Ώρα Εξέτασης: 09:30-12:30

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $T = v^4 - 6v^3 + 23v^2 - 18v$, $v \in \mathbb{N}$, είναι πολλαπλάσιο του 24.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ 1:

Διαιρώντας το T με τον αριθμό 3 θα έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{T}{3} &= \frac{v^4 - 6v^3 + 23v^2 - 18v}{3} = \frac{v^4 - 6v^3 + 24v^2 - v^2 - 18v}{3} = \frac{v^4 - v^2}{3} - 2v^3 + 8v^2 - 6v \\ &= v \frac{v(v-1)(v+1)}{3} - 2v^3 + 8v^2 - 6v\end{aligned}$$

Επειδή οι αριθμοί v , $(v-1)$, $(v+1)$ είναι τρεις διαδοχικοί ακέραιοι ένας θα διαιρείται με το 3.

Άρα $\frac{T}{3}$ είναι ακέραιος αριθμός και επομένως $3|T$ (1).

Επίσης έχουμε,

$$\begin{aligned}\frac{T}{8} &= \frac{v^4 - 6v^3 + 23v^2 - 18v}{8} = \frac{v^4 - 8v^3 + 2v^3 + 24v^2 - v^2 - 16v - 2v}{8} \\ &= \frac{v^4 + 2v^3 - v^2 - 2v}{8} - v^3 + 3v^2 - 2v = \frac{v^3(v+2) - v(v+2)}{8} - v^3 + 3v^2 - 2v \\ &= \frac{(v+2)v(v-1)(v+1)}{8} - v^3 + 3v^2 - 2v\end{aligned}$$

Ο αριθμός $(v+2)v(v-1)(v+1)$ είναι γινόμενο τεσσάρων διαδοχικών ακεραίων αριθμών. Ένας από αυτούς του τέσσερις είναι πολλαπλάσιο του 4 και τουλάχιστον ένας είναι άρτιος αριθμός, δηλαδή πολλαπλάσιο του 2. Άρα ο αριθμός $(v+2)v(v-1)(v+1)$ είναι πολλαπλάσιο του 8. Δηλαδή ο $\frac{T}{8}$ είναι ακέραιος αριθμός και επομένως $8|T$ (2).

Επειδή $(3,8) = 1$ και από τις (1), (2) συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός $3 \cdot 8 = 24$ διαιρεί τον T .

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ 2:

Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της Μαθηματικής Επαγωγής.

Έστω $A_v = v^4 - 6v^3 + 23v^2 - 18v$.

Για $v=1 \Rightarrow A_1 = 1 - 6 + 23 - 18 = 0 \Rightarrow 24 | A_1$

Έστω ότι $24 | A_k = k^4 - 6k^3 + 23k^2 - 18k$, τότε:

$$A_{k+1} = (k+1)^4 - 6(k+1)^3 + 23(k+1)^2 - 18(k+1) = \dots = k^4 - 2k^3 + 11k^2 + 14k$$

$$A_{k+1} - A_k = 4k^3 - 12k^2 + 32k \Rightarrow A_{k+1} = A_k + 4k^3 - 12k^2 + 32k$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $24 \mid 4k^3 - 12k^2 + 32k$.

$$4k^3 - 12k^2 + 32k = 4k(k^2 - 3k + 8) = 4k(k^2 - 3k + 2 + 6) = 4k(k-1)(k-2) + 24k \quad (1)$$

Επειδή μεταξύ 2 διαδοχικών ακεραίων ο ένας είναι άρτιος και μεταξύ 3 διαδοχικών ακεραίων ο ένας είναι πολλαπλάσιο του 3 $\Rightarrow$ το σύνολο $\{k, k-1, k-2\}$ περιέχει τουλάχιστο ένα

πολλαπλάσιο του 2 και τουλάχιστο ένα πολλαπλάσιο του 3 $\Rightarrow$ Το γινόμενο $k(k-1)(k-2)$ είναι

πολλαπλάσιο του 6 $\Rightarrow k(k-1)(k-2) = 6\lambda, \lambda \in \mathbb{N} \quad (2)$

$$(1), (2) \Rightarrow 4k^3 - 12k^2 + 32k = 24\lambda + 24k = 24(\lambda + k) \Rightarrow 24 \mid 4k^3 - 12k^2 + 32k$$

Πρόβλημα 2

Δίνεται συνάρτηση $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $[0,1]$ και τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ για την οποία ισχύουν $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ και $f(1) = 1$. Να αποδείξετε ότι:

- Υπάρχει $a \in (0,1)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f'(a) = 2a$.
- Υπάρχει $b \in (0,1)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f'(b) = 3b^2$.
- Υπάρχει $c \in (0,1)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f''(c) = 2$.
- Υπάρχει $d \in (0,1)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f'''(d) = 6$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ :

- Θεωρούμε την συνάρτηση $g_1(x) = f(x) - x^2$ στο κλειστό διάστημα $[0,1]$. Για την συνάρτηση g_1 ισχύει
 - Είναι συνεχής στο $[0,1]$
 - Παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και
 - $g_1(0) = f(0) - 0 = 0$ και $g_1(1) = f(1) - 1 = 1 - 1 = 0$. Άρα, $g_1(0) = g_1(1)$.

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle. Άρα, υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $a \in (0,1)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $g_1'(a) = 0$ με $g_1'(x) = f'(x) - 2x$ ή

$$f'(a) - 2a = 0 \Leftrightarrow f'(a) = 2a.$$

- Θεωρούμε την συνάρτηση $g_2(x) = f(x) - x^3$ στο κλειστό διάστημα $[0,1]$. Για την συνάρτηση g_2 ισχύει
 - Είναι συνεχής στο $[0,1]$
 - Παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και
 - $g_2(0) = f(0) - 0 = 0$ και $g_2(1) = f(1) - 1 = 1 - 1 = 0$. Άρα, $g_2(0) = g_2(1)$.

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle. Άρα, υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $b \in (0,1)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $g_2'(b) = 0$ με $g_2'(x) = f'(x) - 3x^2$ ή

$$f'(b) - 3b^2 = 0 \Leftrightarrow f'(b) = 3b^2.$$

- Θεωρούμε την συνάρτηση $g_3(x) = f'(x) - 2x$ στο κλειστό διάστημα $[0, a] \subseteq [0,1]$. Για την συνάρτηση g_3 ισχύει
 - Είναι συνεχής στο $[0, a]$
 - Παραγωγίσιμη στο $(0, a)$ και
 - $g_3(0) = f'(0) - 0 = 0$ και $g_3(a) = f'(a) - 2a = 2a - 2a = 0$. Άρα, $g_3(0) = g_3(a)$.

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle. Άρα, υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $c \in (0, a) \subseteq (0, 1)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $g'_3(c) = 0$ με $g'_3(x) = f''(x) - 2$ ή

$$f''(c) - 2 = 0 \Leftrightarrow f''(c) = 2.$$

iv. Θεωρούμε την συνάρτηση $g_4(x) = f'(x) - 3x^2$ στο κλειστό διάστημα $[0, b] \subseteq [0, 1]$. Για την συνάρτηση g_4 ισχύει

- Είναι συνεχής στο $[0, b]$
- Παραγωγίσιμη στο $(0, b)$ και
- $g_4(0) = f'(0) - 0 = 0$ και $g_4(b) = f'(b) - 3b^2 = 3b^2 - 3b^2 = 0$. Άρα, $g_4(0) = g_4(b)$.

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle. Άρα, υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $\xi \in (0, b) \subseteq (0, 1)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $g'_4(\xi) = 0$ με $g'_4(x) = f''(x) - 6x$ ή

$$f''(\xi) - 6\xi = 0 \Leftrightarrow f''(\xi) = 6\xi.$$

Τώρα θεωρούμε την συνάρτηση $g_5(x) = f''(x) - 6x$ στο κλειστό διάστημα $[0, \xi] \subseteq [0, 1]$. Για την συνάρτηση g_5 ισχύει

- Είναι συνεχής στο $[0, \xi]$
- Παραγωγίσιμη στο $(0, \xi)$ και
- $g_5(0) = f''(0) - 0 = 0$ και $g_5(\xi) = f''(\xi) - 6\xi = 6\xi - 6\xi = 0$. Άρα, $g_5(0) = g_5(\xi)$.

Επομένως ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle. Άρα, υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $d \in (0, \xi) \subseteq (0, 1)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $g'_5(d) = 0$ με $g'_5(x) = f'''(x) - 6$ ή

$$f'''(d) - 6 = 0 \Leftrightarrow f'''(d) = 6.$$

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε τον κύκλο $(c): x^2 + y^2 = 9$ και την ευθεία $(\varepsilon): 4x - 5y = 20$. Από τυχαίο σημείο P της (ε) φέρουμε τις εφαπτόμενες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ προς τον κύκλο και έστω A, B τα σημεία επαφής των εφαπτομένων με τον κύκλο. Αν $M(\alpha, \beta)$ είναι το μέσο των χορδών AB , τότε

(α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας AB είναι: $\alpha x + \beta y = \alpha^2 + \beta^2$.

(β) Να βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου M .

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ :

(α) Έστω $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$

Τότε θα έχουμε

$$x_1^2 + y_1^2 = 9$$

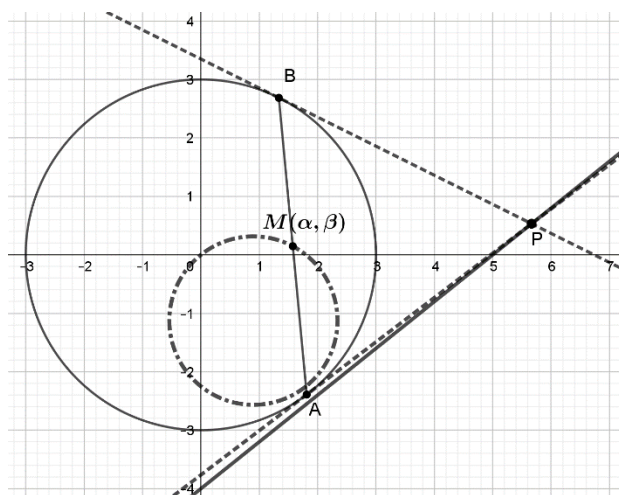
$$x_2^2 + y_2^2 = 9$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις τελευταίες εξισώσεις θα πάρουμε

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 0$$

Όμως αφού το σημείο $M(\alpha, \beta)$ είναι το μέσο των χορδών AB θα έχουμε

$$x_1 + x_2 = 2\alpha, \quad y_1 + y_2 = 2\beta$$



Επομένως η προηγούμενη εξίσωση γράφεται

$$(x_1 - x_2)(2\alpha) + (y_1 - y_2)(2\beta) = 0 \text{ ή } \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{\alpha}{\beta}, \quad x_1 \neq x_2$$

Άρα, η κλίση της ευθείας AB είναι $\lambda_{AB} = -\frac{\alpha}{\beta}$.

Η εξίσωση της ευθείας AB είναι

$$y - \beta = -\frac{\alpha}{\beta}(x - a) \Leftrightarrow \alpha x + \beta y = \alpha^2 + \beta^2 \quad (1).$$

(β) Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο P πάνω στην ευθεία (ε) : $4x - 5y = 20$ με τετμημένη

$x = t$, και τεταγμένη $\frac{4t-20}{5}$, δηλαδή $P\left(t, \frac{4t-20}{5}\right)$, $t \in \mathbb{R}$. Οι εξισώσεις των εφαπτομένων $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ προς τον κύκλο είναι της μορφής

$$\begin{cases} (\varepsilon_1): xx_1 + yy_1 = 9 \\ (\varepsilon_2): xx_2 + yy_2 = 9 \end{cases}$$

και αφού διέρχονται από το σημείο $P\left(t, \frac{4t-20}{5}\right)$ θα έχουμε

$$\begin{cases} (\varepsilon_1): tx_1 + \frac{4t-20}{5}y_1 = 9 \\ (\varepsilon_2): tx_2 + \frac{4t-20}{5}y_2 = 9 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} (\varepsilon_1): tx_1 + \frac{4t-20}{5}y_1 = 9 \\ (\varepsilon_2): tx_2 + \frac{4t-20}{5}y_2 = 9 \end{cases} \quad (3)$$

Θεωρούμε την εξίσωση ευθείας της μορφής

$$tx + \frac{4t-20}{5}y = 9 \quad (4)$$

Η (4) επαληθεύεται λόγω των (2) και (3) για τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$. Επειδή όμως από τα σημεία A, B περνά μια μοναδική ευθεία αυτή είναι η

$$(AB): tx + \frac{4t-20}{5}y = 9 \text{ ή } 5tx + (4t-20)y = 45 \quad (5)$$

Από τις (1) και (5) θα πάρουμε

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{5t} &= \frac{\beta}{4t-20} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{45} \text{ ή } \frac{5t}{\alpha} = \frac{4t-20}{\beta} \text{ ή} \\ \frac{4 \cdot 5t}{4 \cdot \alpha} &= \frac{-5(4t-20)}{-5\beta} = \frac{20t - 20t + 100}{4\alpha - 5\beta} = \frac{100}{4\alpha - 5\beta} \end{aligned}$$

Επομένως θα έχουμε

$$\frac{100}{4\alpha - 5\beta} = \frac{45}{\alpha^2 + \beta^2} \Leftrightarrow 20(\alpha^2 + \beta^2) = 9(4\alpha - 5\beta) \text{ ή } \alpha^2 + \beta^2 - \frac{9\alpha}{5} + \frac{9\beta}{4} = 0$$

Άρα, η καρτεσιανή εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου M είναι κύκλος με εξίσωση

$$x^2 + y^2 - \frac{9x}{5} + \frac{9y}{4} = 0$$

Σχόλιο

Το τρίγωνο ΔPAB είναι ισοσκελές ($PA = PB$) και η διάμεσος PM είναι μεσοκάθετος της χορδής AB , συνεπώς διέρχεται από το $O(0, 0)$. Έτσι, τα σημεία P, M, O είναι συνευθειακά, απ' όπου $\lambda_{PO} =$

$$\lambda_{MO} \Rightarrow \frac{\frac{4t-20}{5}}{t} = \frac{\beta}{\alpha} \text{ ή } \frac{\alpha}{5t} = \frac{\beta}{4t-20}$$

Η χορδή AB είναι πολική του σημείου P , ως προς τον κύκλο (c) και έχει εξίσωση

$$x_P x + y_P y = 9 \Leftrightarrow tx + \frac{4t-20}{5}y = 9 \text{ ή } 5tx + (4t-20)y = 45 \quad (5)$$

Οπότε από (1) και (5) θα πάρουμε $\frac{\alpha}{5t} = \frac{\beta}{4t-20} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{45}$ κλπ...

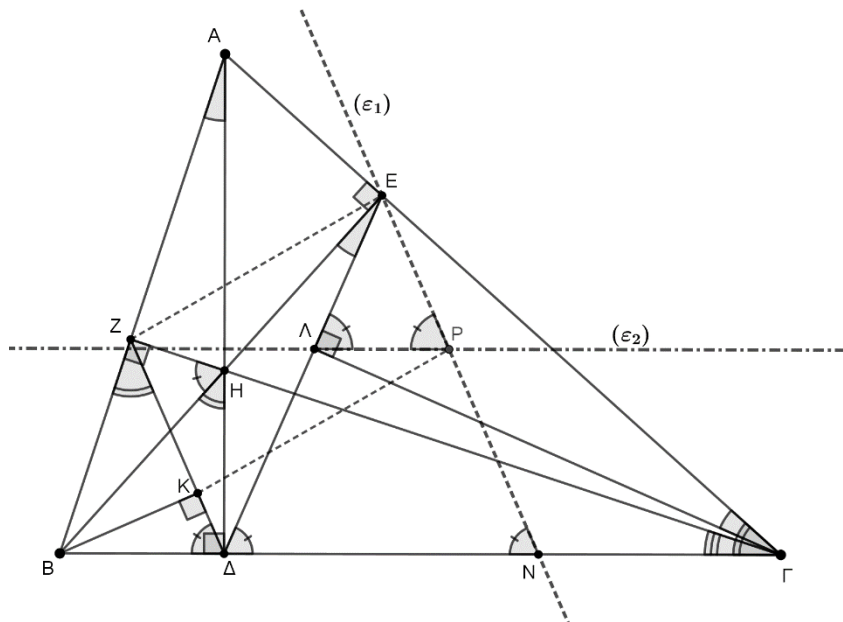
Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$. Από τις κορυφές A, B και Γ του τριγώνου φέρουμε κάθετες προς τις απέναντι πλευρές του και ονομάζουμε Δ, E και Z τα ίχνη τους πάνω στις πλευρές $B\Gamma, A\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Από το σημείο B φέρουμε κάθετη στην ευθεία ΔZ και ονομάζουμε K το σημείο τομής της με την ευθεία ΔZ . Από το σημείο Γ φέρουμε κάθετη στην ευθεία ΔE και ονομάζουμε Λ το σημείο τομής της με την ευθεία ΔE . Από το σημείο E φέρουμε την ευθεία (ε_1) παράλληλη προς την ΔZ και από το σημείο Λ φέρουμε την ευθεία (ε_2) παράλληλη προς την $B\Gamma$. Αν P το σημείο τομής των ευθειών (ε_1) και (ε_2) να αποδείξετε ότι:

(α) $EL = EP$

(β) το τετράπλευρο $ZEPK$ είναι παραλληλόγραμμο.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ :



(α) Επειδή από την υπόθεση $(\varepsilon_2) \parallel B\Gamma$, θα έχουμε

$$\angle ELP = \angle ED\Gamma$$

Από το εγγράψιμο τετράπλευρο $AE\Delta B$ παίρνουμε

$$\angle ED\Gamma = \angle B\Lambda\Gamma$$

Άρα,

$$\angle ELP = \angle B\Lambda\Gamma \quad (1)$$

Έστω N το σημείο τομής της ευθείας (ε_1) με την $B\Gamma$ και H το ορθόκεντρο του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$. Επειδή $(\varepsilon_1) \parallel \Delta Z$ από την υπόθεση, θα έχουμε

$$\angle EPL = \angle EN\Delta = \angle Z\Delta B$$

Από τα εγγράψιμα τετράπλευρα $ZH\Delta B$ και $A\Gamma\Delta E$ θα πάρουμε

$$\angle Z\Delta B = \angle ZHB = \angle E\Gamma\Delta = \angle B\Lambda\Gamma$$

Άρα,

$$\angle EPL = \angle B\Lambda\Gamma \quad (2)$$

Λόγω των (1) και (2) έχουμε ότι το τρίγωνο $\triangle ELP$ είναι ισοσκελές με $EL = EP$.

(β) Από την ομοιότητα των τριγώνων $\triangle A\Delta B$ και $\triangle \Gamma\Lambda E$ παίρνουμε

$$\triangle A\Delta B \approx \triangle \Gamma\Lambda E \Rightarrow \frac{A\Delta}{\Gamma\Lambda} = \frac{AB}{\Gamma E} = \frac{\Delta B}{\Lambda E} \quad \text{ή} \quad \Lambda E = \frac{\Delta B \cdot \Gamma E}{AB} \quad (3)$$

Επίσης από την ομοιότητα των τριγώνων $\triangle ZKB$ και $\triangle \Gamma\Delta A$ παίρνουμε

$$\triangle ZKB \approx \triangle \Gamma\Delta A \Rightarrow \frac{ZK}{\Gamma\Delta} = \frac{KB}{\Delta A} = \frac{ZB}{\Gamma A} \quad \text{ή} \quad ZK = \frac{BZ \cdot \Gamma\Delta}{\Gamma A} \quad (4)$$

Όμως

$$\triangle ABD \approx \triangle GBZ \Rightarrow \frac{BD}{AB} = \frac{BZ}{BG} \quad (5)$$

και

$$\triangle ADG \approx \triangle BEG \Rightarrow \frac{EG}{BG} = \frac{GD}{AG} \quad (6)$$

Η (3) λόγω της (5) γράφεται

$$AE = \frac{BD \cdot GE}{AB} = \frac{BZ}{BG} \cdot GE \quad (7)$$

Από τις (7) και (4) έχουμε

$$\frac{AE}{ZK} = \frac{\frac{BZ}{BG} \cdot GE}{\frac{BZ \cdot GD}{AG}} \quad \text{ή} \quad \frac{AE}{ZK} = \frac{EG \cdot AG}{BG \cdot GD}$$

και λόγω της (6) η τελευταία ισότητα γίνεται

$$\frac{AE}{ZK} = \frac{EG \cdot AG}{BG \cdot GD} = \frac{GD}{AG} \cdot \frac{AG}{GD} = 1 \Rightarrow AE = ZK.$$

Επομένως,

$$ZK = AE = EP$$

και αφού $EP \parallel ZK$, συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $ZEPK$ είναι παραλληλόγραμμο.