



ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2020

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 07/11/2020

Ώρα Εξέτασης: 13:00-15:00

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε το όριο

$$L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + (\alpha - 1)x - 5\alpha + \sqrt{x^2 + 3x + 6}}{x - 2}$$

να είναι πραγματικός αριθμός.

Στη συνέχεια να βρείτε το L , για την πιο πάνω τιμή του α .

Λύση

Είναι,

$$\lim_{x \rightarrow 2} [x^2 + (\alpha - 1)x - 5\alpha + \sqrt{x^2 + 3x + 6}] = 6 - 3\alpha$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 0$$

Αν $6 - 3\alpha \neq 0$, τότε το όριο L δεν είναι πραγματικός αριθμός, άτοπο.

$$\text{Άρα είναι } 6 - 3\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 2}$$

Για $\alpha = 2$ έχουμε:

$$L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 10 + \sqrt{x^2 + 3x + 6}}{x - 2}$$

Επειδή

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x - 10 + \sqrt{x^2 + 3x + 6}) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 0,$$

καταλήγουμε στην απροσδιοριστία $\left(\frac{0}{0}\right)$ και ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος DLH, οπότε έχουμε

$$L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + x - 10 + \sqrt{x^2 + 3x + 6})'}{(x - 2)'} = \lim_{x \rightarrow 2} \left(2x + 1 + \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x + 6}} \right) = \frac{47}{8}$$

Πρόβλημα 2

Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση

$$\sigma\upsilon\nu^2 A + \sigma\upsilon\nu^2 B + \sigma\upsilon\nu^2 \Gamma + \eta\mu A\eta\mu B + \eta\mu B\eta\mu \Gamma + \eta\mu \Gamma\eta\mu A = 3,$$

να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

Λύση

$$\begin{aligned} & \sigma\upsilon\nu^2 A + \sigma\upsilon\nu^2 B + \sigma\upsilon\nu^2 \Gamma + \eta\mu A\eta\mu B + \eta\mu B\eta\mu \Gamma + \eta\mu \Gamma\eta\mu A = 3 \\ \Leftrightarrow & 1 - \eta\mu^2 A + 1 - \eta\mu^2 B + 1 - \eta\mu^2 \Gamma + \eta\mu A\eta\mu B + \eta\mu B\eta\mu \Gamma + \eta\mu \Gamma\eta\mu A = 3 \\ \Leftrightarrow & \eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma - \eta\mu A\eta\mu B - \eta\mu B\eta\mu \Gamma - \eta\mu \Gamma\eta\mu A = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{\alpha^2}{4R^2} + \frac{\beta^2}{4R^2} + \frac{\gamma^2}{4R^2} - \frac{\alpha}{2R} \cdot \frac{\beta}{2R} - \frac{\beta}{2R} \cdot \frac{\gamma}{2R} - \frac{\gamma}{2R} \cdot \frac{\alpha}{2R} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{\alpha^2}{4R^2} + \frac{\beta^2}{4R^2} + \frac{\gamma^2}{4R^2} - \frac{\alpha}{2R} \cdot \frac{\beta}{2R} - \frac{\beta}{2R} \cdot \frac{\gamma}{2R} - \frac{\gamma}{2R} \cdot \frac{\alpha}{2R} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{\alpha^2}{4R^2} + \frac{\beta^2}{4R^2} + \frac{\gamma^2}{4R^2} - \frac{\alpha\beta}{4R^2} - \frac{\beta\gamma}{4R^2} + \frac{\alpha\gamma}{4R^2} = 0 \\ \Leftrightarrow & \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \alpha\gamma = 0 \\ \Leftrightarrow & 2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\beta\gamma - 2\alpha\gamma = 0 \\ \Leftrightarrow & \alpha^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\beta\gamma - 2\alpha\gamma = 0 \\ \Leftrightarrow & (\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\alpha - \gamma)^2 = 0 \end{aligned}$$

Επειδή και οι τρεις όροι της τελευταίας εξίσωσης είναι μη αρνητικοί συνεπάγεται ότι θα είναι υποχρεωτικά και οι τρεις ίσοι με μηδέν.

Συνεπώς:

$$\begin{aligned} \alpha - \beta &= \beta - \gamma = \alpha - \gamma = 0 \\ \Leftrightarrow \alpha &= \beta = \gamma \end{aligned}$$

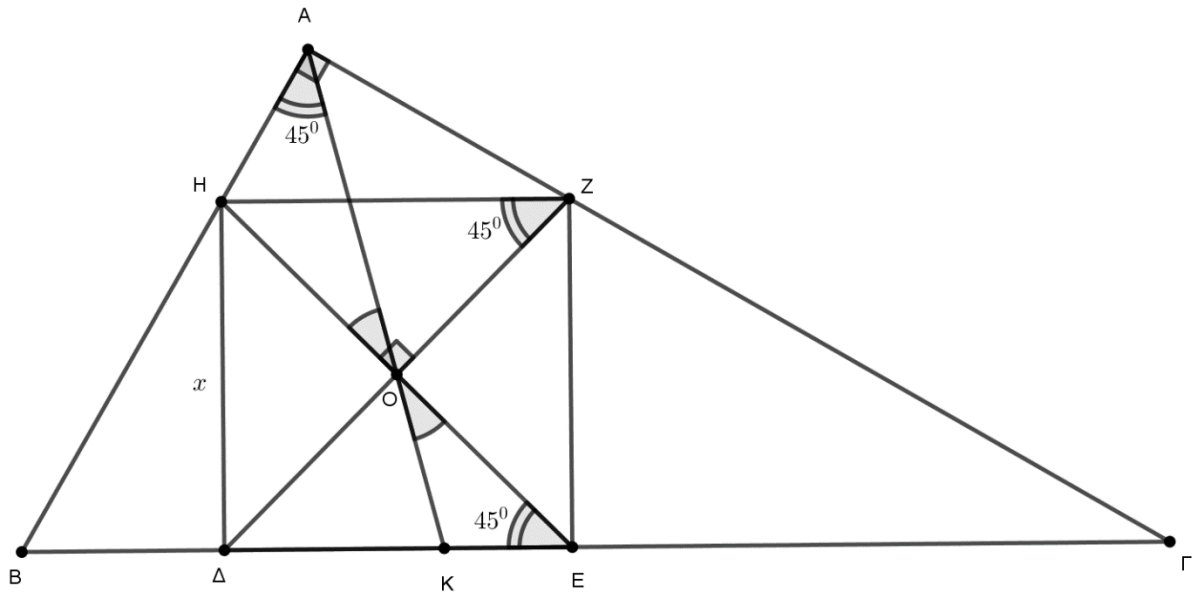
Άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\angle A = 90^\circ$). Στην υποτείνουσα $B\Gamma$ παίρνουμε σημεία Δ, E με $B\Delta < BE$ και στις κάθετες πλευρές AG, AB σημεία Z, H αντίστοιχα, ώστε το ΔEZH να είναι τετράγωνο, πλευράς x . Αν O είναι το κέντρο του τετραγώνου και η ευθεία AO τέμνει την υποτείνουσα $B\Gamma$ στο K , να αποδείξετε ότι

$$(OA) \cdot (OK) = \frac{x^2}{2}$$

Λύση 1



Είναι γνωστό ότι οι διαγώνιοι τετραγώνου τέμνονται κάθετα και διχοτομούν τις γωνίες του.

Το τεράπλευρο $AHOZ$ είναι εγγράψιμο, αφού $\angle HAZ + \angle HOZ = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

Άρα, $\angle HAO = \angle HZO = 45^\circ$.

Επίσης, $\angle OEK = \angle HE\Delta = 45^\circ$.

Από τα πιο πάνω έχουμε ότι $\angle HAO = \angle OEK$: (1).

Ακόμα, $\angle AOH = \angle KOE$ (κατακορυφήν γωνίες) : (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι τα τρίγωνα ΔAOK , ΔEOK είναι όμοια, απ' όπου έχουμε

$$\frac{(OA)}{(OE)} = \frac{(OH)}{(OK)} \Rightarrow (OA) \cdot (OK) = (OE) \cdot (OH) : (3)$$

Οι διαγώνιοι του τετραγώνου είναι ίσες και διχοτομούνται, άρα $(OA) = (OE) = (OZ) = (OH)$

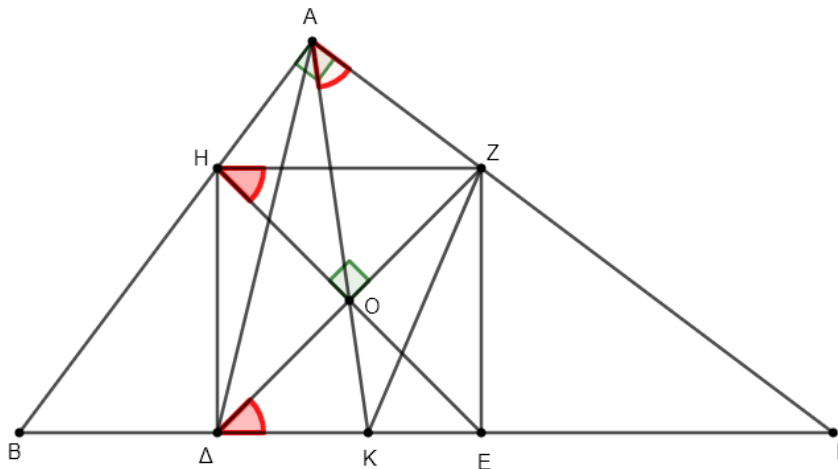
Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta HO\Delta$ έχουμε

$$(OH)^2 + (O\Delta)^2 = (\Delta H)^2 \Rightarrow 2(OH)^2 = x^2 \Rightarrow (OH) = \frac{x}{\sqrt{2}} = (OE)$$

Τέλος,

$$(3) \Rightarrow (OA) \cdot (OK) = \frac{x}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{(OA) \cdot (OK) = \frac{x^2}{2}}$$

Λύση 2



Είναι καλά γνωστό ότι οι διαγώνιοι ενός τετραγώνου διχοτομούνται, τένονται κάθετα και διχοτομούν τις γωνίες του.

Το τετράπλευρο $AZOH$ είναι εγγράψιμο διότι $\angle HAZ + \angle HOZ = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, επομένως:

$$\angle ZAO = \angle ZHO = 45^\circ.$$

Φαίρνω τα ευθύγραμμα τμήματα ZK και $A\Delta$.

Το τετράπλευρο $AZK\Delta$ είναι εγγράψιμο διότι $\angle ZAK = \angle Z\Delta K = 45^\circ$.

Από το Θεώρημα Δύναμης του Σημείου O ως προς τον περιγεγραμμένο κύκλο του τετραπλεύρου $AZK\Delta$ έχουμε:

$$(AO)(OK) = (ZO)(O\Delta) = (ZO)^2 \quad (1)$$

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο HZO έχουμε:

$$2(ZO)^2 = (HZ)^2 = x^2 \Rightarrow (ZO)^2 = \frac{x^2}{2} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει:

$$(OA) \cdot (OK) = \frac{x^2}{2}$$

Πρόβλημα 4

Δίνονται δύο πολυώνυμα $f(x)$ και $g(x)$ με ακέραιους συντελεστές και το πολυώνυμο

$$h(x) = g(x)f'(x) - g'(x)f(x)$$

Αν το πολυώνυμο $h(x)$ **δεν** έχει πραγματικές ρίζες και $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$ είναι δύο ρίζες του $f(x)$, να αποδείξετε ότι:

- i. $g(\rho_1) \neq 0$ και $g(\rho_2) \neq 0$
- ii. υπάρχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα του $g(x)$ στο διάστημα (ρ_1, ρ_2) .

Λύση

- i. Έχουμε:

$$h(\rho_1) = g(\rho_1)f'(\rho_1) - g'(\rho_1)f(\rho_1) = g(\rho_1)f'(\rho_1) \neq 0 \Rightarrow g(\rho_1) \neq 0 \text{ και ομοίως}$$

$$h(\rho_2) = g(\rho_2)f'(\rho_2) - g'(\rho_2)f(\rho_2) = g(\rho_2)f'(\rho_2) \neq 0 \Rightarrow g(\rho_2) \neq 0, \text{ αφού}$$

$$f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0 \text{ και } h(\rho_1) \neq 0, h(\rho_2) \neq 0$$

- ii. Έστω ότι το $g(x)$ δεν έχει ρίζα στο διάστημα (ρ_1, ρ_2) . Θεωρούμε τη συνάρτηση σ με

$$\sigma(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

για την οποία ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle, αφού

$$\sigma(\rho_1) = \frac{f(\rho_1)}{g(\rho_1)} = 0 \text{ και } \sigma(\rho_2) = \frac{f(\rho_2)}{g(\rho_2)} = 0$$

με

$$\sigma'(x) = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

Συνεπώς, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$, ώστε:

$$\sigma'(\xi) = 0 \Rightarrow g(\xi)f'(\xi) - g'(\xi)f(\xi) = 0 \Rightarrow h(\xi) = 0, \text{ που είναι άτοπο, διότι το πολυώνυμο}$$

$h(x)$ **δεν** έχει πραγματικές ρίζες.

Άρα υπάρχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα του $g(x)$ στο διάστημα (ρ_1, ρ_2) .