

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΔΕΙΓΜΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Μάθημα: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α ΑΣΚΗΣΗ 1 (α) <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td colspan="5"> 5 -3 max min </td></tr></table> αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,0], [2,\infty)$ φθίνουσα στο διάστημα $[0,2]$ (β) Η y έχει δύο τοπικά ακρότατα $\max(0,5)$ και $\min(2,-3)$	x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	y'	+	0	-	0	+	y	5 -3 max min					
x	$-\infty$	0	2	$+\infty$														
y'	+	0	-	0	+													
y	5 -3 max min																	
ΑΣΚΗΣΗ 2 $y = x^2 - 2x + 3 \Rightarrow y' = 2x - 2$ $y' = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$ <table><tr><td>x</td><td>$+\infty$</td><td>1</td><td>$-\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td colspan="3"> min </td></tr></table> $y_{\min} = 1 - 2 + 3 = 2 \Rightarrow \min(1, 2)$	x	$+\infty$	1	$-\infty$	y'	-	0	+	y	min								
x	$+\infty$	1	$-\infty$															
y'	-	0	+															
y	min																	

ΑΣΚΗΣΗ 3

Το σημείο $A(0, 3)$ επαληθεύει τη συνάρτηση

$$\Rightarrow e^0 + \beta = 3 \Rightarrow \beta = 2$$

$x=0$ μηδενίζει την πρώτη παράγωγο

$$\Rightarrow y' = ae^{\alpha x} + 1 \Rightarrow ae^0 + 1 = 0 \Rightarrow \alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = -1$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 - 12x + 9 \Rightarrow y'' = 6x - 12$$

$$y'' = 0 \Rightarrow 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y''	-	0	+
y		Σ.Κ.	

Αν $x \in (-\infty, 2)$ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω

Αν $x \in (2, +\infty)$ Στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω

Σημείο καμπής Σ.Κ. (2, 3)

ΑΣΚΗΣΗ 5

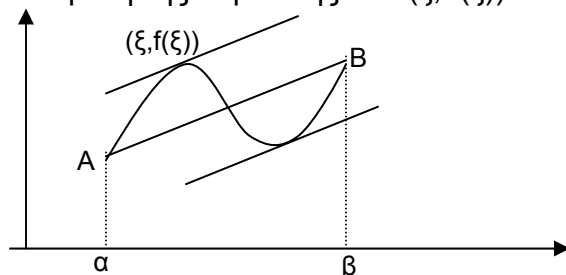
Θ.Μ.Τ.

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (a, b) , τότε υπάρχει ένας

τουλάχιστον αριθμός $\xi \in (a, b)$ τέτοιος ώστε: $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Γεωμετρική ερμηνεία.

Στο διάστημα (a, b) υπάρχει ένα τουλάχιστο σημείο $\xi \in (a, b)$ ώστε η εφαπτομένη της καμπύλης στο $(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη με το AB



ΜΕΡΟΣ Β**ΑΣΚΗΣΗ 1**

$$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

Πεδίο ορισμού: $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$\text{Αν } x=0 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow (0, -1)$$

Αν $y=0 \Rightarrow x^2 + 1 \neq 0 \Rightarrow$ δεν τέμνει τον άξονα των x .

$$y' = \frac{2x(x^2 - 1) - 2x(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x(x^2 - 1 - x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow -4x = 0 \Rightarrow x = 0$$

x	∞	-1	0	1	$-\infty$
y'			+	-	
Y			max		

$$y_{\max} = -1 \Rightarrow \max(0, -1)$$

Ασύμπτωτες

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$\Rightarrow x = -1$ Κατακόρυφη Ασύμπτωτη

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

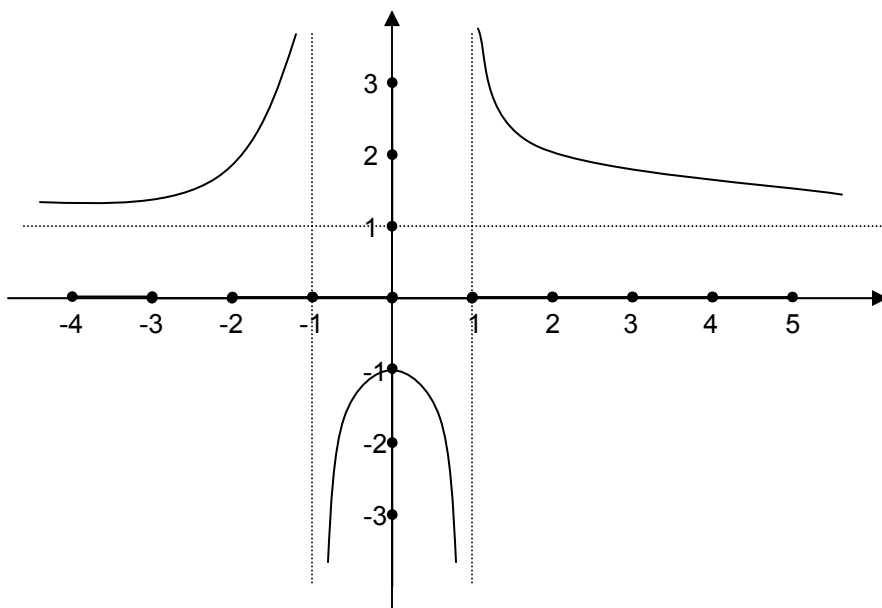
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$\Rightarrow x = 1$ Κατακόρυφη Ασύμπτωτη

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ A.M. } = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ A.M. } = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{2x} = 1$$

$\Rightarrow y = 1$ Οριζόντια Ασύμπτωτη



ΑΣΚΗΣΗ 2

$$(\alpha) V = \pi r^2 u \Rightarrow 54\pi = \pi r^2 u \Rightarrow u = \frac{54}{r^2}$$

$$(\beta) E_{\text{ολ}} = 2\pi r u + 2\pi r^2 \Rightarrow E_{\text{ολ}} = 2\pi r \frac{54}{r^2} + 2\pi r^2$$

$$\Rightarrow E_{\text{ολ}} = \frac{108\pi}{r} + 2\pi r^2$$

$$(\gamma) E' = -\frac{108\pi}{r^2} + 4\pi r$$

$$E' = 0 \Rightarrow -108\pi + 4\pi r^3 = 0 \Rightarrow 4\pi r^3 = 108\pi$$

$$\Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3 \text{ cm}$$

r	∞	3	$-\infty$
E'	-		+
E		min	

Για $r = 3 \text{ cm}$ το εμβαδόν είναι ελάχιστο.

$$E_{\text{min}} = \frac{108\pi}{3} + 2\pi \cdot 9 = 36\pi + 18\pi = 54\pi$$