

ΛΥΚΕΙΟ

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2014

ΜΑΘΗΜΑ : Μαθηματικά

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ 28 / 5 / 2014

ΤΑΞΗ : Α΄ Λυκείου

ΔΙΑΡΚΕΙΑ : 2:30 ώρες

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ

- Να γράψετε με πένα μπλε ή μαύρη. Τα σχήματα να γίνονται με μολύβι.
- Επιτρέπεται η χρήση ΜΗ προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
- Γράφετε καθαρά και ευανάγνωστα γράμματα.
- Να φαίνονται όλες οι ενέργειες που κάνετε.
- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α΄ Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 12.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

$$\chi + \psi = 3$$

1) Να λύσετε το σύστημα : $\psi + \omega = 4$

$$\chi + \omega = 5$$

2) Στο διπλανό σχήμα $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3 \parallel \varepsilon_4$.
Να βρείτε τα μήκη χ και ψ .



3) Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει μήκος 6cm, πλάτος 3cm και ύψος 4cm. Να βρείτε τον όγκο του.

4) Να λύσετε την ανίσωση: $\chi^2 - 5\chi - 14 > 0$

5) Να μετατρέψετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής, τα πιο κάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

α) $\frac{3}{\sqrt{3}}$

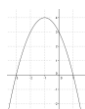
β) $\frac{39}{4-\sqrt{3}}$

- 6) Στο διπλανό σχήμα η ΕΑ είναι εφαπτομένη του κύκλου με κέντρο Ο και τόξο $\widehat{AB} = 110^\circ$. Να υπολογίσετε τις γωνίες χ , ψ , ω .



- 7) Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

- α) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$.
 β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της.
 γ) Να βρείτε τον άξονα συμμετρίας.
 δ) Το πεδίο τιμών της.



- 8) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 3x + 4 = 0$, χωρίς να λύσετε την εξίσωση, να υπολογίσετε την τιμή των πιο κάτω παραστάσεων :

α) $x_1 + x_2$ β) $x_1 x_2$ γ) $x_1^2 + x_2^2$ δ) $\frac{1}{x_1 x_2^2} + \frac{1}{x_1^2 x_2}$

- 9) Δίνεται το ευθύγραμμο τμήμα AB με $A(1,5)$ και $B(3,1)$. Να βρείτε:
 α) Τις συντεταγμένες του μέσου M του AB.
 β) Την εξίσωση της μεσοκάθετης του AB.

- 10) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\epsilon\phi\theta(1-\sigma\phi^2\theta) + \sigma\phi\theta(1-\epsilon\phi^2\theta) = 0$.

- 11) Να λύσετε και να διερευνήσετε την εξίσωση $\lambda^2 x - \lambda^2 = 9x - 3\lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

- 12) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με $AB = AG = 5\text{cm}$. Πάνω στη ΒΓ παίρνουμε σημείο Δ έτσι ώστε $AD = \Delta\Gamma = 4\text{cm}$.

- α) Να δείξετε ότι: $(AG)^2 = (B\Gamma)(\Gamma\Delta)$.
 β) Να βρείτε το μήκος ΒΔ

- 13) Για ποιες τιμές του κ η ευθεία $\psi = (\kappa^2 - 3\kappa)x + \kappa^2 - 9$:
 α) τέμνει τον άξονα των x σ'ένα μόνο σημείο.

- β) είναι παράλληλη με τον άξονα των x .
 γ) συμπίπτει με τον άξονα των x .

14) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$).

Αν $B\Gamma = 4\text{cm}$, $\hat{B} = \theta$ και εμβαδόν τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $E = 4\sqrt{3}\text{cm}^2$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.



15) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$
 Και $x_1 = 3x_2$ να δείξετε ότι $3\beta^2 = 16\alpha\gamma$.

ΜΕΡΟΣ Β΄ Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 4.
 Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

- 1) Δίνεται η εξίσωση: $(\kappa-1)x^2 + (4\kappa+2)x + \kappa^2 - 7 = 0$, ($\kappa \neq 1$).
 Να βρείτε για ποιες τιμές του κ η εξίσωση έχει:
 α) ρίζες αντίθετες.
 β) ρίζες αντίστροφες.
 γ) μια ρίζα τον αριθμό 1.
 δ) αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, να ισχύει η σχέση $x_1 \cdot x_2 + x_1 + x_2 \geq 2$
- 2) Η παραβολή $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$ τέμνει τον άξονα των x στα σημεία $A(-4,0)$ και $B(2,0)$.
 α) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής.
 β) Να βρείτε τον άξονα συμμετρίας της και τις συντεταγμένες της κορυφής της.
 γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f μετασχηματίζεται στη μορφή $f(x) = (x+1)^2 - 9$ και
 ακολούθως να κατασκευάσετε τη γραφική της παράσταση όπου να διακρίνονται
 οι τομές με τους άξονες η κορυφή της και ο άξονας συμμετρίας της.
- 3) Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \frac{\eta\mu(180^\circ + \theta)\sigma\upsilon\nu(360^\circ - \theta)}{\epsilon\phi(270^\circ + \theta)}$ και $B = \sigma\upsilon\nu^4\theta - \eta\mu^4\theta + \eta\mu^2\theta$.
 Να δείξετε ότι:
 α) $A = \eta\mu^2\theta$ και $B = \sigma\upsilon\nu^2\theta$
 β) $\frac{1}{\sigma\tau\epsilon\mu\theta - 1} - \frac{\epsilon\phi\theta}{\tau\epsilon\mu\theta + \epsilon\phi\theta} = 2 \frac{A}{B}$
- 4) Στο διπλανό σχήμα δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$.

Με διάμετρο την ΑΒ κατασκευάζουμε ημικύκλιο μέσα στο τετράγωνο. Από τυχαίο σημείο Σ της ΓΔ φέρουμε την ΑΣ και ΒΣ, οι οποίες τέμνουν το ημικύκλιο στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.

Να δείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα ΔΑΣ και ΕΒΑ είναι όμοια.
- β) τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΒΣΓ είναι όμοια.
- γ) $(ΑΕ)(ΑΣ) + (ΒΖ)(ΒΣ) = 4R^2$,
όπου R η ακτίνα του ημικυκλίου.

5) Αν ισχύει $3 < \chi < 7$ και $2 < \psi < 5$:

- α) να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η περίμετρος του διπλανού σχήματος.
- β) αν η περίμετρος του σχήματος είναι 32 cm και το εμβαδόν του είναι 49 cm^2 , να βρείτε τις τιμές των χ και ψ .



6) Στο διπλανό σχήμα ο κώνος και ο κύλινδρος έχουν κοινή βάση και η σφαίρα εφάπτεται στα κέντρα των δυο βάσεων του κυλίνδρου. Αν η ακτίνα του κώνου ικανοποιεί

τη σχέση: $(3R + 5)^{\frac{2}{5}} = 4$ και ο όγκος του κώνου ισούται με $162\pi \text{ cm}^3$, να υπολογίσετε τον όγκο της σκιασμένης επιφάνειας.

