

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2014

ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΤΑΞΗ : Β΄

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 3/6/2014

ΧΡΟΝΟΣ: 2½ ώρες

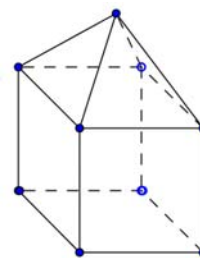
ΟΔΗΓΙΕΣ:

- α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής
- β) Να γράφετε μόνο με μελάνι (τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι).
- γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- δ) Στο τέλος του εξεταστικού δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο.

Το δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες

Μέρος Α: Από τις 15 ασκήσεις να λύσετε **μόνο τις 12**. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

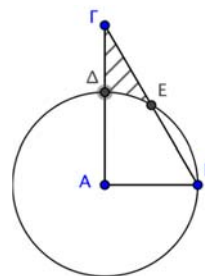
1. Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{2x+18}{x^2+3x-4}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.
2. Να λύσετε την εξίσωση $\varepsilon\varphi(4x - 20^\circ) = \sqrt{3}$.
3. Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ των συναρτήσεων: α) $y = \frac{3x-1}{x^2+1}$
β) $y = x^4 \cdot e^{\varepsilon\varphi x} + \ln(\sigma\upsilon\nu 5x)$
4. Οι αριθμοί $\log_4(x-1)$, $\log_2\sqrt{x-1}$, 1 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε το x .
5. Να βρείτε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-x-2}{x+1}$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x-5})$
6. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\hat{B} = 90^\circ + \hat{A}$ να δείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 = 4R^2$. Αν επιπλέον ισχύει $\gamma^2 + 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma = 25$ να δείξετε ότι $\gamma = 5\eta\mu\Gamma$.
7. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \log_{x+2} \frac{x+1}{x-3}$.
8. Στο διπλανό σχήμα το στερεό αποτελείται από ένα κύβο και μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα. Το παράπλευρο ύψος της πυραμίδας είναι $5\sqrt{2}cm$ και σχηματίζει με τη βάση της γωνία 45° .
Να υπολογίσετε
α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού
β) τον όγκο του στερεού.



9. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (A, ρ) και ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$.

Να υπολογίσετε συναρτήσει του ρ

- α) το εμβαδό της γραμμοσκιασμένης περιοχής $\Gamma\Delta E$
β) την περίμετρο της γραμμοσκιασμένης περιοχής $\Gamma\Delta E$



10. Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): x - 2y = 1$, $(\varepsilon_2): y = 1$ και το σημείο $B(\kappa, 1)$. Η (ε_1) τέμνει την (ε_2) και τον άξονα yy' στα σημεία A και Γ αντίστοιχα.
α) Αν η απόσταση του σημείου A από την ευθεία (ε_1) είναι $\sqrt{5}$ μονάδες να βρείτε το κ
β) Αν $\kappa = 8$ να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου BD του τριγώνου $AB\Gamma$

11. Να δείξετε ότι $\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu2\alpha - \sigma\upsilon\nu3\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu6\alpha}{\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu2\alpha + \eta\mu3\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu6\alpha} = \varepsilon\varphi5\alpha$.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 6x - 2$, $x \in [-3, +\infty)$. Να βρείτε τον τύπο, το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της αντίστροφης συνάρτησης της f .

13. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{(x+1)^2}$ και $g(x) = \frac{1-x^2}{x-1}$. Να εξετάσετε αν $f = g$. Αν $f \neq g$ να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu(2x-6)}{x-3} - a, & x < 3 \\ x - \beta, & x = 3 \\ \frac{|x^2-9|}{x-3}, & x > 3 \end{cases}$.

Να βρείτε την τιμή των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η $f(x)$ να είναι συνεχής στο 3.

15. Με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής να δείξετε ότι για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $1 + 4 + 7 + \dots + (3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$.

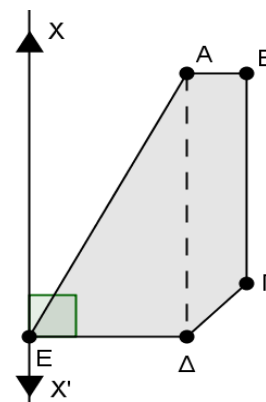
ΜΕΡΟΣ Β: Από τις 6 ασκήσεις να λύσετε μόνο τις 4. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $x^2 + y^2 - 2xy = 2x$.
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της καμπύλης στο σημείο Γ , με τετμημένη 2 και τεταγμένη θετική.
 - Αν η (ε) τέμνει τους άξονες xx' και yy' στα σημεία A και B αντίστοιχα να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
 - Να αποδείξετε ότι $y'' = \frac{1}{(x-y)^3}$

2. i. Αν $f(x) = \frac{x}{x-1}$ και $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, να ορίσετε τις συναρτήσεις:
- $\frac{g}{f}$
 - $f \circ g$
- ii. Αν $g(x) = \ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x+5}\right)$, $x > 0$ να λύσετε την εξίσωση $g(x) = 2\ln 2$.

3. Στο διπλανό σχήμα το πολύγωνο $AB\Gamma\Delta E$ περιστρέφεται πλήρως γύρω από τον άξονα XX' .

Δίνονται $XX' \parallel B\Gamma \parallel AD$, $AB \perp B\Gamma$, $AB = 5\text{cm}$, $B\Gamma = 12\text{cm}$, $\Gamma\Delta = 3\sqrt{2}\text{cm}$, $E\Delta = 8\text{cm}$, $\hat{B}\Gamma\Delta = \hat{\Gamma}\Delta E = 135^\circ$.
Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της επιφάνειας του παραγόμενου στερεού.



4. Δίνονται τα αθροίσματα $\Sigma_1 = 1 + \sin 2\theta + \sin^2 2\theta + \sin^3 2\theta + \dots$
 $\Sigma_2 = 1 + \sin 4\theta + \sin^2 4\theta + \sin^3 4\theta + \dots$ $\theta \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
- Να δείξετε ότι $\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2} = 4\sin^2 \theta$
 - Να λύσετε την εξίσωση $\frac{1}{\Sigma_2 - \Sigma_1} = \eta\mu 3\theta$ στο διάστημα $(0^\circ, 180^\circ)$

5. Ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ έχει την κορυφή A στην αρχή των αξόνων και η διαγώνιος $A\Gamma$ έχει μήκος $4\sqrt{2}$ μονάδες και εξίσωση $y = x$.
- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Γ
 Αν $\Gamma(4,4)$ και επιπλέον $\varepsilon\varphi A\hat{\Delta}B = \frac{1}{2}$ να βρείτε:
- β) την εξίσωση της διαγωνίου $B\Delta$
- γ) τις συντεταγμένες των κορυφών B και Δ
- δ) το εμβαδόν του ρόμβου
6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x + \alpha) \cdot e^{1/x}, x \neq 0$.
- α) Αν η κάθετη της καμπύλης στο σημείο της με $x = -1$ είναι παράλληλη με την ευθεία $e \cdot x + 2y + 3 = 0$, να δείξετε ότι $\alpha = 0$.
- β) Στη συνέχεια, να δείξετε ότι $x^3 \cdot f''(x) + x \cdot f'(x) - f(x) = 0$
- γ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$