① **(α)** Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2e^{1-x}$. Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα σημεία τομής με τους άξονες, τα διαστήματα μονοτονίας, τα ακρότατα, **τα σημεία καμπής** και τις ασύμπτωτές της, να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

(β) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από πλήρη περιστροφή γύρω από την ευθεία $x=2$ του χωρίου (S) που περικλείεται από τα γραφήματα των καμπύλων (C_1) και (C_2) καθοριζόμενα από τις εξισώσεις $y=τοξημx, x\in[0,1]$ και $y=τοξσυνx, x\in[0,1]$ αντίστοιχα και τον άξονα των τετμημένων.

② Για $m\in\{2,3\cdots\}$ θεωρούμε την ακολουθία $(\alpha_\nu{}^m)_{\nu\in\{0,1,2\cdots,m\}}$ με $\alpha_\nu{}^m=3^{\frac{\nu}{m}}$.

(α) Για κάθε $m\in\{2,3\cdots\}$, να δείξετε ότι $\alpha_{\nu+1}{}^m-\alpha_\nu{}^m=3^{\frac{\nu}{m}}\left(3^{\frac{1}{m}}-1\right)$ για κάθε $\nu\in\{0,1,2,3\cdots,m\}$

(β) Αν $m\in\{2,3\cdots\}$ και $\delta_\nu{}^m=\alpha_{\nu+1}{}^m-\alpha_\nu{}^m, \nu\in\{0,1,2,3\cdots,m\}$, να υπολογίσετε (συναρτήσει του m) το άθροισμα

$$S_m=\sum_{\nu=0}^{m}(\alpha_\nu{}^m)^2\cdot\delta_\nu{}^m$$

③ Δίνεται η έλλειψη

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$$

όπου $\alpha>\beta>0$ και σημείο $M(ασυνθ, βημθ)$ με $0<\theta<\frac{\pi}{2}$. Αν η εφαπτομένη της έλλειψης στο M τέμνει τον άξονα Ox στο σημείο P και τον άξονα των Oy στο σημείο Γ ενώ η κάθετη αυτής στο σημείο M τέμνει τον άξονα Ox στο σημείο Σ.

(α) Να δείξετε ότι ισχύει

$$\frac{\alpha^2}{(OP)^2}+\frac{\beta^2}{(O\Gamma)^2}=1 \quad \text{και} \quad (OP)\cdot(O\Sigma)=(\varepsilon\cdot\alpha)^2,$$

όπου ε η εκκεντρότητα της έλλειψης.

(β) Να ευρεθεί εκείνη η τιμή του $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ για την οποία το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την έλλειψη, το ευθύγραμμο τμήμα (ΓP) και τον άξονα των τετμημένων γίνεται το μέγιστο δυνατό το οποίο και να προσδιορίσετε.

④ **(α)** Να δείξετε ότι $ημx\le x, \forall x\in[0,2\pi]$. **(β)** Να δείξετε ότι $1-\frac{x^2}{2}\le συνx, \forall x\in[0,2\pi]$.

⑤ Είναι γνωστό ότι αν $\vec{u}$ είναι η συνάρτηση που δίνει την ταχύτητα ενός κινητού συναρτήσει του χρόνου t (σε δευτερόλπετα) έτσι ώστε $\vec{u}(t)\ge 0, \forall t\ge 0$, τότε η συνάρτηση S που δίνει την απόσταση (σε μέτρα) που διένυσε το κινητό σε χρόνο t δίνεται από τον τύπο

$$S(t)=\int_0^t\vec{u}(x)\,dx\,, t\ge 0$$

(α) Αν το κινητό κάλυψε συνολική απόσταση 1 μέτρο στο πρώτο δευτερόλεπτο, να δείξετε ότι υπήρξε χρονική στιγμή t στο χρονικό αυτό διάστημα κατά την οποία η ταχύτητά του ήταν διπλάσια της απόστασης που κάλυψε (μέχρι το σημείο αυτό).

(β) Αν η ταχύτητα του κινητού δίνεται από την

$$\vec{u}(t)=\frac{1}{t^2+t+1}, t\ge 0,$$

να δείξετε ότι η συνάρτηση της απόστασης είναι κοίλη.

⑥ Θεωρούμε τις συναρτήσεις f και g με τύπο $f(x)=(2x-1)^2-1$ και $g(x)=-x^2$ αντίστοιχα.

(α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου το οποίο περικλείεται από τα γραφήματα των δυο αυτών συναρτήσεων, την ευθεία με εξίσωση $x = 0$ και την ευθεία με εξίσωση $x = 1$.

(β) Να υπολογίσετε τον όγκο του χωρίου που δημιουργείται όταν το χωρίο που περικλείεται από τα γραφήματα των δυο συναρτήσεων, την ευθεία με εξίσωση $x = 0$ και την ευθεία με εξίσωση $x = \frac{4}{5}$ περιστραφεί πλήρως γύρω από τον άξονα των τετμημένων.

(γ) Έστω $\nu \geq 3$ ενας φυσικός αριθμός. Δείξτε ότι

$$\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu+1}{2}} (f(\kappa) + 1) - 4\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu-1}{2}} g(\kappa) = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \kappa$$

⑦ Ένας καθηγητής Μαθηματικών τοποθετεί μια ομάδα ν μαθητών σε μια ευθεία γραμμή.

(α) Αν στους μαθητές υπάρχουν 2 ζεύγη διδύμων, να βρείτε, συναρτήσει του ν, την πιθανότητα του ενδεχομένου όπως τα 4 αδέρφια να μη στέκονται το ενα δίπλα στο άλλο.

(β) Να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό μαθητών που απαιτούνται ώστε η πιθανότητα που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα να είναι τουλάχιστον $\frac{3}{4}$.

(γ) Αν $\nu \leq 300$, να βρείτε, συναρτήσει του ν, την πιθανότητα του ενδεχομένου όπως η παράταξη των μαθητών να περιέχει τουλάχιστον 2 άτομα που να έχουν γενέθλια την ίδια μέρα του χρόνου (1χρόνος=365 μέρες).

⑧ Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(1010 - x) + f(1010 + x) = \frac{\alpha}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^{2020} f(2020 - x)\, dx = \int_0^{2020} f(x)\, dx = 505\alpha$$

(β) Υπολογίστε το

$$\int_0^{2020} \frac{3 + e^{1010 - x}}{1 + e^{1010 - x}}\, dx$$

⑨ Δίνεται η οικογένεια συναρτήσεων $f_c\colon [0,4] \to \mathbb{R}$ με

$$f_c(x) = -\frac{1}{c}(x^2 - 4x), \quad (c > 0)$$

(α) Να βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ των γραφημάτων των συναρτήσεων $f_{2\kappa-1}$ και $f_{2\kappa+1}$ όπου κ σταθεροποιημένος φυσικός αριθμός.

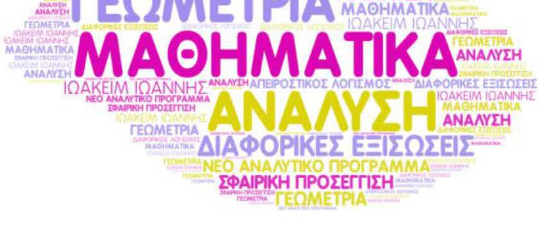
(β) Αν E_κ το εμβαδόν του προηγούμενου ερωτήματος, να υπολογίσετε το

$$S_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} E_\kappa$$

για κάθε ν φυσικό αριθμό και να εξετάσετε αν η σειρά

$$\sum_{\kappa=1}^{+\infty} E_\kappa$$

συγκλίνει.



Οι ασκήσεις **②, ③ (β), ⑤, ⑥** είναι ιδιοκατασκευές

Λύσεις

❶ **(α) Εύρεση πεδίου ορισμού:**

Η συνάρτηση f γράφεται ως $h \cdot g$ όπου h και g οι συναρτήσεις με τύπους $h(x) = (x-2)^2$ και $g(x) = e^x$ αντίστοιχα. Κατα συνέπεια,

$$D(f) = D(g) \cap D(h)$$

Αλλά, $D(g) = \mathbb{R} = D(h)$ και αρα $D(f) = \mathbb{R}$.

✻ Παρατηρούμε επίσης ότι $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. ✻ (βοηθητικό)

Εύρεση σημείων τομής με άξονες: $f(0) = 0 \rightarrow (0,0)$

Εύρεση διαστημάτων μονοτονίας και Τ.Α.: Η συνάρτηση είναι δις παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παράγωγο. Είναι $\forall x \in D(f) = \mathbb{R}, f'(x) = -x(x-2)e^{1-x}$. Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,2$ Έτσι, η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0)$και $(2, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $(0,2)$. Παρουσιάζει δε μέγιστο στο $\left(2, f(2)\right) = \left(2, \frac{4}{e}\right)$ και ελάχιστο στο $\left(0, f(0)\right) = (0,0)$.

Κυρτότητα συνάρτησης: Είναι $\forall x \in D(f) = \mathbb{R}, f''(x) = (x^2 - 4x + 2)e^{1-x}$. Εύκολα βρίσκουμε ότι και $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$

x	$-\infty$ 0	2	$+\infty$
f'	$-$	$+$	$-$
f	↘	↗	↘
	min		max

x	$-\infty$ $2-\sqrt{2}$	$2+\sqrt{2}$	$+\infty$
f''	$-$	$+$	$-$
f	⌒	⌣	⌒
	Σ.Κ.	Σ.Κ.	

Έτσι, η f είναι κυρτή στα διαστήματα $\left(-\infty, 2-\sqrt{2}\right)$και $\left(2+\sqrt{2}, +\infty\right)$ και κοίλη στο $\left(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\right) \approx (0.6, 0.52) =$. Παρουσιάζει δε Σ.Κ. στα $\left(2-\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}\right)$ και $\left(2+\sqrt{2}, f\left(2+\sqrt{2}\right)\right) \approx (3.41\,, 1.04)$

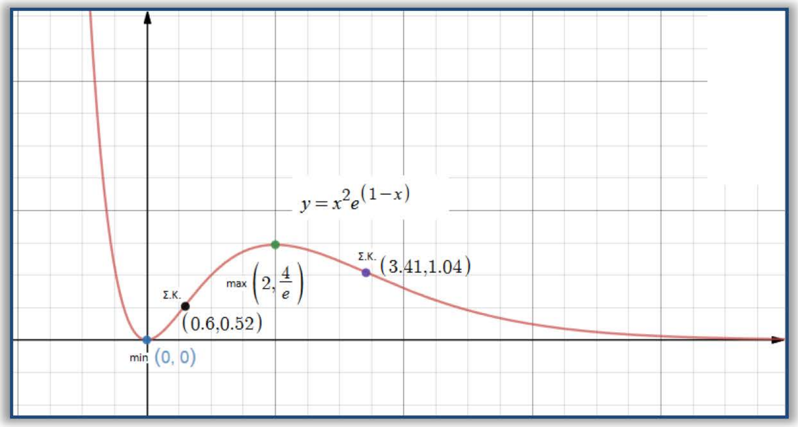
Ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης καθώς $x \rightarrow \pm\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 e^{1-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^{x-1}} = 0$$

(εφαρμόσαμε 2 φορές τον κανόνα του deL'Hospital)

και αρα ο άξονας των τετμημένων είναι οριζόντια ασύμπτωτη της συνάρτησης. Επίσης

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 e^{1-x} = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$$



(β)

$$(S) = \{0 \leq x \leq 1, \quad τοξημx \leq y \leq τοξσυνx\}$$

Είναι $\tau o\xi\eta\mu x = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ στο διάστημα $[0,1]$. Επίσης, $y = \tau o\xi\eta\mu x \Leftrightarrow x = \eta\mu y$ και $y = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow x = \sigma\upsilon\nu y$ και $\tau o\xi\eta\mu 0 = 0, \tau o\xi\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tau o\xi\sigma\upsilon\nu 1 = 0$

Εξωτερική ακτίνα : $\rho_2 = 2 - \eta\mu y$, Εσωτερική ακτίνα : $\rho_1 = 2 - \sigma\upsilon\nu y$ και

$$(S) = \left\{0 \le y \le \frac{\pi}{2}, \quad \eta\mu y \le x \le \sigma\upsilon\nu y\right\}$$

και αρα

$$V(S) = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(2-\eta\mu y)^2 - (2-\sigma\upsilon\nu y)^2]\, dy = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(4\sigma\upsilon\nu y - 4\eta\mu y - \sigma\upsilon\nu(2y)\big)\, dy$$

$$= 4\pi \left[\sigma\upsilon\nu y + \eta\mu y - \frac{\eta\mu(2y)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

2 Έστω $m \in \{2,3 \cdots\}$. Έχουμε για $\nu \in \{0,1,2,3 \cdots, m\}$ σταθεροποιημένο,

$$S_m = \sum_{\nu=0}^{m} (\alpha_\nu{}^m)^2 \cdot \delta_\nu{}^m = \sum_{\nu=0}^{m} \left(3^{\frac{\nu}{m}}\right)^2 \cdot 3^{\frac{\nu}{m}} \cdot \left(3^{\frac{1}{m}} - 1\right) = \sum_{\nu=0}^{m} 3^{\frac{2\nu}{m}} \cdot 3^{\frac{\nu}{m}} \cdot \left(3^{\frac{1}{m}} - 1\right) = \left(3^{\frac{1}{m}} - 1\right) \cdot \sum_{\nu=0}^{m} 3^{\frac{2\nu}{m}} \cdot 3^{\frac{\nu}{m}}$$

$$= \left(3^{\frac{1}{m}} - 1\right) \cdot \sum_{\nu=0}^{m} 3^{\frac{2\nu}{m}} \cdot 3^{\frac{\nu}{m}} = \left(3^{\frac{1}{m}} - 1\right) \cdot \sum_{\nu=0}^{m} 3^{\frac{3\nu}{m}} = \left(3^{\frac{1}{m}} - 1\right) \cdot \sum_{\nu=0}^{m} \left(3^{\frac{3}{m}}\right)^\nu = \left(3^{\frac{1}{m}} - 1\right) \cdot \left[\sum_{\nu=0}^{m-1} \left(3^{\frac{3}{m}}\right)^\nu + \left(3^{\frac{3}{m}}\right)^m\right]$$

$$= \left(3^{\frac{1}{m}} - 1\right) \cdot \left[\sum_{\nu=0}^{m-1} \left(3^{\frac{3}{m}}\right)^\nu + 27\right]$$

(το 27 προκύπτει ως ο τελευταίος όρος του αρχικού αθροίσματος, δηλ. ο όρος για $\nu = m$ και το κάνουμε αυτό για να χρησιμοποιήσω το άθροισμα m πρώτων όρων Γ.Π.)

Για τον υπολογισμό του $\sum_{\nu=0}^{m-1} \left(3^{\frac{3}{m}}\right)^\nu$, παρατηρούμε ότι οι όροι του είναι όροι Γ.Π. με λόγο $\lambda = 3^{\frac{3}{m}}$ και αρα

$$\sum_{\nu=0}^{m-1} \left(3^{\frac{3}{m}}\right)^\nu = \frac{\left(3^{\frac{3}{m}}\right)^{m-1} - 3^{\frac{3}{m}}}{3^{\frac{3}{m}} - 1}$$

Συνεπώς,

$$S_m = \left(3^{\frac{1}{m}} - 1\right) \cdot \left[\sum_{\nu=0}^{m-1} \left(3^{\frac{3}{m}}\right)^\nu + 27\right] = \left(3^{\frac{1}{m}} - 1\right) \cdot \sum_{\nu=0}^{m-1} \left(3^{\frac{3}{m}}\right)^\nu + 27\left(3^{\frac{1}{m}} - 1\right)$$

$$= \left(\mathbf{3^{\frac{1}{m}} - 1}\right) \cdot \frac{\left(3^{\frac{3}{m}}\right)^{m-1} - 3^{\frac{3}{m}}}{\mathbf{3^{\frac{3}{m}} - 1}} + 27\left(3^{\frac{1}{m}} - 1\right) = \left(3^{\frac{3}{m}}\right)^{m-1} - 3^{\frac{3}{m}} + 27\left(3^{\frac{1}{m}} - 1\right)$$

3 Το σημείο M ευρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο, αφού $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta \neq 0$. Επίσης,

$$\frac{(\alpha\sigma\upsilon\nu\theta)^2}{\alpha^2} + \frac{(\beta\eta\mu\theta)^2}{\beta^2} = \frac{\alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\alpha^2} + \frac{\beta^2\eta\mu^2\theta}{\beta^2} = \sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta = 1$$

και αρα το σημείο $M(\alpha\sigma\upsilon\nu\theta, \beta\eta\mu\theta)$ ανήκει πράγματι στην έλλειψη.

(α) Εύρεση της εξίσωσης της εφαπτομένης στο σημείο M

Παραγωγίζοντας πεπλεγμένα την εξίσωση της καμπύλης, έχουμε

$$\frac{2}{\alpha^2}x + \frac{2}{\beta^2}y\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\beta^2}{\alpha^2} \cdot \frac{x}{y}$$

και στο σημείο $M\left(\underbrace{\alpha\sigma\upsilon\nu\theta}_{x(\theta)},\underbrace{\beta\eta\mu\theta}_{y(\theta)}\right)$ είναι

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\alpha\sigma\upsilon\nu\,\theta}=-\frac{\beta^2}{\alpha^2}\cdot\frac{\alpha\sigma\upsilon\nu\theta}{\beta\eta\mu\theta}=-\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο M είναι

$$\begin{aligned} y-\beta\eta\mu\theta=-\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}(x-\alpha\sigma\upsilon\nu\theta) \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha\eta\mu\theta(y-\beta\eta\mu\theta)=-\beta\sigma\upsilon\nu\theta(x-\alpha\sigma\upsilon\nu\theta)\\ &\Leftrightarrow \quad (\alpha\eta\mu\theta)y-\alpha\beta\eta\mu^2\theta=-(\beta\sigma\upsilon\nu\theta)x+\alpha\beta\sigma\upsilon\nu^2\theta\\ &\Leftrightarrow \quad (\alpha\eta\mu\theta)y+(\beta\sigma\upsilon\nu\theta)x=\alpha\beta(\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta)\\ &\Leftrightarrow \quad (\alpha\eta\mu\theta)y+(\beta\sigma\upsilon\nu\theta)x=\alpha\beta \end{aligned}$$

Θέτοντας στην εξίσωση της εφαπτομένης $y=0$, βρίσκουμε το σημείο P: $P\left(\frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu\,\theta},0\right)\equiv\ P(\alpha\tau\varepsilon\mu\theta,0)$

Εύρεση της εξίσωσης της καθέτου στο σημείο M

Είναι $\lambda_{\kappa\acute{\alpha}\theta.}\cdot\lambda_{\varepsilon\varphi.}=-1$ και αρα $\lambda_{\kappa\acute{\alpha}\theta.}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\eta\mu\,\theta}{\sigma\upsilon\nu\,\theta}$. Έτσι,

$$y-\beta\eta\mu\theta=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}(x-\alpha\sigma\upsilon\nu\theta)\Leftrightarrow\beta\sigma\upsilon\nu\theta(y-\beta\eta\mu\theta)=\alpha\eta\mu\theta(x-\alpha\sigma\upsilon\nu\theta)$$

$$\Leftrightarrow(\beta\sigma\upsilon\nu\theta)y-\beta^2\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta=(\alpha\eta\mu\theta)x-\alpha^2\beta\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta\Leftrightarrow(\beta\sigma\upsilon\nu\theta)y-(\alpha\eta\mu\theta)x=\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\theta(\beta^2-\alpha^2)$$

$$\Leftrightarrow y-\frac{\alpha}{\beta}\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}x=\frac{1}{\beta}\eta\mu\theta(\beta^2-\alpha^2)$$

Θέτοντας στην εξίσωση της καθέτου $y=0$, βρίσκουμε το σημείο Σ: $\Sigma\left(\frac{\sigma\upsilon\nu\,\theta}{\alpha}(\beta^2-\alpha^2),0\right)$

Είναι

$$(OP)=\sqrt{\left(\frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu\theta}\right)^2}=\frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu\theta}\ \text{ και }\ (O\Gamma)=\sqrt{\left(\frac{\beta}{\eta\mu\theta}\right)^2}=\frac{\beta}{\eta\mu\theta}$$

Συνεπώς,

$$\frac{\alpha^2}{(OP)^2}+\frac{\beta^2}{(O\Gamma)^2}=\frac{\alpha^2}{\frac{\alpha^2}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}}+\frac{\beta^2}{\frac{\beta^2}{\eta\mu^2\theta}}=\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta=1$$

Επίσης,

$$(O\Sigma)=\sqrt{\left(\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\alpha}(\beta^2-\alpha^2)\right)^2}=\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\alpha}(\beta^2-\alpha^2)$$

$$(OP)\cdot(O\Sigma)=\frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu\theta}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\alpha}(\beta^2-\alpha^2)=\beta^2-\alpha^2=(\varepsilon\cdot\alpha)^2$$

Αλλά,

$$\varepsilon^2=\frac{\gamma^2}{\alpha^2}=\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2}=>(\varepsilon\cdot\alpha)^2=\beta^2-\alpha^2$$

και το ζητούμενο έπεται.

(γ) Το εμβαδόν του μικτόγραμμου χωρίου MPN, όπου $N(\alpha,0)$ ισούται με

$$E_{\tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon\ OP\Gamma}-\frac{1}{4}E_{\acute{\varepsilon}\lambda\lambda\varepsilon\iota\psi\eta\varsigma}$$

Είναι

$$E_{\tau\rho\iota\gamma\acute{\omega}\nu o\upsilon\ OP\Gamma}=\frac{(OP)\cdot(O\Gamma)}{2}=\frac{\frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu\theta}\cdot\frac{\beta}{\eta\mu\theta}}{2}=\frac{\alpha\beta}{2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta}=\frac{\alpha\beta}{\eta\mu(2\theta)}$$

και

$$\frac{1}{4}E_{\acute{\varepsilon}\lambda\lambda\varepsilon\iota\psi\eta\varsigma}=\alpha\int_0^\beta\sqrt{1-\frac{y^2}{\beta^2}}dy=\frac{\alpha}{\beta}\int_0^\beta\sqrt{\beta^2-y^2}\,dy.$$

Για τον υπολογισμό του (αόριστου) ολοκληρώματος $\int \sqrt{\beta^2 - y^2}\, dy$ θεωρούμε την τριγωνομετρική αντικατάσταση

$$y(\theta) = \beta\eta\mu\theta, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Η αντικατάσταση αυτή μετασχηματίζει το $\int \sqrt{\beta^2 - y^2}\, dy$ στο

$$\int \beta\sqrt{\beta^2 - \beta^2\eta\mu^2\theta}\,\sigma\upsilon\nu\theta\, d\theta = \beta \int \beta\sqrt{1 - \eta\mu^2\theta}\,\sigma\upsilon\nu\theta\, d\theta$$

$= \beta^2 \int \sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\theta}\,\sigma\upsilon\nu\theta\, d\theta = \beta^2 \int \sigma\upsilon\nu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta\, d\theta \ = \frac{\beta^2}{2}\big(\theta + \eta\mu(\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu(\theta)\big) + c$

όπου η σταθερά c απορρόφησε το β^2. Επιστρέφοντας στην αρχική μας μεταβλητή, έχουμε:

$$\theta = \tau o\xi\eta\mu\left(\frac{y}{\beta}\right)\ \kappa\alpha\iota\ \sigma\upsilon\nu(\theta) = \sqrt{1 - \frac{y^2}{\beta^2}} = \beta\sqrt{\beta^2 - y^2}$$

και αρα

$$\int \sqrt{\beta^2 - y^2}\, dy = \frac{\beta^2}{2}\left(\tau o\xi\eta\mu\left(\frac{y}{\beta}\right) + y\sqrt{\beta^2 - y^2}\right) + c$$

Τελικά,

$$\frac{\alpha}{\beta}\int_0^\beta \sqrt{\beta^2 - y^2}\, dy = \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta^2}{2}\left[\tau o\xi\eta\mu\left(\frac{y}{\beta}\right) + y\sqrt{\beta^2 - y^2}\right]_0^\beta = \frac{\beta\alpha}{2}(\tau o\xi\eta\mu 1)$$
$$= \frac{\beta\alpha}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}\pi\beta\alpha$$

Έτσι,

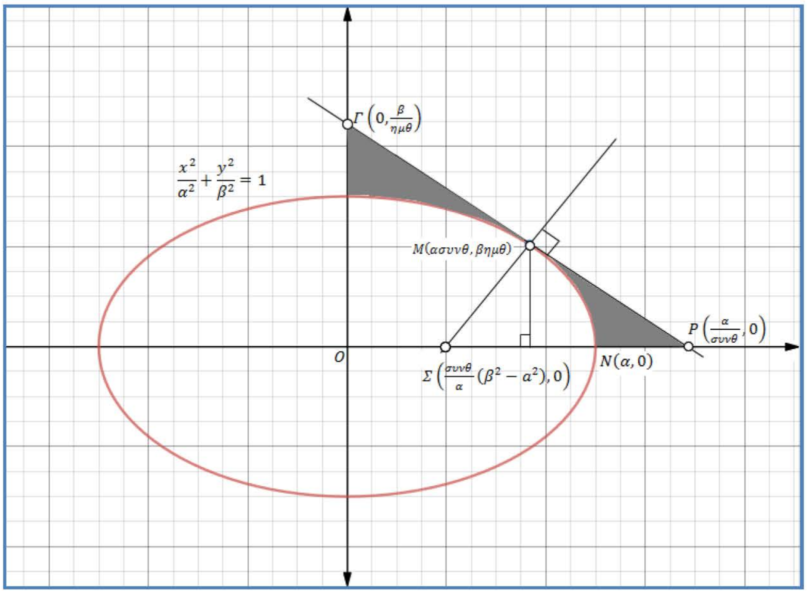
$$E_{MPN}(\theta) = E_{\tau\rho\iota\gamma\ \acute{\omega}\nu o\upsilon\ OP\Gamma} - \frac{1}{4}E_{\acute{\varepsilon}\lambda\lambda\varepsilon\iota\psi\eta\varsigma} = \frac{\alpha\beta}{\eta\mu(2\theta)} - \frac{1}{4}\pi\beta\alpha, \qquad \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Είναι

$$E'_{MPN}(\theta) = -2\frac{\eta\mu(2\theta)}{\sigma\upsilon\nu^2(2\theta)} = -2\varepsilon\varphi(2\theta)\tau\varepsilon\mu(2\theta)$$

και εύκολα βλέπουμε ότι $E'_{MPN}(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ στο πιο πάνω διάστημα. Στο σημείο αυτό, η συνάρτηση λαμβάνει τοπικό μέγιστο. Έτσι, για $\theta = \frac{\pi}{4}$ έχουμε το μέγιστο εμβαδόν, το οποίο είναι το

$$\alpha\beta - \frac{1}{4}\pi\beta\alpha = \alpha\beta\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\ \tau.\mu.$$



❹ **(α)** Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x - ημx, x \in [0,2\pi]$. Είναι παραγωγίσιμη και $f'(x) = 1 - συνx, x \in [0,2\pi]$. Έχουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow συνx = 1$ (στο διάστημα $[0,2\pi]$). Λύνοντας την εξίσωση αυτή στο εν λόγω διάστημα, αυτή έχει 2 λύσεις, τις $x = 0,2\pi$. Αλλά, $\forall x \in [0,2\pi]$ $-1 \le συνx \le 1 \Rightarrow 0 \le 1 - συνx \le 2$, δηλ. $0 \le f'(x), \forall x \in [0,2\pi]$. Συνεπώς, η f είναι αύξουσα στο διάστημα $[0,2\pi]$ και αφού $f(0) = 0$, έπεται ότι $f(x) \ge 0, \forall x \in [0,2\pi]$ και το συμπέρασμα έπεται.

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - συνx, x \in [0,2\pi]$. Είναι παραγωγίσιμη και $f'(x) = ημx - x, x \in [0,2\pi]$. Έχουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = ημx$ (στο διάστημα $[0,2\pi]$). Λύνοντας την εξίσωση αυτή στο εν λόγω διάστημα, αυτή έχει μοναδική λύση, την $x = 0$. Από το προηγούμενο ερώτημα, έχουμε ότι $f'(x) \le 0, \forall x \in [0,2\pi]$ και άρα η συνάρτηση f είναι φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Επειδή είναι συνεχής (σε κλειστό διάστημα), ελέγχουμε (συνεπεία του Θεωρήματος Μεγίστης/Ελαχίστης τιμής) τις τιμές στα άκρα του διαστήματος: $f(0) = 0$ και $f(2\pi) = 2\pi - 2\pi^2 - 1 < 0$.[1] Συνεπώς, $f(x) \le 0, \forall x \in [0,2\pi]$, δηλ. $1 - \frac{x^2}{2} \le συνx, \forall x \in [0,2\pi]$. Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$.

❺ **(α)** Η συνάρτηση S η οποία εκφράζει τη συνολική απόσταση που διένυσε το κινητό από την εκκίνησή του μέχρι χρόνο t sec είναι η $S: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$S(t) = \int_0^t |\vec{u}(x)|\, dx$$

(β) Είναι $\vec{u}(x) \ge 0, \forall x \ge 0$. Από το 1ο ΘΘΑΛ, η S είναι **συνεχής** συνάρτηση στο $[0,1]$, **διαφορίσιμη** στο $(0,1)$ και ισχύει $S'(x) = \vec{u}(x)$, $\forall \in (0,1)$. Επίσης, $S(0) = 0$ και $S(1) = \int_0^1 \vec{u}(x)\, dx = 1$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $G: [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$x \mapsto G(x) = S(x) - x^2$$

Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle για την G στο διάστημα $[0,1]$: υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $G'(\xi) = 0$. Αλλά, $G'(x) = S'(x) - 2x = \vec{u}(x) - 2x, \forall x \in (0,1)$. Έτσι, υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\vec{u}(\xi) = 2\xi$.

Επίσης, από το Πόρισμα του 1ου Θεμελιώδους Θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού, έπεται ότι είναι παραγωγίσιμη και

$$F'(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}, \qquad \forall x \in [0,+\infty).$$

Επίσης,

$$F''(x) = -\frac{1 + 2x}{(x^2 + x + 1)^2}, \qquad \forall x \in [0,+\infty).$$

Είναι $F''(x) < 0$ για $x > 0$ και $F''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ αρα η F είναι κοίλη παντού.

❻ Καταρχάς, παρατηρούμε ότι το γράφημα της f αποτελεί παραβολή με κορυφή το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ στο οποίο λαμβάνει (ολικό) ελάχιστο και το γράφημα της g αποτελεί παραβολή με κορυφή το σημείο $O(0,0)$ στο οποίο λαμβάνει (ολικό) μέγιστο.

(α) Υπολογίζουμε τα σημεία τομής των δυο καμπύλων: Είναι

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow (2x-1)^2 = -x^2 \Leftrightarrow 5x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = 0, \frac{4}{5}}$$

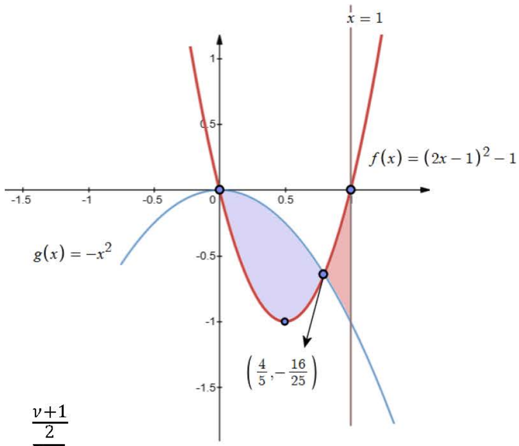
άρα, τα γραφήματα των f και g τέμνονται στα σημεία $\boldsymbol{(0, f(0)) = (0,1)}$ και $\boldsymbol{\left(\frac{4}{5}, f\left(\frac{4}{5}\right)\right) = \left(\frac{4}{5}, -\frac{16}{25}\right)}$.
επίσης,

[1] Δηλ. $\max_{x \in [0,2\pi]} f(x) = 0$ και $\min_{x \in [0,2\pi]} f(x) = 2\pi - 2\pi^2 - 1 < 0$

$$\begin{cases} f(x)-g(x)=5x^2-4x+1\le 0, \forall\in\left[0,\dfrac{4}{5}\right] \\ \\ f(x)-g(x)=5x^2-4x+1\ge 0, \forall\in\left[\dfrac{4}{5},1\right] \end{cases}$$

και $f(x)-g(x)=0$ μόνο στα $\boldsymbol{x=0,\frac{4}{5}}$. Έτσι,

$E=\int_0^1|f(x)-g(x)|\,dx=\int_0^{\frac{4}{5}}\big(g(x)-f(x)\big)\,dx+\int_{\frac{4}{5}}^{1}\big(f(x)-g(x)\big)\,dx=\int_0^{\frac{4}{5}}(4x-5x^2)\,dx+\int_{\frac{4}{5}}^{1}(5x^2-4x)\,dx$
$=\frac{32}{75}+\frac{7}{75}=\frac{39}{75}\quad \tau.\mu.$



(β) Είναι

$V=\pi\int_0^{\frac{4}{5}}|f^2(x)-g^2(x)|\,dx$

(γ) Είναι $f(x)=(2x-1)^2-1=4x^2-4x$ και αρα

$$\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu+1}{2}}(f(\kappa)+2)+4\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu-1}{2}}g(\kappa)=\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu+1}{2}}(4\kappa^2-4\kappa)+\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu+1}{2}}1+4\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu-1}{2}}(-\kappa^2)$$

$$=4\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu+1}{2}}\kappa^2-4\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu+1}{2}}\kappa+\frac{\nu+1}{2}-4\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu-1}{2}}\kappa^2=4\left(\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu+1}{2}}\kappa^2-\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu-1}{2}}\kappa^2\right)+\frac{\nu+1}{2}-4\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu+1}{2}}\kappa$$

Αλλά,

$$\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu+1}{2}}\kappa^2-\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu-1}{2}}\kappa^2=\left(\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu-1}{2}}\kappa^2+\left(\frac{\nu+1}{2}\right)^2\right)-\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu-1}{2}}\kappa^2=\left(\frac{\nu+1}{2}\right)^2$$

και

$$\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu+1}{2}}\kappa=\frac{\frac{\nu+1}{2}\left(\frac{\nu+1}{2}+1\right)}{2}=\frac{(\nu+1)(\nu+3)}{8}$$

Έτσι,

$$\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu+1}{2}}(f(\kappa)+1)+4\sum_{\kappa=1}^{\frac{\nu-1}{2}}g(\kappa)=4\frac{(\nu+1)^2}{4}+\frac{\nu+1}{2}-4\frac{(\nu+1)(\nu+3)}{8}=\frac{\nu(\nu+1)}{2}=\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa$$

8 Για το $\int_0^{2020}f(2020-x)\,dx=\int_0^{2020}f(2\cdot 1010-x)\,dx$, θεωρούμε το μετασχηματισμό $u(x)=2020-x$ και αρα

$$\int_0^{2020}f(2020-x)\,dx=-\int_{2020}^{0}f(u)\,du=\int_0^{2020}f(u)\,du\equiv\int_0^{2020}f(x)\,dx\quad(1)$$

Από υπόθεση, είναι

$$f(1010-x)+f(1010+x)=\frac{\alpha}{2},\forall x\in\mathbb{R}$$

και αρα

$$\int_{-1010}^{1010}f(1010-x)\,dx+\int_{-1010}^{1010}f(1010+x)\,dx=\int_{-1010}^{1010}\frac{\alpha}{2}dx$$

δηλ.

$$\int_{-1010}^{1010}f(1010-x)\,dx+\int_{-1010}^{1010}f(1010+x)\,dx=2020\frac{\alpha}{2}=1010\alpha$$

Για τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται στο αριστερό μέλος της πιο πάνω σχέσης, θεωρούμε το μετασχηματισμό $u(x) = 1010 - x$ και λαμβάνουμε

$$\int_{-1010}^{1010} f(1010 - x)\,dx = -\int_{2020}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{2020} f(x)\,dx$$

και

$$\int_{-1010}^{1010} f(1010 + x)\,dx = -\int_{2020}^{0} f(2020 - x)\,dx = \int_{0}^{2020} f(2020 - x)\,dx \overset{(1)}{=} \int_{0}^{2020} f(x)\,dx$$

Έτσι, τα πιο πάνω δίνουν

$$2\int_{0}^{2020} f(x)\,dx = 1010\alpha$$

δηλ.

$$\int_{0}^{2020} f(x)\,dx = 505\alpha$$

Έτσι, τελικά,

$$\int_{0}^{2020} f(2020 - x)\,dx = \int_{0}^{2020} f(x)\,dx = 505\alpha$$

(β) Θα εφαρμόσουμε το πιο πάνω για

$$f(x) = \frac{3 + e^{1010-x}}{1 + e^{1010-x}}$$

Είναι

$$f(1010 - x) + f(1010 + x) = \frac{3 + e^{1010-(1010-x)}}{1 + e^{1010-(1010-x)}} + \frac{3 + e^{1010-(1010+x)}}{1 + e^{1010-(1010+x)}}$$

$$= \frac{3 + e^{x}}{1 + e^{x}} + \frac{3 + e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{3 + e^{x}}{1 + e^{x}} + \frac{e^{x}(3 + e^{-x})}{e^{x}(1 + e^{-x})} = \frac{3 + e^{x}}{1 + e^{x}} + \frac{(3e^{x} + 1)}{e^{x} + 1} = \frac{4 + 4e^{x}}{1 + e^{x}} = 4\frac{1 + e^{x}}{1 + e^{x}} = 4 = \frac{8}{2}$$

και αρα από το προηγούμενο ερώτημα,

$$\int_{0}^{2020} \frac{3 + e^{1010-x}}{1 + e^{1010-x}}\,dx = 505 \cdot 4 = 2020$$

Λύσεις των ❽,❾ σε επόμενη δημοσίευση.

Από το εργαστήρι Μαθηματικών του κ. Ιωακείμ Ι.