Μαθηματικά 8-2019-2ο Δειγματικό για τις Εισαγωγικές Εξετάσεις

Μέρος Α

1. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = τοξημ\left(\frac{x}{2}\right)$. Να **βρείτε** την f', όπου αυτή ορίζεται.

2. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 16y = -32$.
(α) Αφού δείξετε ότι η πιο πάνω εξίσωση αναπαριστά κύκλο, να προσδιορίσετε την ακτίνα και το κέντρο του.
(β) Έστω ο κύκλος που καθορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις

$$\begin{cases} x = x(t) = 5\sqrt{2}συν(t) + 9 \\ y = y(t) = 5\sqrt{2}ημ(t) - 1 \end{cases}, t \in [0,2\pi)$$

Να δείξετε ότι οι δυο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά και να βρεθεί το σημείο επαφής τους.

3. Θεωρούμε μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(1) = 0$ και $f'(x) = \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty)$. Αποδείξτε ότι $f(x) \leq x - 1, x \in (0, +\infty)$.

4. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = -x^2 + 2x + 8, x \in [0,4]$. Να βρεθεί το πεδίο τιμών της. Επίσης, να δείξετε ότι επαληθεύεται το Θεώρημα Μέσης τιμής στο εν λόγω διάστημα, να ευρεθεί το σημείο που ικανοποιεί το Θεώρημα αυτό και να δωθεί **Γεωμετρική ερμηνεία** αυτού.

5. **(α)** Αν A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου $Ω$ με

$$P(B) = \frac{1}{4} \qquad P(A|B) = \frac{1}{6} \qquad P(A \cup B) = \frac{3}{8},$$

Να ελέγξετε κατά πόσον αυτά είναι **ανεξάρτητα.**
(β) Να υπολογίσετε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης ΑΡΑΚΑΣ. Πόσοι από αυτούς αρχίζουν με το Γράμμα Α και τελειώνουν με διαφορετικό γράμμα από το Α;

6. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4αx, α > 0$ και τα σημεία $A(αt^2, 2αt)$ και $B(αρ^2, 2αρ)$ αυτής $(t \neq ρ)$.
Να βρείτε την εξίσωση της χορδής AB.

7. Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια δις παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία $f'(0) = 4$, $f(0) = 1$ και η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$f''(x) - 2f'(x) - 8f(x) = 0.$$

(α) Αν $h(x) = f'(x) + 2f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι $h'(x) - 4h(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
(β) Να προσδιορίσετε την f.
(γ) Να υπολογίσετε το $\sum_{k=0}^{\infty} f(-4k)$

8. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 - ημ^2 x}}, \qquad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

(α) Να βρείτε τα ακρότατα της f και να προσδιορίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.
(β) Να αποδείξετε ότι

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{4} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx \leq \frac{\pi}{2}$$

9. Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται όταν το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη με εξίσωση $y = \ln\left(\frac{1}{x}\right), x > 0$, την εφαπτομένη της καμπύλης αυτής στο σημείο της με $x = \frac{1}{e}$ και τον άξονα των τετμημένων περιστραφεί πλήρως γύρω από τον άξονα των τετμημένων.

10. Να υπολογίσετε το

$$\int \frac{x^{2017}}{(x+1)^{2019}}\,dx$$

Ιωακείμ Ι. 99 844998

Προτεινόμενες Λύσεις

1. **Εύρεση του π.ο. της συνάρτησης (στο οποίο αυτή αντιστρέφεται)** $f(x) = τοξημ\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\frac{x}{2} \in [-1,1] \Leftrightarrow -1 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$$

και αρα

$$y = τοξημ\left(\frac{x}{2}\right),\ \ x \in [-2,2] \Leftrightarrow \frac{x}{2} = ημy,\ \ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Εύρεση της παραγώγου συνάρτησης

Ξέρουμε, από τη Θεωρία, ότι η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του συνόλου του π.ο. της, δηλ. στο $(-2,2)$ και (παραγωγίζοντας πεπλεγμένα) $\forall x \in (-2,2)$

$$\frac{x}{2} = ημy \Leftrightarrow \frac{1}{2} = y' \cdot συνy \Leftrightarrow y' = \frac{1}{2συνy}$$

(είναι $συνy \neq 0, \forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$). Αλλά,

$$συν^2 y + ημ^2 y = 1 \Rightarrow συν^2 y = 1 - ημ^2 y$$

και αφού $συνy > 0, \forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, η πιο πάνω δίνει

$$συνy = \sqrt{1 - ημ^2 y} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$$

Συνεπώς, από τα πιο πάνω,

$$y' = \frac{1}{2συνy} = \frac{1}{2\frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}},\ \ x \in (-2,2)$$

2. **(α)** Είναι

$$x^2 + y^2 - 16y = -32 \Leftrightarrow x^2 + (y-8)^2 = 32$$

και αρα το γράφημα της καμπύλης που περιγράφεται από την πιο πάνω εξίσωση αναπαριστά κύκλο με κέντρο το σημείο $K_1 = (0,8)$ και ακτίνα $R_1 = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

(β) Έχουμε

$$\begin{cases} x = x(t) = 5\sqrt{2}συν(t) + 9 \\ y = y(t) = 5\sqrt{2}ημ(t) - 1 \end{cases}, t \in [0,2\pi) \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) - 9 = 5\sqrt{2}συν(t) \\ y(t) + 1 = 5\sqrt{2}ημ(t) \end{cases}, t \in [0,2\pi)$$

και αρα το γράφημα της καμπύλης που περιγράφεται από το πιο πάνω ζεύγος παραμετρικών εξισώσεων αναπαριστά κύκλο με κέντρο το σημείο $K_2 = (-9,1)$ και ακτίνα $R_2 = 5\sqrt{2}$. Τώρα,

$$d(K_1, K_2) = \sqrt{(-9-1)^2 + (1+8)^2} = 9\sqrt{2}$$

και $R_1 + R_2 = 9\sqrt{2}$. Δηλ. η διάκεντρος των 2 κύκλων είναι ίση με την απόσταση των κέντρων τους, άρα αυτοί εφάπτονται εξωτερικά. Θα βρούμε το σημείο επαφής, λύνοντας σύστημα των δυο εξισώσεων:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 16y = -32 \\ (x+9)^2 + (y+1)^2 = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 16y = -32 \\ x^2 + y^2 + 2y - 18x = -32 \end{cases} \Leftrightarrow -16y = 2y - 18x \Leftrightarrow \boldsymbol{x = y}$$

Αντικαθιστώντας (π.χ. στην 1η) έχουμε

$$\Leftrightarrow x^2 + x^2 - 16x + 32 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = 4}$$

Άρα το σημείο επαφής τους είναι το $(4,4)$.

3. Έστω $x > 1$. Από το ΘΜΤ, θα έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (1, x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$. Αλλά,

$$\frac{f(x) - \overbrace{f(1)}^{=0}}{x - 1} = \frac{f(x)}{x - 1}$$

και αφού από υπόθεση είναι $f'(\xi) = \frac{1}{\xi}$, θα έχουμε ότι

$$\frac{f(x)}{x-1}=\frac{1}{\xi}$$

Όμως, $\xi\in(1,x)\Rightarrow\frac{1}{\xi}<1$ και αρα $\frac{f(x)}{x-1}<1$, δηλ. $f(x)<x-1$. Ομοίως και στην περίπτωση που $0<x<1$. Για $x=1$ ισχύει η ισότητα. Συνεπώς, $f(x)\leq x-1, x\in(0,+\infty)$.

4. Η μελέτη της συνάρτηση θα δωθεί με ύλη Β Λυκείου. Η εναλλακτική είναι με χρήση εργαλείων του Δ.Λ.
Κατ'αρχάς, αφού η f είναι συνεχής ορισμένη σε κλειστό διάστημα, από το **Θεώρημα Μέγιστης/Ελάχιστης Τιμής**, αυτή θα παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμής f_{max} και f_{min} αντίστοιχα και μάλιστα το πεδίο τιμών της είναι το (κλειστό) διάστημα $[f_{min}, f_{max}]$. Έχουμε:

$$f(x)=-x^2+2x+8=-(x-1)^2+9,\qquad x\in[0,4]$$

και αρα η συνάρτηση έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο με $x=1$, την τιμή $f(1)=9$. Επίσης, $f(0)=8$ και $f(4)=0$. Συνεπώς, ως συνέπεια του ίδιου Θεωρήματος, έχουμε $f_{min}=0$ και $f_{max}=9$, δηλ. το πεδίο τιμών της είναι το (κλειστό) διάστημα $[0,9]$.
Τώρα, ως πολυωνυμική, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,4]$ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του, άρα από το ΘΜΤ του Δ.Λ. έχουμε ότι υπάρχει (τουλάχιστον) ενα $\xi\in(0,4)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(4)-f(0)}{4-0},\qquad \delta\eta\lambda.\ f'(\xi)=-2$$

Αλλά, $f'(x)=-2x+2, \forall x\in[0,4]$ και αρα

$$f'(\xi)=-2\Leftrightarrow -2\xi+2=-2\Leftrightarrow \xi=2$$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι η εφαπτομένη του γραφήματος της συνάρτησης στο σημείο με $x=2$ είναι παράλληλη με την ευθεία που περνά από τα άκρα του διαστήματος του π.ο. της.

5. **(α)** Τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα $\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$. Θα υπολογίσουμε τις $P(A)$ και $P(A\cap B)$:

$$P(A|B)=\frac{1}{6}\Leftrightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{6}\Leftrightarrow\frac{P(A\cap B)}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{6}\Leftrightarrow \boldsymbol{P(A\cap B)=\frac{1}{24}}$$

$$P(A\cup B)=\frac{3}{8}\Leftrightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{3}{8}\Leftrightarrow P(A)+\frac{1}{4}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{24}}=\frac{3}{8}\Leftrightarrow \boldsymbol{P(A)=\frac{1}{6}}$$

Άρα,

$$P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{24}=P(A\cap B)$$

και αρα τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα.

(β) Το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης ΑΡΑΚΑΣ είναι

$$\frac{6!}{3!}=120$$

Θα βρούμε πόσοι από αυτούς αρχίζουν με το Γράμμα Α και τελειώνουν με διαφορετικό γράμμα από το Α.
Βήμα 1: επιλογή του πρώτου γράμματος→ 1 τρόπος (το ψηφίο Α)
Βήμα 2: επιλογή των 4 ενδιάμεσων γραμμάτων→ πλήθος αναγραμματισμών των Α,Α,Κ,Σ $\frac{4!}{2!}=12$ τρόποι
Βήμα 2: επιλογή τελευταίου γράμματος→ 1 από τα Ρ,Κ,Σ 3 τρόποι.
Από την **Πολλαπλασιαστική αρχή**, το ζητούμενο πλήθος είναι ίσο με

$$1\cdot 12\cdot 3=36$$

6. $y^2=4\alpha x, \alpha>0$ και τα σημεία $A(\alpha t^2, 2\alpha t)$ και $B(\alpha\rho^2, 2\alpha\rho)$ αυτής $(t\neq\rho)$
Βρίσκουμε την κλίση της ευθείας AB
Κατ'αρχάς αφού $t\neq\rho$, έπεται ότι η ευθεία δεν είναι παράλληλη με τον άξονα των τεταγμένων

$$\lambda_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{2\alpha\rho-2\alpha t}{\alpha\rho^2-\alpha t^2}=\frac{2\alpha(\rho-t)}{\alpha(\rho-t)(\rho+t)}=\frac{2}{\rho+t}$$

και αρα

$$(AB): y - y_B = \lambda_{AB}(x - x_B) \Leftrightarrow (AB): y - 2\alpha\rho = \frac{2}{\rho + t}(x - \alpha\rho^2) \Leftrightarrow \boldsymbol{(AB): (\rho + t)y - 2x = 2\alpha\rho t}$$

7. Έχουμε

$$\begin{cases} f''(x) - 2f'(x) - 8f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ f'(0) = 4, f(0) = 1 \end{cases}$$

(α) Είναι $\forall x \in \mathbb{R}$ $h(x) = f'(x) + 2f(x) \Rightarrow h'(x) = f''(x) + 2f'(x)$ και αρα

$$h'(x) - 4h(x) = f''(x) + 2f'(x) - 4f'(x) - 8f(x) = f''(x) - 2f'(x) - 8f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

από υπόθεση.

(β) Είναι $h(0) = f'(0) + 2f(0) = 4 + 2 = 6$. Τώρα, θεωρούμε τη συνάρτηση h με τύπο $u(x) = e^{-4x}h(x)$. Είναι

$$u'(x) = \left(e^{-4x}h(x)\right)' \Rightarrow u'(x) = -4e^{-4x}h(x) + e^{-4x}h'(x) = e^{-4x}\underbrace{\left(h'(x) - 4h(x)\right)}_{=0} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

και αρα, από γνωστό μας Πόρισμα, είναι $u(x) = c$ για κάποια πραγματική σταθερά c, δηλ. $e^{-4x}h(x) = c$, δηλ. $h(x) = ce^{4x}, \forall x \in \mathbb{R}$. Αλλά, $h(0) = 6$ και αρα $c = 6$. Συνεπώς,

$$u(x) = 6e^{4x}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Είναι $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\left(e^{2x}f(x)\right)' = 2e^{2x}f(x) + e^{2x}f'(x) = e^{2x}\left(f'(x) + 2f(x)\right) = u(x)e^{2x} = 6e^{4x} \cdot e^{2x} = 6e^{6x}$$

Τώρα,

$$\left(e^{2x}f(x)\right)' = 6e^{6x} \Rightarrow \int \left(e^{2x}f(x)\right)' dx = 6\int e^{6x}\, dx \Rightarrow e^{2x}f(x) = e^{6x} + c \Rightarrow f(x) = e^{4x} + ce^{-2x}$$

Αλλά, $f(0) = 1$ και αρα $c + 1 = 1$, δηλ. $c = 0$. Έτσι,

$$f(x) = e^{4x}, \forall x \in \mathbb{R}$$

(γ) Έχουμε

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(-4k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-16k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{e^{16k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e^{16}}\right)^{\kappa}$$

Αλλά, $\left|\frac{1}{e^{16}}\right| < 1$ και αρα η πιο πάνω σειρά συγκλίνει και (γεωμετρική σειρά) μάλιστα

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e^{16}}\right)^{\kappa} = \frac{1}{1 - \frac{1}{e^{16}}} = \frac{e^{16}}{e^{16} - 1}$$

8. **(α)** Είναι $\eta\mu^2 x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ και αρα η f είναι καλά ορισμένη. Επίσης, στο π.ο. της είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \frac{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}{(2 - \eta\mu^2 x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\eta\mu(2x)}{2(2 - \eta\mu^2 x)^{\frac{3}{2}}}$$

Τα κρίσιμα λοιπόν σημεία της f είναι όλα τα $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ τέτοια ώστε $f'(x) = 0$, δηλ. τα $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ τέτοια ώστε $\eta\mu(2x) = 0$, δηλ. τα $x = 0, \frac{\pi}{2}$.. Παρατηρούμε ότι $f'(x) > 0, \forall\, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και αρα είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό και λόγω της συνέχειας στα άκρα του διαστήματος, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Συνεπώς,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = f(0) \leq f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad (*)$$

δηλ. $f_{max} = 1$ και $f_{min} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(β) Η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και αρα κατα Riemann ολοκληρώσιμη στο διάστημα αυτό. Από τη σχέση (∗) και τη γνωστή μας ιδιότητα του ολοκληρώματος Riemann, έχουμε ότι

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$$

Αλλά,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} dx = \frac{\sqrt{3}}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \quad και \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

και αρα

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{4} \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx \le \frac{\pi}{2}.$$

9. Έχουμε

$$y = \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x, x > 0$$

και για $x > 0$ είναι

$$y'(x) = -\frac{1}{x}$$

Η κλίση της εφαπτομένης της συνάρτησης στο σημείο της με $\left(\frac{1}{e}, -\ln\left(\frac{1}{e}\right)\right) = \left(\frac{1}{e}, -1\right)$ είναι

$$y'\left(\frac{1}{e}\right) = -e$$

και αρα η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο αυτό είναι

$$y - 1 = -e\left(x - \frac{1}{e}\right)$$

δηλ. η

$$y = 2 - ex$$

Η ευθεία αυτή τέμνει τον άξονα των τετμημένων (βάζουμε $y = 0$) στο σημείο $\left(\frac{2}{e}, 0\right)$. Έτσι,

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_{\frac{1}{e}}^{1} y^2 dx - \frac{(AM)^2 \cdot (AB)}{3}\pi = \pi \int_{\frac{1}{e}}^{1} \ln^2 x dx - \frac{1^2}{3}\left(\frac{2}{e} - \frac{1}{e}\right)\pi$$

Κατα τα γνωστά (ολοκλήρωση κατα μέρη) έχουμε ότι

$$\int \ln^2 x\, dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + c$$

και αρα

$$V = \pi[x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x]_{\frac{1}{e}}^{1} - \frac{\pi}{3e} = \cdots = \pi\left(2 - \frac{5}{e} - \frac{1}{3e}\right) \; κ.μ.$$

10. Είναι

$$\int \frac{x^{2017}}{(x+1)^{2019}} dx \quad = \quad \int \frac{x^{2017}}{(x+1)^{2017}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} dx = \int \left(\frac{x}{x+1}\right)^{2017} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} dx$$

Παρατηρούμε ότι $\left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{1}{(x+1)^2}$ και αρα

$$\int \frac{x^{2017}}{(x+1)^{2019}} dx = \int \left(\frac{x}{x+1}\right)^{2017} d\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{1}{2017}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{2018} + c$$

Διαφορετικά, με τη διαδικασία των μετασχηματισμών, θα έπρεπε π.χ. να θέσουμε $\frac{x}{x+1} := u$.

Από το βιβλίο