Ενδεικτικές Λύσεις

Δειγματικού Β/Μέρος Α

Οι παρακάτω ασκήσεις έχουν λυθεί σύμφωνα με την ύλη του Νέου Αναλυτικού προγράμματος και τις συνέπειες αυτού. Σε κάθε λύση γίνεται αναφορά στα αποτελέσματα που έχουν χρησιμοποιηθεί.

Οι λύσεις αυτές δεν συμβαδίζουν κατ᾽ανάγη με τις οδηγίες λύσης του ΥΠΠ.

Σκοπός των λύσεων είναι ο έλεγχος των γνώσεων του εξεταζομένου.

Για σχόλια/παρατηρήσεις:

Ιωακείμ Ι.

yiannisioa@hotmail.com

/yiannisioak

Μέρος Α- Λύσεις

1. Αν $\alpha = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{2(1-\sigma\upsilon\nu x)}$, να υπολογίσετε το

$$\int_0^{\alpha}(x^2+e^{5x})\,dx$$

Λύση
Είναι

$$\alpha = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2(1-\sigma\upsilon\nu x)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\sigma\upsilon\nu x}$$
$$\lim_{x\to 0}x^2 = 0, \qquad \lim_{x\to 0}(1-\sigma\upsilon\nu x) = 1-1 = 0$$

και αρα το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\sigma\upsilon\nu x}$ αποτελεί απροσδιοριστία τύπου $\frac{0}{0}$. Είναι

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2)'}{(1-\sigma\upsilon\nu x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{\eta\mu x}$$

το οποίο αποτελεί απροσδιοριστία τύπου $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2x)'}{(\eta\mu x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu 0} = 2$$

Συνεπώς, από τον κανόνα του L'Hôspital:

$$2 = \lim_{x\to 0}\frac{(x^2)''}{(1-\sigma\upsilon\nu x)''} = \lim_{x\to 0}\frac{(x^2)'}{(1-\sigma\upsilon\nu x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\sigma\upsilon\nu x}$$

Συνεπώς, $\alpha = 1$ και

$$\int_0^{\alpha}(x^2+e^{5x})\,dx = \int_0^{1}(x^2+e^{5x})\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+\frac{1}{5}e^{5x}\right]_0^1 = \frac{1}{3}+\frac{e^5}{5}-\frac{1}{5} = \frac{2}{15}+\frac{e^5}{5}$$

2. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-4x+2y=c$, όπου c σταθερά.

(α) Να βρείτε την **ελάχιστη** ακέραια τιμή της σταθεράς c για την οποία η πιο πάνω εξίσωση αναπαριστά *κύκλο*. Για την τιμή αυτή να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου που προκύπτει.

(β) Να γράψετε την παραμετρική εξίσωση του κύκλου που προκύπτει στο πιο πάνω ερώτημα.

Λύση
(α) 1ος τρόπος
Είναι $a=-4, \beta=2, \gamma=-c$. Έχουμε $a^2+\beta^2-4\gamma = 16+4-4(-c) = 20+4c$ και αρα η εξίσωση αυτή εκφράζει κύκλο αν $20+4c>0$ δηλ. ισοδύναμα αν $c>-5$. Έτσι, η ελάχιστη ακέραια τιμή της σταθεράς c για την οποία η πιο πάνω εξίσωση αναπαριστά *κύκλο* είναι η $c=-4$. Ο δε κύκλος (για $c=-4$) έχει κέντρο το σημείο $K\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)\equiv K(2,-1)$ και ακτίνα

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c} = \frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$$

2ος τρόπος
Είναι

$$x^2+y^2-4x+2y-c=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x^2-4x+4)+(y^2+2y+1)-c-5=0$$
$$\Leftrightarrow\quad (x-2)^2+(y+1)^2 = c+5$$

και άρα, για να εκφράζει κύκλο, θα πρέπει $c>-5$, με κέντρο το σημείο $K(2,-1)$ και ακτίνα $R=\sqrt{c+5}$. Έτσι, η ελάχιστη ακέραια τιμή της σταθεράς c για την οποία η πιο πάνω εξίσωση αναπαριστά *κύκλο* είναι η $c=-4$. Ο δε κύκλος (για $c=-4$) έχει κέντρο το σημείο $K(2,-1)$ και ακτίνα $R=\sqrt{-4+5}=\sqrt{1}=1$.

Ιωακείμ Ι. 99 844998

(β) Παραμετρικές εξισώσεις του κύκλου αυτού: $\begin{cases} x = x(t) = συν(t) + 2 \\ \\ y = y(t) = ημ(t) - 1 \end{cases}, t \in [0,2\pi)$

3. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $3\alpha x^2 + 2\beta x = \alpha + \beta$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0,1)$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - (\alpha + \beta)x$. Είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,1)$ και $f(0) = 0 = f(1)$. Συνεπώς από το Θεώρημα του Rolle, θα έχουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας $c \in (0,1)$ τέτοιος ώστε $0 = f'(c)$. Αλλά,

$$f'(c) = 0 \Leftrightarrow 3\alpha c^2 + 2\beta c - (\alpha + \beta) = 0 \Leftrightarrow 3\alpha c^2 + 2\beta c = \alpha + \beta$$

και το ζητούμενο έπεται.

4. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 - 2x - 5, x \in [-2,3]$. Να βρεθούν τα ακρότατα (τοπικά και ολικά) της συνάρτησης και να χαρακτηριστεί το είδος τους. Επίσης, να δείξετε ότι επαληθεύεται το Θεώρημα Μέσης τιμής στο εν λόγω διάστημα, να ευρεθεί το σημείο που ικανοποιεί το Θεώρημα αυτό και να δωθεί Γεωμετρική ερμηνεία αυτού.

Λύση

Είναι $f(x) = (x-1)^2 - 6, x \in [-2,3]$ και αρα το γράφημα της συνάρτησης εκφράζει παραβολή με κορυφή στο σημείο $(1,-6)$ στο οποίο λαμβάνει τοπικό μέγιστο.. Επίσης, $f(-2) = 3$ και $f(3) = -2$. Έτσι, αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής, το ολικό της μέγιστο είναι το 3 ενώ το ολικό της ελάχιστο το -6 (και τοπικό μέγιστο το -2).

Σημείωση: Το σημείο $(1,-6)$είναι και σημείο ολικού ελαχίστου αφου η συνάρτηση είναι κυρτή.

Η f είναι συνεχής στο $[-2,3]$ και παραγωγίσιμη στο $(-2,3)$ ως πολυωνυμική. Έτσι, από το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού, θα υπάρχει $c \in (-2,3)$ τέτοιος ώστε

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(-2)}{3 - (-2)}$$

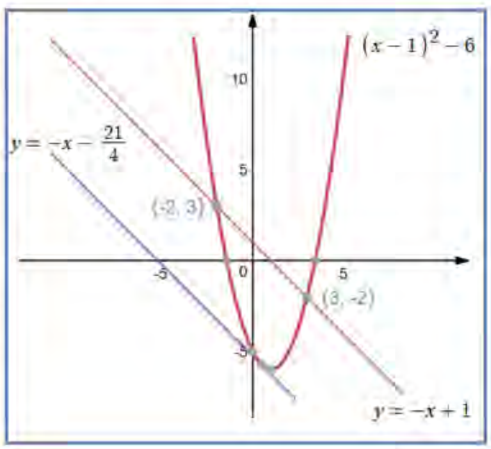
δηλ. $f'(c) = -1$. Έχουμε

$$f'(c) = -1 \Leftrightarrow 2c - 2 = -1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$$

Γεωμετρική ερμηνεία

Στο σημείο $c = \frac{1}{2} \in (-2,3)$, ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής ισούται με το μέσο ρυθμό μεταβολής σε όλο το διάστημα $(-2,3)$. Δηλ. στο οποίο η εφαπτομένη στο σημείο αυτό είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία -2 και 3.

Σημείωση: Είναι $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ και $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{23}{4}$ και η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $\left(\frac{1}{2}, -\frac{23}{4}\right)$ είναι η $y = -x - \frac{21}{4}$ και η οποία είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία -2 και 3 και το οποίο έχει εξίσωση $y = -x + 1$.



5. Αν A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με

$$2P(A') = P(A) \qquad 6P(B) = 1 + P(A') \qquad P(A \cap B) = \frac{1}{9},$$

να υπολογίσετε τις πιθανότητες:

(α) $P(A \cup B)$, (β) $P(A|B)$ και (γ) $P(A \cap B')$

Λύση

(α) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Αλλά,

$$2P(A') = P(A) \Rightarrow 2(1 - P(A)) = P(A) \Rightarrow P(A) = \frac{2}{3}$$

και $P(A') = 1 - P(A) = \frac{1}{3}$

και

$$6P(B) = 1 + P(A') = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow P(B) = \frac{2}{9}$$

Συνεπώς,

$$P(A \cup B) = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} - \frac{1}{9} = \frac{2}{3} + \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$$

(β) Είναι

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{2}{9}} = \frac{1}{2}$$

(γ) Είναι

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

6. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 8x$ και τα σημεία $A(2t^2, 4t)$ και $B(2\rho^2, 4\rho)$ αυτής $(t \neq \rho)$. Αν η χορδή ΑΒ περνά από το σημείο Γ(5,2),
(α) να δείξετε ότι: $2t\rho + 5 = t + \rho$
(β) να βρείτε την εξίσωση του σχήματος στο οποίο ανήκει ο Γ.Τ. του μέσου της χορδής.

Λύση
(α) Βρίσκουμε την εξίσωση της ευθείας AB:

$$\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2}{t + \rho}$$

και αρα

$$(AB): y - y_B = \lambda_{AB}(x - x_B) \Leftrightarrow (AB): y - 4\rho = \frac{2}{t + \rho}(x - 2\rho^2) \Leftrightarrow (AB): (t + \rho)y - 2x - 4\rho t = 0$$

Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες του σημείου $\Gamma(5,2)$ στην εξίσωση αυτή, προκύπτει το ζητούμενο.
(β) Έχουμε:

$$x_M = x = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{x_A + x_B}{2} = t^2 + \rho^2$$

και

$$y_M = y = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{y_A + y_B}{2} = 2(t + \rho)$$

Έτσι,

$$\begin{cases} y = 2(t + \rho) \\ x = t^2 + \rho^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4(t + \rho)^2 = 4(t^2 + \rho^2 + 2\rho t) \\ x = t^2 + \rho^2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{y^2}{4} = x + 2t\rho$$

Αλλά, είδαμε ότι $2t\rho + 5 = t + \rho$, δηλ. $2t\rho = (t + \rho) - 5 = \frac{y}{2} - 5$ και από τις 2 αυτές εξισώσεις, λαμβάνουμε ότι η εξίσωση του σχήματος στο οποίο ανήκει ο Γ.Τ. του μέσου της χορδής είναι η

$$\frac{y^2}{4} = x + \frac{y}{2} - 5$$

7. Να βρείτε μια συνάρτηση $f: \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία $f(0) = 0$ και η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1} + \mathrm{e}^x \cdot \eta\mu x$$

Λύση
$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$,

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1} - \mathrm{e}^x \cdot \eta\mu x \Leftrightarrow \int f'(x)dx = \int \frac{dx}{x^2 + x + 1} - \int \mathrm{e}^x \cdot \eta\mu x \, dx$$

Αλλά,

Ιωακείμ Ι. 99 844998

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

το οποίο υπολογίζεται θέτοντας

$$u = \frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2x+1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1)$$

$$\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1)\right)+c_1$$

και

$$\begin{aligned} I = \int e^x \cdot \eta\mu x\, dx &= \int \eta\mu x \cdot (e^x)'\, dx = \eta\mu x \cdot e^x - \int e^x \cdot (\eta\mu x)'\, dx \\ &= \eta\mu x \cdot e^x - \int e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x\, dx = \eta\mu x \cdot e^x - \int (e^x)' \cdot \sigma\upsilon\nu x\, dx \\ &= \eta\mu x \cdot e^x - \left(e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \int e^x \cdot (\sigma\upsilon\nu x)'\, dx\right) \\ &= \eta\mu x \cdot e^x - e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \int e^x \cdot \eta\mu x\, dx = e^x \cdot (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) - I \end{aligned}$$

και αρα

$$I = \frac{e^x}{2} \cdot (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) + c_2$$

Συνεπώς,

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1) + \frac{e^x}{2} \cdot (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) + c, \qquad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

Χρησιμοποιώντας την (αρχική) συνθήκη $f(0) = 0$, έχουμε ότι

$$c = \frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$$

οπόταν

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1) + \frac{e^x}{2} \cdot (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) + \frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{9}, x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$$

8. Αν $\alpha > 1$ και

$$\alpha^2 \int_{-\alpha}^{-1} \frac{1}{x^3}\, dx = \frac{9\alpha^2}{8} - \int_{\alpha}^{\alpha^2} x\, dx$$

να υπολογίσετε την τιμή του α.

Λύση

Καταρχήν, (ουσιαστικά θεωρώντας το μετασχηματισμό $y = \frac{x}{\alpha}$) είναι[1]

$$\int_{\alpha}^{\alpha^2} x\, dx = \alpha \int_{\frac{\alpha}{\alpha}}^{\frac{\alpha^2}{\alpha}} \alpha y\, dy = \alpha^2 \int_1^{\alpha} y\, dy \equiv \alpha^2 \int_1^{\alpha} x\, dx$$

και(ουσιαστικά θεωρώντας το μετασχηματισμό $y = -x$)

$$\int_{-\alpha}^{-1} \frac{1}{x^3} dx = \int_{\alpha}^{1} \frac{1}{x^3} dx = -\int_1^{\alpha} \frac{1}{x^3} dx$$

και αρα

$$\alpha^2 \int_{-\alpha}^{-1} \frac{1}{x^3} dx = \frac{9\alpha^2}{8} + \int_{\alpha}^{\alpha^2} x\, dx \iff -\alpha^2 \int_1^{\alpha} \frac{1}{x^3} dx = \frac{9\alpha^2}{8} - \alpha^2 \int_1^{\alpha} x\, dx$$

[1] Αν f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(cx)\, dx = \frac{1}{c}\int_{c\alpha}^{c\beta} f(x)\, dx$

$$\Leftrightarrow \quad \int_1^\alpha x\,dx - \int_1^\alpha \frac{1}{x^3}dx = \frac{9}{8} \qquad \Leftrightarrow \quad \int_1^\alpha \left(x - \frac{1}{x^3}\right)dx = \frac{9}{8}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x^2}\right]_1^\alpha = \frac{9}{8} \qquad \Leftrightarrow \quad \left[x^2 + \frac{1}{x^2}\right]_1^\alpha = \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} = \frac{17}{4} \qquad \Leftrightarrow \quad 4\alpha^4 - 17\alpha^2 + 4 = 0$$

Θέτω $\alpha^4 = w$ και η πιο πάνω εξίσωση γίνεται

$$4w^2 - 17w + 4 = 0 \Leftrightarrow 4(w-4)(w-1) = 0 \Leftrightarrow w = 1{,}4$$

και αρα $(\alpha^4 = 1) \vee (\alpha^4 = 4)$ η οποία είναι αληθής μόνο για $a = 2$ στο διάστημα $(1, +\infty)$

9. Οι καμπύλες $y = 3\eta\mu x$, $y = 4\sigma\upsilon\nu x$ $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$ τέμνονται στο σημείο Α και συναντούν τον άξονα των x στα Ο και Β αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μικτόγραμμου χωρίου ΟΑΒ.

Λύση

Βρίσκουμε τα σημεία τομής των δύο καμπύλων:

$$3\eta\mu x = 4\sigma\upsilon\nu x \ \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{4}{3}\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \frac{4}{3}\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow x = \tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{4}{3}\right)$$

$\mathrm{B} = \frac{\pi}{2}$

Συνεπώς,

$$\mathrm{E(OAB)} = \int_0^{\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{4}{3}\right)} 3\eta\mu x\,dx + \int_{\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{4}{3}\right)}^{\frac{\pi}{2}} 4\sigma\upsilon\nu x\,dx = -3[\sigma\upsilon\nu x]_0^{\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{4}{3}\right)} + 4[\eta\mu x]_{\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{4}{3}\right)}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -3\left[\sigma\upsilon\nu\left(\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{4}{3}\right)\right) - \sigma\upsilon\nu 0\right] + 4\left[\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) - \eta\mu\left(\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{4}{3}\right)\right)\right]$$

$$= -3\left[\frac{3}{5} - 1\right] + 4\left[1 - \frac{4}{5}\right] = \frac{6}{5} + \frac{4}{5} = 2\ \tau.\mu$$

αφού

$$x = \tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{4}{3}\right) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi^2 x = \frac{16}{9} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{16}{9} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{9}{16}\eta\mu^2 x$$

Αλλά,

$$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1, \delta\eta\lambda.\ \eta\mu^2 x = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x$$

και αρα

$$\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{9}{16}\eta\mu^2 x = \frac{9}{16}(1 - \sigma\upsilon\nu^2 x) \Leftrightarrow \frac{25}{16}\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{9}{16} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{3}{5}$$

$\left(\text{αφού} 0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

και ομοίως,

$$\eta\mu\left(\tau o\xi\varepsilon\varphi\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \frac{4}{5}$$

10. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$. Η εφαπτομένη της στο σημείο Ρ(1,2) τέμνει τον άξονα των y στο σημείο Α. Αν Ο είναι η αρχή των αξόνων, να υπολογίσετε:

i) το εμβαδόν του μικτόγραμμου χωρίου ΟΡΑ

ii) τον όγκο του στερεού που παράγει το μικτόγραμμο χωρίο ΟΡΑ, όταν περιστραφεί γύρω από τον άξονα Οy.

Λύση

Έστω η παραβολή $y^2 = 4x$. Παραγωγίζουμε πεπλεγμένα: για $y \neq 0$,

$$y^2 = 4x \Leftrightarrow 2yy' = 4 \Leftrightarrow y' = \frac{2}{y}$$

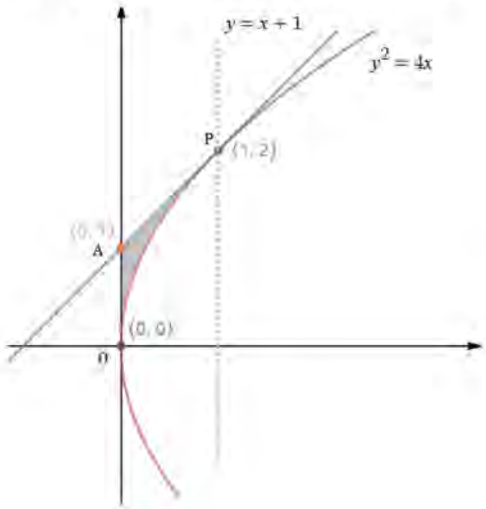
Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο Ρ(1,2) έχει κλίση $\lambda = y'(1) = \frac{2}{y}\Big|_{\mathrm{P}(1,2)} = \frac{2}{2} = 1$ και έτσι, η εξίσωση (της εφαπτομένης) είναι $y - 2 = x - 1$, δηλ. $y = x + 1$. Το σημείο Α τομής της ευθείας αυτής με τον άξονα

των y είναι το Α(0,1). Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν του μικτόγραμμου χωρίου ΟΡΑ μπορούμε να σκεφτούμε το χωρίο αυτό με 2 διαφορετικούς τρόπους:
ως τη διαφορά του χωρίου που περικλείεται κάτω από το γράφημα της εφαπτομένης με άκρα τα σημεία Α και Ρ και του γραφήματος της καμπύλης $y = 2\sqrt{x}$ στα ίδια άκρα:

$$E\mu\beta\alpha\delta\acute{o}\nu = \int_0^1 \left(x + 1 - 2\sqrt{x}\right) dx = \frac{1}{6}$$

ή χωρίζοντάς το σε 2 διαφορετικά χωρία και υπολογίζοντας τα εμβαδά με διαμερίσεις ως προς τον άξονα των τεταγμένων:

$$E = E_1 + E_2 = \int_0^1 \left(\frac{y^2}{4} - 0\right) dy + \int_1^2 \left(\frac{y^2}{4} - (y-1)\right) dy = \int_0^1 \frac{y^2}{4} dy + \int_1^2 \left(\frac{y^2}{4} - y + 1\right) dy = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$



Τώρα, θα βρούμε τον όγκο του στερεού που παράγει το μικτόγραμμο χωρίο ΟΡΑ, όταν περιστραφεί γύρω από τον άξονα Oy. Όπως και στο δεύτερο τρόπο, χωρίζουμε το χωρίο ΟΡΑ σε 2 διαφορετικά χωρία και έτσι

$$V(\mathrm{OPA}) = \pi \int_0^1 \left(\frac{y^2}{4}\right)^2 dy + \pi \int_1^2 \left[\left(\frac{y^2}{4}\right)^2 - (y-1)^2\right] dy = \pi \int_0^2 \left(\frac{y^2}{4}\right)^2 dy - \pi \int_1^2 (y-1)^2\, dy$$

$$= \frac{\pi}{16} \cdot \frac{32}{5} - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{15}$$