

Ενδεικτικές Λύσεις

Δειγματικού Α/Μέρος Α



Οι παρακάτω ασκήσεις έχουν λυθεί σύμφωνα με την ύλη του Νέου Αναλυτικού προγράμματος και τις συνέπειες αυτού. Σε κάθε λύση γίνεται αναφορά στα αποτελέσματα που έχουν χρησιμοποιηθεί.

Οι λύσεις αυτές δεν συμβαδίζουν κατ'ανάγκη με τις οδηγίες λύσης του ΥΠΠ.

Σκοπός των λύσεων είναι ο έλεγχος των γνώσεων του εξεταζομένου.

Για σχόλια/παρατηρήσεις:

Ιωακείμ Ι.



yiannisioa@hotmail.com



/yiannisioak

Μαθηματικά 8-2019-1ο Δειγματικό για τις Εισαγωγικές Εξετάσεις

Μέρος Α

1. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \text{τοξημ}\left(\frac{x}{2}\right)$. Να βρείτε την f' , όπου αυτή ορίζεται.
2. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 16y = -32$.
(α) Αφού δείξετε ότι η πιο πάνω εξίσωση αναπαριστά κύκλο, να προσδιορίσετε την ακτίνα και το κέντρο του.
(β) Έστω ο κύκλος που καθορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις
$$\begin{cases} x = x(t) = 5\sqrt{2}\sin(t) + 9 \\ y = y(t) = 5\sqrt{2}\eta\mu(t) - 1 \end{cases}, t \in [0, 2\pi)$$
Να δείξετε ότι οι δυο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά και να βρεθεί το σημείο επαφής τους.
3. Θεωρούμε μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(1) = 0$ και $f'(x) = \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty)$. Αποδείξτε ότι $f(x) \leq x - 1, x \in (0, +\infty)$.
4. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = -x^2 + 2x + 8, x \in [0, 4]$. Να βρεθεί το πεδίο τιμών της. Επίσης, να δείξετε ότι επαληθεύεται το Θεώρημα Μέσης τιμής στο εν λόγω διάστημα, να ευρεθεί το σημείο που ικανοποιεί το Θεώρημα αυτό και να δωθεί Γεωμετρική ερμηνεία αυτού.
5. (α) Αν A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με
$$P(B) = \frac{1}{4} \qquad P(A|B) = \frac{1}{6} \qquad P(A \cup B) = \frac{3}{8}$$
Να ελέγξετε κατά πόσον αυτά είναι ανεξάρτητα.
(β) Να υπολογίσετε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης ΑΡΑΚΑΣ. Πόσοι από αυτούς αρχίζουν με το Γράμμα Α και τελειώνουν με διαφορετικό γράμμα από το Α;
6. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4ax, a > 0$ και τα σημεία $A(at^2, 2at)$ και $B(ap^2, 2ap)$ αυτής ($t \neq p$). Να βρείτε την εξίσωση της χορδής AB .
7. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια δις παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία $f'(0) = 4, f(0) = 1$ και η οποία ικανοποιεί τη σχέση
$$f''(x) - 2f'(x) - 8f(x) = 0.$$
(α) Αν $h(x) = f'(x) + 2f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι $h'(x) - 4h(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
(β) Να προσδιορίσετε την f .
(γ) Να υπολογίσετε το $\sum_{k=0}^{\infty} f(-4k)$
8. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 - \eta\mu^2 x}}, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$
(α) Να βρείτε τα ακρότατα της f και να προσδιορίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.
(β) Να αποδείξετε ότι
$$\frac{\pi\sqrt{2}}{4} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \leq \frac{\pi}{2}$$
9. Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται όταν το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη με εξίσωση $y = \ln\left(\frac{1}{x}\right), x > 0$, την εφαπτομένη της καμπύλης αυτής στο σημείο της με $x = \frac{1}{e}$ και τον άξονα των τετμημένων περιστραφεί πλήρως γύρω από τον άξονα των τετμημένων.
10. Να υπολογίσετε το
$$\int \frac{x^{2017}}{(x+1)^{2019}} dx$$

Προτεινόμενες Λύσεις

1. Εύρεση του π.ο. της συνάρτησης (στο οποίο αυτή αντιστρέφεται) $f(x) = \text{τοξημ}\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\frac{x}{2} \in [-1,1] \Leftrightarrow -1 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$$

και αρα

$$y = \text{τοξημ}\left(\frac{x}{2}\right), \quad x \in [-2,2] \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \eta\mu y, \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Εύρεση της παραγώγου συνάρτησης

Ξέρουμε, από τη Θεωρία, ότι η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του συνόλου του π.ο. της, δηλ. στο $(-2,2)$ και (παραγωγίζοντας πεπλεγμένα) $\forall x \in (-2,2)$

$$\frac{x}{2} = \eta\mu y \Leftrightarrow \frac{1}{2} = y' \cdot \sigma\upsilon\nu y \Leftrightarrow y' = \frac{1}{2\sigma\upsilon\nu y}$$

(είναι $\sigma\upsilon\nu y \neq 0, \forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$). Αλλά,

$$\sigma\upsilon\nu^2 y + \eta\mu^2 y = 1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2 y = 1 - \eta\mu^2 y$$

και αφού $\sigma\upsilon\nu y > 0, \forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, η πιο πάνω δίνει

$$\sigma\upsilon\nu y = \sqrt{1 - \eta\mu^2 y} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$$

Συνεπώς, από τα πιο πάνω,

$$y' = \frac{1}{2\sigma\upsilon\nu y} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}, \quad x \in (-2,2)$$

2. (α) Είναι

$$x^2 + y^2 - 16y = -32 \Leftrightarrow x^2 + (y - 8)^2 = 32$$

και αρα το γράφημα της καμπύλης που περιγράφεται από την πιο πάνω εξίσωση αναπαριστά κύκλο με κέντρο το σημείο $K_1 = (0,8)$ και ακτίνα $R_1 = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

(β) Έχουμε

$$\begin{cases} x = x(t) = 5\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu(t) + 9 \\ y = y(t) = 5\sqrt{2}\eta\mu(t) - 1 \end{cases}, t \in [0,2\pi) \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) - 9 = 5\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu(t) \\ y(t) + 1 = 5\sqrt{2}\eta\mu(t) \end{cases}, t \in [0,2\pi)$$

και αρα το γράφημα της καμπύλης που περιγράφεται από το πιο πάνω ζεύγος παραμετρικών εξισώσεων αναπαριστά κύκλο με κέντρο το σημείο $K_2 = (-9,1)$ και ακτίνα $R_2 = 5\sqrt{2}$. Τώρα,

$$d(K_1, K_2) = \sqrt{(-9-0)^2 + (1-8)^2} = 9\sqrt{2}$$

και $R_1 + R_2 = 9\sqrt{2}$. Δηλ. η διάκεντρος των 2 κύκλων είναι ίση με την απόσταση των κέντρων τους, άρα αυτοί εφάπτονται εξωτερικά. Θα βρούμε το σημείο επαφής, λύνοντας σύστημα των δυο εξισώσεων:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 16y = -32 \\ (x+9)^2 + (y+1)^2 = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 16y = -32 \\ x^2 + y^2 + 2y - 18x = -32 \end{cases} \Leftrightarrow -16y = 2y - 18x \Leftrightarrow x = y$$

Αντικαθιστώντας (π.χ. στην 1η) έχουμε

$$\Leftrightarrow x^2 + x^2 - 16x + 32 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

Άρα το σημείο επαφής τους είναι το $(4,4)$.

3. Έστω $x > 1$. Από το ΘΜΤ, θα έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (1,x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$. Αλλά,

$$\frac{f(x) - \overset{=0}{f(1)}}{x-1} = \frac{f(x)}{x-1}$$

και αφού από υπόθεση είναι $f'(\xi) = \frac{1}{\xi}$, θα έχουμε ότι

$$\frac{f(x)}{x-1} = \frac{1}{\xi}$$

Όμως, $\xi \in (1, x) \Rightarrow \frac{1}{\xi} < 1$ και άρα $\frac{f(x)}{x-1} < 1$, δηλ. $f(x) < x - 1$. Ομοίως και στην περίπτωση που $0 < x < 1$. Για $x = 1$ ισχύει η ισότητα. Συνεπώς, $f(x) \leq x - 1, x \in (0, +\infty)$.

4. Η μελέτη της συνάρτησης θα δωθεί με ύλη Β Λυκείου. Η εναλλακτική είναι με χρήση εργαλείων του Δ.Λ. Κατ'αρχάς, αφού η f είναι συνεχής ορισμένη σε κλειστό διάστημα, από το **Θεώρημα Μέγιστης/Ελάχιστης Τιμής**, αυτή θα παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή f_{max} και f_{min} αντίστοιχα και μάλιστα το πεδίο τιμών της είναι το (κλειστό) διάστημα $[f_{min}, f_{max}]$. Έχουμε:

$$f(x) = -x^2 + 2x + 8 = -(x-1)^2 + 9, \quad x \in [0,4]$$

και άρα η συνάρτηση έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο με $x = 1$, την τιμή $f(1) = 9$. Επίσης, $f(0) = 8$ και $f(4) = 0$. Συνεπώς, ως συνέπεια του ίδιου θεωρήματος, έχουμε $f_{min} = 0$ και $f_{max} = 9$, δηλ. το πεδίο τιμών της είναι το (κλειστό) διάστημα $[0,9]$.

Τώρα, ως πολυωνυμική, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,4]$ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του, άρα από το ΘΜΤ του Δ.Λ. έχουμε ότι υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $\xi \in (0,4)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0}, \quad \text{δηλ. } f'(\xi) = -2$$

Αλλά, $f'(x) = -2x + 2, \forall x \in [0,4]$ και άρα

$$f'(\xi) = -2 \Leftrightarrow -2\xi + 2 = -2 \Leftrightarrow \xi = 2$$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι η εφαπτομένη του γραφήματος της συνάρτησης στο σημείο με $x = 2$ είναι παράλληλη με την ευθεία που περνά από τα άκρα του διαστήματος του π.ο. της.

5. (α) Τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Θα υπολογίσουμε τις $P(A)$ και $P(A \cap B)$:

$$P(A|B) = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{24}$$

$$P(A \cup B) = \frac{3}{8} \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} \Leftrightarrow P(A) + \frac{1}{4} - \frac{1}{24} = \frac{3}{8} \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{6}$$

Άρα,

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24} = P(A \cap B)$$

και άρα τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα.

- (β) Το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης ΑΡΑΚΑΣ είναι

$$\frac{6!}{3!} = 120$$

Θα βρούμε πόσοι από αυτούς αρχίζουν με το Γράμμα Α και τελειώνουν με διαφορετικό γράμμα από το Α.

Βήμα 1: επιλογή του πρώτου γράμματος $\rightarrow$ 1 τρόπος (το ψηφίο Α)

Βήμα 2: επιλογή των 4 ενδιάμεσων γραμμάτων $\rightarrow$ πλήθος αναγραμματισμών των Α,Α,Κ,Σ $\frac{4!}{2!} = 12$ τρόποι

Βήμα 2: επιλογή τελευταίου γράμματος $\rightarrow$ 1 από τα Ρ,Κ,Σ 3 τρόποι.

Από την **Πολλαπλασιαστική αρχή**, το ζητούμενο πλήθος είναι ίσο με

$$1 \cdot 12 \cdot 3 = 36$$

6. $y^2 = 4ax, a > 0$ και τα σημεία $A(at^2, 2at)$ και $B(a\rho^2, 2a\rho)$ αυτής ($t \neq \rho$)

Βρίσκουμε την κλίση της ευθείας AB

Κατ'αρχάς αφού $t \neq \rho$, έπεται ότι η ευθεία δεν είναι παράλληλη με τον άξονα των τεταγμένων

$$\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2a\rho - 2at}{a\rho^2 - at^2} = \frac{2a(\rho - t)}{a(\rho - t)(\rho + t)} = \frac{2}{\rho + t}$$

και άρα

$$(AB): y - y_B = \lambda_{AB}(x - x_B) \Leftrightarrow (AB): y - 2a\rho = \frac{2}{\rho + t}(x - a\rho^2) \Leftrightarrow (AB): (\rho + t)y - 2x = 2a\rho t$$

7. Έχουμε

$$\begin{cases} f''(x) - 2f'(x) - 8f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ f'(0) = 4, f(0) = 1 \end{cases}$$

(α) Είναι $\forall x \in \mathbb{R} h(x) = f'(x) + 2f(x) \Rightarrow h'(x) = f''(x) + 2f'(x)$ και αρα

$$h'(x) - 4h(x) = f''(x) + 2f'(x) - 4f'(x) - 8f(x) = f''(x) - 2f'(x) - 8f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

από υπόθεση.

(β) Είναι $h(0) = f'(0) + 2f(0) = 4 + 2 = 6$. Τώρα, θεωρούμε τη συνάρτηση h με τύπο $u(x) = e^{-4x}h(x)$. Είναι

$$u'(x) = (e^{-4x}h(x))' \Rightarrow u'(x) = -4e^{-4x}h(x) + e^{-4x}h'(x) = e^{-4x} \underbrace{(h'(x) - 4h(x))}_{=0} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

και αρα, από γνωστό μας Πόρισμα, είναι $u(x) = c$ για κάποια πραγματική σταθερά c , δηλ. $e^{-4x}h(x) = c$, δηλ. $h(x) = ce^{4x}, \forall x \in \mathbb{R}$. Αλλά, $h(0) = 6$ και αρα $c = 6$. Συνεπώς,

$$u(x) = 6e^{4x}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Είναι $\forall x \in \mathbb{R}$

$$(e^{2x}f(x))' = 2e^{2x}f(x) + e^{2x}f'(x) = e^{2x}(f'(x) + 2f(x)) = u(x)e^{2x} = 6e^{4x} \cdot e^{2x} = 6e^{6x}$$

Τώρα,

$$(e^{2x}f(x))' = 6e^{6x} \Rightarrow \int (e^{2x}f(x))' dx = 6 \int e^{6x} dx \Rightarrow e^{2x}f(x) = e^{6x} + c \Rightarrow f(x) = e^{4x} + ce^{-2x}$$

Αλλά, $f(0) = 1$ και αρα $c + 1 = 1$, δηλ. $c = 0$. Έτσι,

$$f(x) = e^{4x}, \forall x \in \mathbb{R}$$

(γ) Έχουμε

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(-4k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-16k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{e^{16k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e^{16}}\right)^k$$

Αλλά, $\left|\frac{1}{e^{16}}\right| < 1$ και αρα η πιο πάνω σειρά συγκλίνει και (γεωμετρική σειρά) μάλιστα

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e^{16}}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{e^{16}}} = \frac{e^{16}}{e^{16} - 1}$$

8. (α) Είναι $\eta\mu^2 x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ και αρα η f είναι καλά ορισμένη. Επίσης, στο π.ο. της είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \frac{\eta\mu\chi\sigma\upsilon\eta x}{(2 - \eta\mu^2 x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\eta\mu(2x)}{2(2 - \eta\mu^2 x)^{\frac{3}{2}}}$$

Τα κρίσιμα λοιπόν σημεία της f είναι όλα τα $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ τέτοια ώστε $f'(x) = 0$, δηλ. τα $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ τέτοια ώστε $\eta\mu(2x) = 0$, δηλ. τα $x = 0, \frac{\pi}{2}$. Παρατηρούμε ότι $f'(x) > 0, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και αρα είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό και λόγω της συνέχειας στα άκρα του διαστήματος, είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Συνεπώς,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = f(0) \leq f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad (*)$$

δηλ. $f_{\max} = 1$ και $f_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(β) Η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και αρα κατα Riemann ολοκληρώσιμη στο διάστημα αυτό. Από τη σχέση (*) και τη γνωστή μας ιδιότητα του ολοκληρώματος Riemann, έχουμε ότι

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$$

Αλλά,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} dx = \frac{\sqrt{2}}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \quad \text{και} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

και αρα

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{4} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \leq \frac{\pi}{2}.$$

9. Έχουμε

$$y = \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x, x > 0$$

και για $x > 0$ είναι

$$y'(x) = -\frac{1}{x}$$

Η κλίση της εφαπτομένης της συνάρτησης στο σημείο της με $\left(\frac{1}{e}, -\ln\left(\frac{1}{e}\right)\right) = \left(\frac{1}{e}, -1\right)$ είναι

$$y'\left(\frac{1}{e}\right) = -e$$

και αρα η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο αυτό είναι

$$y - 1 = -e\left(x - \frac{1}{e}\right) \quad M\left(\frac{1}{e}, -1\right), \quad A\left(\frac{1}{e}, 0\right)$$

δηλ. η

$$y = 2 - ex$$

Η ευθεία αυτή τέμνει τον άξονα των τετμημένων (βάζουμε $y = 0$) στο σημείο $B\left(\frac{2}{e}, 0\right)$. Έτσι,

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_{\frac{1}{e}}^1 y^2 dx - \frac{(AM)^2 \cdot (AB)}{3} \pi = \pi \int_{\frac{1}{e}}^1 \ln^2 x dx - \frac{1^2 \left(\frac{2}{e} - \frac{1}{e}\right)}{3} \pi$$

Κατα τα γνωστά (ολοκλήρωση κατα μέρη) έχουμε ότι

$$\int \ln^2 x dx = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + c$$

και αρα

$$V = \pi [x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x]_{\frac{1}{e}}^1 - \frac{\pi}{3e} = \dots = \pi \left(2 - \frac{5}{e} - \frac{1}{3e}\right) \text{ κ.μ.}$$

10. Είναι

$$\int \frac{x^{2017}}{(x+1)^{2019}} dx = \int \frac{x^{2017}}{(x+1)^{2017}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} dx = \int \left(\frac{x}{x+1}\right)^{2017} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} dx$$

Παρατηρούμε ότι $\left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{1}{(x+1)^2}$ και αρα

$$\int \frac{x^{2017}}{(x+1)^{2019}} dx = \int \left(\frac{x}{x+1}\right)^{2017} d\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{1}{2017} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{2018} + c$$

Διαφορετικά, με τη διαδικασία των μετασχηματισμών, θα έπρεπε π.χ. να θέσουμε $\frac{x}{x+1} := u$.