Δειγματικό εξεταστικό διαγώνισμα

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^2 (3x^2 - x)dx$

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $y = \dfrac{\ln x}{x-2}$

3. Η συνάρτηση $y = x^3 + (2\lambda - 1)x^2 + 4(\mu - 1)x + 2$ έχει σημείο καμπής στο Α (1, 4). Να βρείτε τις τιμές των λ και μ.

4. Δίνεται η λέξη ΠΙΝΑΚΑΣ
   α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.
   β) Να βρείτε πόσοι από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς έχουν τα σύμφωνα και τα φωνήεντα εναλλάξ.

5. Από τους μαθητές ενός σχολείου το 80% μαθαίνει Αγγλικά, το 35% Γαλλικά και το 25% και τις δύο γλώσσες. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Να βρείτε την πιθανότητα:
   α) να μαθαίνει μόνο Αγγλικά
   β) να μην μαθαίνει καμιά από τις δύο γλώσσες.
   γ) να μαθαίνει Αγγλικά δεδομένου ότι μαθαίνει Γαλλικά

6. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται της ευθείας $2x + y = 3$ στο σημείο Α(1,1) και έχει το κέντρο του στην ευθεία $x + 3y = 9$.

7. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ που αποκόπτει από τους θετικούς ημιάξονες ίσα τμήματα.

8. α) Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.
   β) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0,+\infty) \to R$ για την οποία ισχύει: $f^3(x) + x^3 = 3xf(x)$ για κάθε $x>0$. Αν η $f(x)$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0>0$ να αποδείξετε ότι $f(x_0) = x_0^2$ και να βρείτε την τιμή του x_0.

9. Το χωρίο που περικλείεται μεταξύ της $y = \kappa x^2 + 1$, $\kappa>0$ και της ευθείας $y = 2$ περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία $y = 2$. Να βρείτε την τιμή του κ έτσι ώστε ο όγκος του στερεού που παράγεται να είναι ίσος με $\dfrac{16\pi}{15}$.

10. α) Να δείξετε με την χρήση του ορισμού ότι η συνάρτηση με τύπο $g(x) = 2x + e^x$ είναι γνησίως αύξουσα.
    β) Αν $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$, $\alpha<\beta$ είναι τα σημεία στα οποία η ευθεία $y = x + 3$ τέμνει την γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 + e^x$ να δείξετε ότι εφαρμόζεται το θεώρημα μέσης τιμής στο $[\alpha, \beta]$
    γ) Να δείξετε ότι $\alpha.\beta<0$

<u>Μ ΕΡΟΣ Β:</u> Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1.Δίνεται η συνάρτηση $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x^2-2x}$

Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα σημεία τομής της με τους άξονες, τα τοπικά ακρότατα της και τις ασύμπτωτες να την παραστήσετε γραφικά.

Το εμβαδόν Ε που περικλείεται από την καμπύλη $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x^2-2x}$, τον άξονα των x και τις ευθείες x και

$x=\alpha$ και $x=\alpha+1$ με $\alpha\rangle 2$ είναι ίσο με $E=1+\ln\dfrac{3}{2}$. Να βρείτε την τιμή του α.

2 . Αν μία μέρα του Απρίλη είναι ηλιόλουστη η πιθανότητα να είναι και η αμέσως επόμενη μέρα ηλιόλουστη

είναι $\dfrac{2}{3}$, ενώ αν είναι βροχερή η πιθανότητα να είναι και η επόμενη μέρα βροχερή είναι $\dfrac{3}{4}$.

α) Στις 10 Απριλίου ο καιρός είναι ηλιόλουστος. Να βρείτε την πιθανότητα να είναι ηλιόλουστη μέρα στις 12 Απριλίου.

β) Αν στις 12 Απριλίου η μέρα ήταν ηλιόλουστη να βρείτε την πιθανότητα να ήταν ηλιόλουστη και στις 11 του Απρίλη.

3.α) Με βάση τον ορισμό της παραβολής να δείξετε ότι η παραβολή με εστία $E(1,0)$ και διευθετούσα την ευθεία $x=-1$ είναι η $y^2=4x$.

Δίνεται η παραβολή $y^2=4x$.

Τα σημεία $P(\rho^2,2\rho)$ και $T(t^2,2t)$ ορίζουν εστιακή χορδή. Οι εφαπτομένες της παραβολής στα σημεία P και T τέμνονται στο Σ.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση της χορδής PT είναι $2x-(\rho+t)y+2\rho t=0$

γ) Να δείξετε ότι $\rho.t=1$

δ) Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης πάνω στην οποία βρίσκεται ο τόπος του κέντρου βάρους του τριγώνου ΡΣΤ και να χαρακτηρίσετε το είδος της καμπύλης.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ με τύπο $f(x)=\ln\left(\dfrac{e^x+e}{e^x+1}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)+f(1-x)=1$ για κάθε $x\in R$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $I=\int_0^1 f(x)dx$

5.Ένα σημείο Μ κινείται σε ημικύκλιο ακτίνας R και κέντρου Ο. Η κάθετη από το Μ στην διάμετρο ΑΒ, τέμνει την ΑΒ στο σημείο Ν. Να βρείτε την μέγιστη τιμή του ΜΝ+ΝΒ.