

ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ ΓΙΑ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΛΥΚΕΙΟ ΣΟΛΕΑΣ

ΔΟΚΙΜΙΟ 1

ΜΑΙΟΣ 2019

ΜΕΡΟΣ Α: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1) Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(ax)}{2e^{-x} - 2} = 4$, να βρείτε τη τιμή $\alpha \in \mathbb{R}$.

2) Δίνεται η σειρά: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$

α) Να δείξετε ότι ο γενικός όρος της πιο πάνω σειράς είναι ο

$$\alpha_n = \frac{1}{n \cdot (n+1)}, n \in \mathbb{N}.$$

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα της πιο πάνω σειράς.

3) Δίνονται δύο ενδεχόμενα A και B ενός πειράματος τύχης με $P(A) = \frac{2}{7}$, $P(B) = \frac{2}{3}$ και $P(A \cap B) = \frac{4}{21}$.

α) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες:

i) $P(B)$,

ii) $P(A' \cap B)$

iii) $P(A \cup B')$,

iv) $P(A' \cap B')$

β) Να αναφέρετε πότε δύο ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα και να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα

4) α) Να δώσετε τον ορισμό της πλάγιας ασύμπτωτης.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\kappa x^2 + \lambda x}{x-2}$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία $y = 2x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της C_f να βρείτε τις τιμές των κ και λ .

5) Δίνεται η λέξη «ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑ»

α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.

β) Αν πάρουμε ένα από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς να βρείτε:

A: «την πιθανότητα να περιέχει τη λέξη ΑΝΕΣΗ»

B: «την πιθανότητα να αρχίζει από Ι να τελειώνει σε Ι και να έχει όλα τα σύμφωνα συνεχόμενα»

6) α) Να αποδείξετε ότι $e^x \geq x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^2 e^{x^2} \geq 6, \forall x \in \mathbb{R}$.

7) Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 4\lambda x - 2\lambda y - 9 = 0$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει κύκλο $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων που παριστάνει η εξίσωση πιο πάνω ανήκουν σε ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση .

8) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x, x > 0$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της $f(x)$ στο σημείο της $A(e^2, f(e^2))$ είναι $e^2 y = e^2 + x \quad (\varepsilon_1)$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου T που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της C_f , την (ε_1) και τους άξονες xx' και yy' .

9) Η ευθεία $y = \lambda x - 2\lambda$ τέμνει την παραβολή $y^2 = 12x$ στα σημεία A και B. Να βρείτε την εξίσωση του γεωμετρικού τόπου του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AB καθώς το $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$ μεταβάλλεται .

10) Η συνάρτηση f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο διάστημα $[0,1]$ και τοπικό ακρότατο στο σημείο $A(1,5)$. Αν ισχύει $\int_0^1 4x^3 f''(x^2) dx = 10$ να δείξετε ότι :

α) $f(0) = 10$.

β) υπάρχει $x \in (0,1)$ έτσι ώστε $f'(x) = -5$

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{(x-1)^2}{x^2+2x+1}$.

Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες, διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα και τις ασύμπτωτες, να την παραστήσετε γραφικά.

2. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, και σημείο $P(3\sigmaυν\theta, 2\eta\mu\theta)$ πάνω σε αυτή.

- α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο P είναι $2\sigmaυν\theta \cdot x + 3\eta\mu\theta \cdot y = 6$
- β) Η εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο P τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Γ και Δ.
- γ) Στα σημεία Γ και Δ φέρουμε ευθείες κάθετες στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, που τέμνονται στο σημείο Τ. Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης πάνω στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Τ, καθώς το σημείο P κινείται πάνω στην έλλειψη.
- δ) Αν Κ και Λ είναι τα μέσα των χορδών PA' και PB' αντίστοιχα, όπου τα σημεία A' και B' είναι οι κορυφές της έλλειψης με συντεταγμένες $A'(-3, 0)$ και $B'(0, -2)$, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Ρ ώστε η ευθεία ΚΛ να είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο Ρ.

3. Σε ένα δοχείο Α υπάρχουν 4 κόκκινες μπάλες και 6 γαλάζιες μπάλες και σε ένα δοχείο Β υπάρχουν 3 κόκκινες και 5 γαλάζιες. Ο Γιώργος παίρνει μια μπάλα από το δοχείο Α και την τοποθετεί στο δοχείο Β. Στη συνέχεια παίρνει δύο μπάλες από το δοχείο Β. Να βρείτε :

- 1) Την πιθανότητα η μπάλες που πήρε ο Γιώργος από το δοχείο Β να είναι ίδιου χρώματος.
- 2) Αν γνωρίζουμε ότι η μπάλα που πήρε ο Γιώργος από το δοχείο Β είναι ίδιου χρώματος, ποια είναι η πιθανότητα η μπάλα που πήρε από το δοχείο Α να ήταν γαλάζια.

4. Δίνεται η έλλειψη $C_1: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ και η παραβολή

$$C_2 : y^2 = 4ax, a > 0.$$

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(x_0, y_0)$, όπου $x_0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x - e^x)$ και

$$y_0 = \int_1^e \frac{3 \ln x}{x} dx \text{ ανήκει στην έλλειψη } (C_1).$$

β) Να βρείτε την τιμή του a ώστε η εφαπτομένη της έλλειψης C_1 στο σημείο της $M(x_0, y_0)$, να εφάπτεται και της παραβολής C_2 .

γ) Αν $a = 1$ να υπολογίσετε τον όγκο που παράγεται από την περιστροφή κατά 2π γύρω από τον άξονα των τετμημένων του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις C_1 και C_2 και του άξονα των x .

5. Δίνεται η συνεχής περιττή συνάρτηση $f: [-\alpha, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι $\int_{-\alpha}^{\alpha} xf(x)dx = 2 \int_0^{\alpha} xf(x)dx$.

Στη συνέχεια δίνονται τα ολοκληρώματα

$$A = \int_{-a}^a f(x) \ln(1+e^x) dx \text{ και } B = - \int_{-a}^a f(x) \ln(1+e^{-x}) dx.$$

i. Να δείξετε ότι $A = B$

ii. Να δείξετε ότι $A = \frac{1}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} xf(x)dx$

iii. Με τη βοήθεια των πιο πάνω ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-\pi}^{\pi} \eta \mu 2x \cdot \ln(1+e^x) dx$
