

ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ ΓΙΑ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΛΥΚΕΙΟ ΣΟΛΕΑΣ

ΔΟΚΙΜΙΟ 2

ΜΑΙΟΣ 2019

ΜΕΡΟΣ Α΄

Να απαντήσετε σε όλες τις ερωτήσεις. Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Δίνεται η έλλειψη $5x^2 + 9y^2 = 180$. Να βρείτε:

(α) Τις συντεταγμένες των εστιών της.

(β) Την εκκεντρότητά της.

(γ) Αν $P(6\sin\theta, \sqrt{20}\eta\mu\theta)$ ένα σημείο της έλλειψης, να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της έλλειψης στο σημείο αυτό.

2. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $\int_1^3 f(x)dx = 5$, $\int_1^9 f(x)dx = 3$ και $f(2) = 2, f(5) = 4$.

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

1) $\int_{2019}^{2019} xf(x^{10})dx$

2) $\int_3^9 f(x)dx$

3) $\int_{-3}^{-1} f(-x)dx$

4) $\int_1^3 xf(x^2)dx$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$ στο διάστημα $[-1, 2]$. Να διατυπώσετε το θεώρημα της μέγιστης και ελάχιστης τιμής, να βρείτε τα τοπικά ακρότατα, τα ολικά ακρότατα και το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \mu x^4 + 2(\mu - 3)x^3 + 6\mu x^2 - 3x + 5$, $\mu \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιες τιμές του μ η $f(x)$ είναι κοίλη.

5. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int \frac{\ln x}{(x-2)^3} dx$

6. Δίνονται οι κύκλοι $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 7 = 0$ και $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$

(α) Να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες των δύο κύκλων.

(β) Να δείξετε ότι οι δύο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής τους.

7. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή γύρω από την ευθεία $y = 4$ του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = (x-2)^2$ και την ευθεία $y = 2x - 4$.

8. Δίνεται η συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο διάστημα Δ .

α) Αν $\alpha, \beta \in \Delta$ να αποδείξετε ότι: $f(\alpha) + f(\beta) \geq 2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x \ln x$. Να αποδείξετε ότι $e^e \cdot \pi^\pi > \left(\frac{e + \pi}{2}\right)^{e + \pi}$.

9. Να υπολογίσετε τη σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{2^k}$

10. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0) = 0$ και $f(x) + f'(x) = 2xe^{-x}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να δείξετε ότι $\frac{32}{e^3} \leq \int_2^4 f(x) dx \leq \frac{8}{e^2}$.

ΜΕΡΟΣ Β΄

Να απαντήσετε σε όλες τις ερωτήσεις.

Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$.

Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες, τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα και τις ασύμπτωτες της συνάρτησης, να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

2. Σε ένα συρτάρι έχουμε 5 άσπρες και 4 κίτρινες όμοιες λάμπες.

α) Με πόσους τρόπους μπορούμε να πάρουμε τουλάχιστον 2 λάμπες.

β) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η τοποθέτηση των λαμπών σε τρία διαφορετικά κιβώτια Α, Β και Γ χωρίς περιορισμό.

γ) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η τοποθέτηση των λαμπών σε τρία διαφορετικά κιβώτια Α, Β και Γ αν σε κάθε κιβώτιο πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον μία άσπρη λάμπα.

3. Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 9$.

(α) Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες του κύκλου στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ είναι η

$$x_1x + y_1y = 9$$

(β) Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων του πιο πάνω κύκλου που σχηματίζουν με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ τρίγωνο με ελάχιστο εμβαδόν.

4. (α) Να δώσετε τον ορισμό της παραβολής.

(β) Αν ΑΒ εστιακή χορδή της παραβολής $y^2 = 4ax$ με εστία $E(a, 0)$, $a > 0$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΜΝΒ, όπου Μ και Ν οι προβολές των Α και Β αντίστοιχα πάνω στη διευθετούσα με $AM = 8 \mu$ και $BE = 2 \mu$.

(γ) Αν επιπλέον $A(at^2, 2at)$ και $B(ar^2, 2ar)$ να δείξετε ότι:

(i) $t \cdot r = -1$.

(ii) Η κάθετη στο Α έχει εξίσωση $y + tx = 2at + at^3$.

(iii) Η καμπύλη στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου τομής των καθέτων στα Α και Β έχει εξίσωση $y^2 = ax - 3a^2$.

5. Δίνονται δυο συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $f(x) + f(-x) = g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

α) Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $x = -u$, να αποδείξετε ότι

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = \int_0^{\alpha} g(x) dx.$$

β) Στην συνέχεια, με την βοήθεια των πιο πάνω ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο,

να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\eta \mu^2 x}{1 + 2^x} dx$.

..... ΤΕΛΟΣ