

Σχολική χρονιά: 2009 - 2010

ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: 15/04/2010

ΒΑΘΜΟΣ:

Διάρκεια: 60'

Υπ. Καθ.:

Τμήμα: Γ κατ.

Υπ. Κηδ.:

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

1) Η απόσταση μεταξύ των εστιών μιας έλλειψης είναι 8 μονάδες και η απόσταση μεταξύ των δύο διευθετουσών της 18 μονάδες.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της έλλειψης είναι $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$.

β) Ρ είναι σημείο της έλλειψης και απέχει 5 μονάδες από την μια εστία της. Πόσο πρέπει να απέχει από την άλλη της εστία; (14μ)

2) (α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της ισοσκελούς υπερβολής $xy = c^2$ σε σημείο της $(ct, c/t)$ είναι $t^2 y + x = 2ct$.

(β) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής $xy = 4$ που άγονται από το σημείο $A(3, -4)$ και τα αντίστοιχα σημεία επαφής.

(18μ)

3) Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ και σημείο της $P(3\sin\theta, 2\eta\mu\theta)$. Από την αρχή των αξόνων, Ο, φέρουμε ΟΣ κάθετο στην εφαπτομένη στο Ρ. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος του Σ είναι $(x^2 + y^2)^2 = 9x^2 + 4y^2$.

(20μ)

4) Τα σημεία $A(3p, \frac{3}{p})$ και $B(3t, \frac{3}{t})$ βρίσκονται σε έναν από τους κλάδους της υπερβολής $xy = 9$. Οι εφαπτόμενες της υπερβολής στα σημεία Α και Β τέμνονται στο Γ. Αν η εφαπτόμενη της υπερβολής σε άλλο σημείο $\Delta(3k, \frac{3}{k})$ είναι παράλληλη προς την ΑΒ, να δείξετε ότι:

α) Ο, Γ και Δ είναι συνευθειακά. (Ο η αρχή των αξόνων)

Η κάθετη της παραβολής στο Β τέμνει την καμπύλη και στο σημείο Ε. Αν ΕΤ είναι διάμετρος της καμπύλης,

β) να αποδείξετε ότι το Ε έχει συντεταγμένες $(-\frac{3}{t^3}, -3t^3)$ και, στη συνέχεια,

γ) να βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση του γεωμετρικού τόπου των μέσων των χορδών ΒΤ. (30)

5) Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και η ευθεία (ε) : $y = \lambda x + \gamma$, όπου $\lambda > 0$ και $\gamma > 0$.

α) Αν η ευθεία (ε) είναι εφαπτόμενη της έλλειψης, να δείξετε ότι ισχύει η σχέση $\gamma^2 = \beta^2 + \alpha^2 \lambda^2$.

Η εφαπτόμενη (ε) της έλλειψης τέμνει τους άξονες xx' και yy' στα σημεία A και B αντίστοιχα.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAB συναρτήσει των λ , α και β . (O η αρχή των αξόνων.)

γ) Να αποδείξετε ότι, όταν η κλίση λ μεταβάλλεται, το ελάχιστο εμβαδόν του τριγώνου είναι $\alpha\beta$.

δ) Να βρείτε, συναρτήσει του α , την τετμημένη του σημείου επαφής της έλλειψης και της εφαπτομένης (ε), ώστε το τρίγωνο OAB να έχει ελάχιστο εμβαδόν.

(18μ)