

ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: 02/03/2012

ΒΑΘΜΟΣ:

Διάρκεια: 55΄

Υπ. Καθ.:

Τμήμα: Γ 5 κατ.

Υπ. Κηδ.:

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

1) Δίνεται η έλλειψη $5x^2 + 9y^2 = 180$. Να βρείτε:

α) Τις συντεταγμένες των εστιών της.

β) Την εκκεντρότητα της.

γ) Τις εξισώσεις των διευθετούσών της.

(12μ)

2) (α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της ισοσκελούς υπερβολής $xy = c^2$ σε σημείο της

$$P\left(ct, \frac{c}{t}\right) \text{ είναι } t^2y + x = 2ct.$$

(β) Αν P είναι στο α΄ τεταρτημόριο και η PO (O, αρχή των αξόνων) επεκτεινόμενη συναντά ξανά την καμπύλη στο B, να γράψετε τις συντεταγμένες του B συναρτήσει του t.

(γ) Από το B φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα των y η οποία τέμνει την εφαπτομένη της υπερβολής στο P, στο σημείο Γ. Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Γ.

(16)

3) Δίνεται η παραβολή $y^2 = 12x$, η εστία της E και ένα σημείο της $P(3t^2, 6t)$, $t > 0$. Αν K είναι η προβολή του P πάνω στην διευθετούσα, δ, της παραβολής και η απόσταση του P από την εστία E είναι 12 μονάδες, να βρείτε:

α) Τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας δ της παραβολής.

β) Τις συντεταγμένες των σημείων P και K.

γ) Το εμβαδό του τριγώνου EPK.

δ) Την τιμή του κ ώστε η ευθεία $y = κx - 5$ να εφάπτεται της παραβολής.

(20μ)

4) Τα σημεία $T(\alpha^2, 2\alpha t)$ και $P(\alpha\rho^2, 2\alpha\rho)$ είναι σημεία της παραβολής $y^2 = 4\alpha x$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης στο T είναι $ty = x + \alpha t^2$.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής A, των εφαπτομένων στα σημεία T και P.

γ) Αν η χορδή PT φαίνεται από το σημείο $B(0, 3\alpha)$ υπό ορθή γωνία, να δείξετε ότι

$$4t\rho + t^2\rho^2 = 6(t + \rho) - 9.$$

δ) Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης στην οποία βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του σημείου A.

(20)

4) Δίνεται η έλλειψη $\beta^2 x^2 + \alpha^2 y^2 = a^2 \beta^2$ και σημείο της T(ασυνθ, βημθ) , $\alpha > \beta$. Από την κορυφή A' της έλλειψης φέρουμε ευθεία (ε) κάθετη της AT (A κορυφή της έλλειψης) η οποία τέμνει την ευθεία $x = \alpha \sin \theta$ στο σημείο P. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου P και να δείξετε ότι η εξίσωση της καμπύλης του γεωμετρικού τόπου του P είναι έλλειψη. Ποια η εκκεντρότητα της ;

(16)

5) Δίνονται οι ελλείψεις:

$$C_1: \frac{x^2}{\kappa^2} + \frac{y^2}{\mu^2} = 1 \text{ και } C_2: \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\kappa^2} = 1, \text{ με } 0 < \kappa < \mu \text{ και η ευθεία } \varepsilon: y = \lambda x, \text{ με } \lambda > 0.$$

Έστω M_1 και M_2 τα σημεία του πρώτου τεταρτημορίου στα οποία τέμνει η ευθεία ε τις ελλείψεις C_1 και C_2 αντίστοιχα. Αν λ_1 είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης e_1 της C_1 στο M_1 και λ_2 είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης e_2 της C_2 στο M_2 , να αποδείξετε ότι $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{1}{\lambda^2}$.

(16μ)

.....