

Κωνικές τομές

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ _____ Τμήμα: Γ1 Ημερομηνία: 23 Φεβρουαρίου 2012 Περίοδος: 3η Διάρκεια: 45' (Προειδοποιημένο)	Βαθμός _____ Υπογραφή καθηγητή _____ Υπογραφή κηδεμόνα _____
--	--

1. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

- i. Να υπολογίσετε:
 - i) Τις συντεταγμένες των κορυφών και των εστιών.
 - ii) Την εκκεντρότητα και τις εξισώσεις των διευθετουσών.
- ii. Δίνονται τα σημεία A(4,1) και B(1,4).
 - i) Να εξετάσετε ποιο από τα δυο βρίσκεται μέσα και ποιο έξω από την έλλειψη.
 - ii) Να βρείτε τις εφαπτόμενες της έλλειψης που άγονται από το σημείο που είναι εξωτερικό της έλλειψης (A ή B).
- iii. Εάν P είναι ένα σημείο της έλλειψης να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου PEE'.

(25 μονάδες)

2. Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή $x \cdot y = c^2$.

- i) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $P(ct, \frac{c}{t})$ είναι $x + yt^2 = 2ct$.
- ii) Αν η εφαπτομένη τέμνει τους άξονες Ox και Oy στα σημεία A και B αντίστοιχα, να δείξετε ότι το P είναι το μέσο του AB.

(15 μονάδες)

3. Η παραβολή $y^2 = x$ και η υπερβολή $x \cdot y = 1$ τέμνονται στο σημείο P.

- I. Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης (κ) της παραβολής $y^2 = x$ στο σημείο P.
- II. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της υπερβολής $x \cdot y = 1$ στο σημείο P.
- III. Αν η κάθετη (κ) και η εφαπτομένη (ε) τέμνουν τον άξονα των y στα σημεία A και B αντίστοιχα να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου PAB.

(25 μονάδες)

4. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4ax$. Από ένα σημείο A($at^2, 2at$) φέρουμε την εφαπτομένη και την κάθετη της παραβολής που τέμνουν τον άξονα των x στα B και Γ αντίστοιχα.

- i. Να δείξετε ότι η εστία E είναι το μέσο της BΓ.
- ii. Από το Γ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την AB και από το B ευθεία παράλληλη προς την ΑΓ, που τέμνονται στο M. Να βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση του Γ.Τ. του σημείου M.

(25 μονάδες)

5. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και η εφαπτομένη της σε ένα σημείο $P(\alpha \sin \theta, \beta \eta \mu \theta)$ η οποία τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία M και N αντίστοιχα. Αν K και Λ είναι οι προβολές του P στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

i. $(OK) \cdot (OM) = \alpha^2$

ii. $(OL) \cdot (ON) = \beta^2$

(10 μονάδες)

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

4. Αναλυτική Γεωμετρία

Απόσταση δυο σημείων $A(x_1, \psi_1)$ και $B(x_2, \psi_2)$: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (\psi_2 - \psi_1)^2}$

Απόσταση σημείου $A(x_1, \psi_1)$ από ευθεία $Ax + B\psi + \Gamma = 0$: $d = \frac{|Ax_1 + B\psi_1 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$, $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$, $\alpha > \beta$ Εστίες $(\pm \gamma, 0)$, Διευθετούσες $x = \pm \frac{\alpha}{\epsilon}$,

Εκκεντρότητα $\epsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$