

ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: 15/01/10

ΒΑΘΜΟΣ:

Διάρκεια: 50'

Υπ. Καθ:

Τμήμα: Γ κατ.

Υπ. Κηδ:

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

- 1) Να δώσετε τον ορισμό της παραβολής και με βάση τον ορισμό αυτό να δείξετε ότι η καρτεσιανή εξίσωση της παραβολής που έχει εστία $E(1,2)$ και διευθετούσα $\delta: x+1=0$ είναι $(y-2)^2 = 4x$. [12]
- 2) Η ευθεία $x = 2y - 8$ εφάπτεται της παραβολής $y^2 = 4ax$ στο σημείο Α. Να βρείτε:
 α) την τιμή του a και
 β) τις συντεταγμένες του σημείου Α. [12]
- 3) α) Αν $y = \tan \alpha x$, να αποδείξετε ότι $\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{1 + \alpha^2 x^2}$.
 β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{e^{2x} - 1}$. [12]
- 4) α) Να δείξετε ότι η εξίσωση του γεωμετρικού τόπου του σημείου $P(3t^2, 6t)$, $t \in \mathbb{R}$, είναι η παραβολή $y^2 = 12x$ και να γράψετε τις συντεταγμένες της εστίας και την εξίσωση της διευθετούσας της.
 β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο P.
 γ) Για ποιες τιμές του t η εφαπτομένη της παραβολής περνά από το σημείο $A(-9,6)$;
 δ) Να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής που άγονται από το σημείο Α. [22]
- 5) Δίνεται η παραβολή $4y = x^2$ και το σημείο της $P(2t, t^2)$. Η κάθετη της παραβολής στο P τέμνει τον άξονα Ox στο σημείο Β. Στην προέκταση της PB παίρνουμε τμήμα $B\Gamma = PB$.
 Να βρείτε:
 α) Την εξίσωση της κάθετης στο σημείο P.
 β) Το εμβαδόν του τριγώνου $OB\Gamma$ συναρτήσει του t . (Ο αρχή των αξόνων). [22]
- 6) Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 4ax$ σε τυχαίο σημείο της $P(a\rho^2, 2a\rho)$ είναι: $x - \rho y + a\rho^2 = 0$. Η εφαπτομένη της πιο πάνω παραβολής σε άλλο τυχαίο σημείο της $T(a\tau^2, 2a\tau)$ τέμνει κάθετα την προέκταση της PO (Ο αρχή των αξόνων) και οι εφαπτόμενες της παραβολής στα P και T τέμνονται στο σημείο Σ.
 α) Να δείξετε ότι $\rho\tau = -2$ και στη συνέχεια
 β) να βρείτε την εξίσωση του γεωμετρικού τόπου του Σ. [20]