

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:/...../.....

Υπογραφή κηδεμόνα:

Ονοματεπώνυμο μαθητή/τριας: Τμήμα: Γ₇

1. Δίνεται η έλλειψη $x^2 + 2y^2 = 8$. Να βρείτε: α) τις συντεταγμένες των εστιών, β) την εκκεντρότητα, γ) τις εξισώσεις των διευθετούσών και δ) την τιμή του κ ώστε η ευθεία $y = 2x + \kappa$ να εφάπτεται της έλλειψης. (μ. 3)

2. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και το τυχαίο σημείο της $P(\alpha \sin \theta, \beta \eta \mu \theta)$. (μ. 6)

α) Να δείξετε ότι οι εξισώσεις της εφαπτομένης και της κάθετης της έλλειψης στο P είναι :

$$\beta \chi \sigma \nu \theta + \alpha \gamma \eta \mu \theta = \alpha \beta \quad \text{και} \quad \alpha \chi \eta \mu \theta - \beta \gamma \sigma \nu \theta = (\alpha^2 - \beta^2) \eta \mu \theta \cdot \sigma \nu \theta, \quad \text{αντίστοιχα.}$$

β) Αν η εφαπτομένη τέμνει τον άξονα των x στο Γ και η κάθετη τον άξονα των y στο Δ να βρεθεί η εξίσωση του γεωμετρικού τόπου του μέσου M του $\Gamma\Delta$.

γ) Αν η κάθετη περνά από το σημείο $\left(\frac{\alpha}{2}, 0\right)$, να δείξετε ότι $\theta = \tau \omicron \xi \sigma \nu \left(\frac{1}{2\epsilon^2}\right)$ (ϵ η εκκεντρότητα).

3. Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή $xy = c^2$ και σημείο της $T(ct, \frac{c}{t})$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής στο T είναι: $x + t^2 y = 2ct$ και της κάθετης: $t^3 x - ty = ct^4 - c$

β) Αν η εφαπτομένη και η κάθετη τέμνουν τον άξονα x' στα σημεία A και B αντίστοιχα, να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ATB είναι ίσο με $\frac{c^2(t^4+1)}{2t^4}$ (μ. 5,5)

4. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$ και το σημείο της $T(t^2, 2t)$. Η κάθετη της παραβολής στο T τέμνει ξανά τη παραβολή στο σημείο $P(\rho^2, 2\rho)$. Να δείξετε ότι:

α) $t^2 + t\rho + 2 = 0$.

β) Ο γεωμετρικός τόπος του σημείου τομής των εφαπτομένων της παραβολής στα σημεία T και P

είναι η $y^2 = -\frac{4}{x+2}$. (μ. 5,5)