

ΣΧ. ΧΡΟΝΙΑ 2011-12

ΒΑΘΜΟΣ:

ΥΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗ/ΤΡΙΑΣ:

ΥΠ. ΚΗΔΕΜΟΝΑ:

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

Μάθημα: Μαθηματικά. Ημερομηνία: 15/02/12 Διάρκεια: 45'

Όνομα μαθητή/τριας: Τμήμα: Γ5 Αρ:

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

1. α) Να δώσετε τον ορισμό της παραβολής.

β) Δίνεται η παραβολή: $\psi^2 = -12x$.

ι) Να βρείτε την εστία και την εξίσωση της διευθετούσας της παραβολής.

ιι) Η ευθεία $\psi = 6$ τέμνει την παραβολή στο σημείο Β. Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της παραβολής στο σημείο Β.

γ) Δίνεται η παραβολή: $\psi^2 = 4ax$

ι) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο της $P(a\rho^2, 2a\rho)$ είναι η: $\rho\psi = x + a\rho^2$.

ιι) Η εφαπτομένη της παραβολής στο Ρ τέμνει τον άξονα των ψ στο σημείο Τ. Από το Ρ φέρουμε ευθεία (ε) παράλληλη προς τον άξονα των ψ . Αν Ε είναι η εστία της παραβολής και η ΤΕ τέμνει την ευθεία (ε) στο Η, να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης πάνω στην οποία βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Η. (μ.35)

2. α) Να δώσετε τον ορισμό της έλλειψης.

β) Δίνεται η έλλειψη: $\frac{x^2}{4} + \psi^2 = 1$ και η ευθεία $\psi = \lambda x + 2$. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η ευθεία να εφάπτεται της έλλειψης.

γ) Δίνεται η έλλειψη $(K_1): x^2 + \frac{\psi^2}{\lambda^2} = 1$, $0 < \lambda < 1$ και σημείο της Ρ (συνθ, λημθ). Από το Ρ

φέρνουμε την εφαπτομένη της έλλειψης και από την αρχή των αξόνων Ο, την κάθετη ΟΑ στην εφαπτομένη. Επίσης από το Ρ φέρνουμε την κάθετη πάνω στον άξονα Οχ που συναντά την ευθεία ΟΑ στο Μ.

ι) Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ είναι η έλλειψη $(K_2): x^2 + \lambda^2 \psi^2 = 1$.

ιι) Αν E_1 μια εστία της έλλειψης (K_1) και E_2 μια εστία της έλλειψης (K_2) , να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $E_1 E_2 O$. (Ο η αρχή των αξόνων) (μ.40)

3. Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή: $x\psi = c^2$ και σημείο της $P(ct, \frac{c}{t})$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της κάθετης της υπερβολής στο σημείο Ρ είναι η:

$$t^3 x - t\psi = c(t^4 - 1).$$

β) Αν η εφαπτομένη της υπερβολής στο Ρ τέμνει τον άξονα των x στο Α και η κάθετη στο Ρ τέμνει τον άξονα των ψ στο Β, να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης πάνω στην οποία βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του μέσου Μ της ΑΒ. (μ.25)

EXTRA BONUS:

γ) Έστω $T(c\rho, \frac{c}{\rho})$ ένα άλλο σημείο της υπερβολής. Τα σημεία Ρ και Τ κινούνται στην υπερβολή

έτσι ώστε το μήκος της χορδής ΡΤ να είναι σταθερό και ίσο με κ. Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος του μέσου Μ της χορδής ΡΤ έχει εξίσωση: $4(x\psi - c^2)(x^2 + \psi^2) = \kappa^2 x\psi$.