

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
(μέχρι και μονοτονία)

Ονομάτεπώνυμο: Βαθμός:

Υπογραφή κηδεμόνα : Ημερομηνία:

Διάρκεια: 45 λεπτά Τμήμα:

Τάξη : Γ' Λυκείου - επιλογής

1) Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια : α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x - \ln(1+x)}{2\eta\mu x + e^{-2x} - 1}$

β) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \sigma\phi \frac{\pi x}{2} \right)$

(βαθ. 2X8=16)

2) Δίνεται η καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις:

$$\left. \begin{array}{l} x = \sigma\upsilon\nu\theta \\ \psi = 1 + \eta\mu\theta \end{array} \right\}$$

α) Να βρείτε στη μορφή $f(x, \psi) = 0$ τον τύπο της καμπύλης.

β) Να δείξετε ότι: i) $\frac{d\psi}{dx} = -\sigma\phi\theta$

ii) $(\psi - 1) \frac{d^2\psi}{dx^2} + \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2 + 1 = 0$

γ) Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης στο $\theta = \frac{\pi}{4}$.

δ) Αν $0 \leq \theta \leq \pi$ να βρείτε το πεδίο τιμών της συνάρτησης .

(βαθ. 5X4=20)

3) α) Να διατυπώσετε το Θ.Μ.Τ. και να εξηγήσετε τη γεωμετρική του σημασία.

β) Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha) = 2\beta$ και $f(\beta) = 2\alpha$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε η εφαπτομένη στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι κάθετη στην ευθεία $-x + 2\psi - 1 = 0$.

(βαθ. 2X7=14)

- 4) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η $f(x) = \alpha x^3 + 3x^2 + 3\alpha x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

(βαθ. 12)

- 5) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = f(x) \cdot e^{\frac{1}{x}}$ με $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη.

Αν $f(x) = x^2 f'(x) \quad \forall x \in (0, +\infty)$.

i) Να δείξετε ότι η g είναι σταθερή και να βρεθεί η f όταν $f(1) = 1$.

ii) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

(βαθ. 9+4=13)

- 6) Αν $f(x) = e^x$ στο $[\alpha, \beta]$ να δείξετε ότι: $e^\alpha(\beta - \alpha) < e^\beta - e^\alpha < e^\beta(\beta - \alpha)$.

(βαθ. 12)

- 7) Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \ln\left(\frac{\ln x}{x}\right)$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία.

iii) Να δείξετε ότι $\forall \alpha > \beta > e \Rightarrow \alpha^\beta < \beta^\alpha$.

(βαθ. 3+2X5=13)