

ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: 16/11/2011

ΒΑΘΜΟΣ:

Διάρκεια: 60'

Υπ. Καθ.:

Θέμα: Γραφικές Παραστάσεις

Υπ. Κηδ.:

Τμήμα: Γ5 (κατ.)

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

- 1) Η συνάρτηση f με εξίσωση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + x - 1$ έχει σημείο καμπής το σημείο $A(-1, 2)$.
Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β . (8)

- 2) i) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(\alpha - 1)x^2 + \beta x + 5}{3x + \gamma}$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τους α, β και γ ,
ώστε η γραφική παράσταση της f να έχει ως ασύμπτωτες τις ευθείες με εξισώσεις $x = -2$
και $y = 3$. (10)

- ii) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-2}{e^x}$.
Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τις ασύμπτωτες της πιο πάνω παράστασης. (6)

- 3) Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{x^2 - 6x + 9}{1 - x^2}$. Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα σημεία τομής
της με τους άξονες, τα τοπικά ακρότατά της και τις ασύμπτωτές της, να την παραστήσετε γραφικά. (20)

- 4) α) Πότε μια ευθεία με εξίσωση $y = \lambda x + \beta$ λέγεται πλάγια ασύμπτωτη της καμπύλης f στο
 $+\infty$ ή στο $-\infty$;

- β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + 1 - \frac{2}{x+2}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα σημεία τομής
της με τους άξονες, να εξετάσετε την μονοτονία της, να βρείτε τις ασύμπτωτές της και στην
συνέχεια να την παραστήσετε γραφικά. (20)

- 5) Ένα σύρμα μήκους ℓ κόβεται σε δύο μέρη. Από αυτά κατασκευάζουμε έναν κύκλο και ένα
τετράγωνο. Πώς πρέπει να μοιραστεί το σύρμα, ώστε το άθροισμα των εμβαδών που περικλείει τα
σχήματα να είναι ελάχιστο; (18)

6) α) Να μελετήσετε τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $g(x) = \ln x - x + 1$, $x > 0$.

β) Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$, για την οποία ισχύει η σχέση:

$$\frac{1}{3}f^3(x) + 9f(x) = x \ln x - \frac{x^2}{2} + 9, \quad x > 0.$$

i) Να αποδείξετε ότι η f έχει ακριβώς ένα σημείο x_0 , όπου $f'(x_0) = 0$, και να το βρείτε.

ii) Να εξετάσετε αν η f έχει στο x_0 τοπικό ακρότατο. (18)
