

ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: 14/11/2012

ΒΑΘΜΟΣ:

Διάρκεια: 50'

Υπ. Καθ.:

Θέμα: Γραφικές Παραστάσεις

Υπ. Κηδ.:

Τμήμα: Γ5 (κατ.)

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

- 1) Η καμπύλη C με εξίσωση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έχει σημείο καμπής στο σημείο $A(-1, f(-1))$ και η ευθεία $y = x + 4$ είναι η εφαπτομένη της καμπύλης στο A .
 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β και γ . (12)

- 2) Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = (x^2 + \kappa)e^{3x}$.
 Να βρείτε για ποιες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (10)

- 3) Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις πιο κάτω συναρτήσεις. Η μελέτη να περιλαμβάνει πεδίο ορισμού, ασύμπτωτες, σημεία τομής με τους άξονες και ακρότατα αν υπάρχουν.

$$\alpha) f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x} \qquad \beta) f(x) = \frac{-x^3}{(x+1)^2} \qquad (40)$$

- 4) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και, αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτες των συναρτήσεων:

$$\alpha) y = \frac{x^2-10}{2x^2+5} \qquad \beta) y = xe^x - 2 \qquad (10)$$

- 5) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 \ln x$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) η εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της συνάρτησης f στο σημείο της

$$M(\alpha, f(\alpha)) \text{ με } \alpha < e \text{ είναι } (\epsilon): y = \frac{2}{\alpha}x - 2(1 - \ln \alpha) \text{ και}$$

ii) το εμβαδό E του ορθογωνίου τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη (ϵ) με τους άξονες δίνεται από τη σχέση: $E(\alpha) = \alpha(1 - \ln \alpha)^2$.

β) Να βρείτε το α , ώστε το τρίγωνο να έχει μέγιστο εμβαδό. (18)

- 6) Έστω μια συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- i) $f(0) = 0$
 ii) $f'(x) \leq f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

iii) $1 + f(x) + e^x f'(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $f'(0) = 0$

β) $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Να γράψετε το είδος του κρίσιμου σημείου $x_0 = 0$ της f δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(10)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!!