

ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: 2/11/2010

ΒΑΘΜΟΣ:

Διάρκεια: 75'

Υπ. Καθ.:

Θέμα: Γραφικές Παραστάσεις

Υπ. Κηδ.:

Τμήμα: Γ1 (κατ.)

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

- 1) Καμπύλη ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις $x = t^2 - 2$ και $y = \frac{t^3}{3} - t$, $t > 0$. Να βρείτε την εξίσωση της καθέτου της καμπύλης στο $x = 7$. (8)

- 2) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 \tan x} \right)$ (8)

- 3) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 2}$.

- α) Να αποδείξετε ότι για την f εφαρμόζεται στο διάστημα $[0, 2]$ το Θεώρημα της Μέσης Τιμής.
 β) Να εφαρμόσετε το Θ.Μ.Τ. για την f στο $[0, 2]$.
 γ) Να δείξετε (αλγεβρικά) ότι δεν υπάρχει αριθμός $\xi \in (-3, -1)$ για τον οποίο να ισχύει το Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση αυτή. (10)

- 4) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - x^2 + \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(-1, 6)$ και η εφαπτομένη της στο σημείο αυτό σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ με τον άξονα $x'x$, τότε:

- α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -4$ και $\beta = 4$.
 β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και να την παραστήσετε πρόχειρα.
 γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = xf(\ln x)$ στο σημείο $M(1, g(1))$. (14)

5) Δίνεται η συνάρτηση $y = (1 - x)e^{2x}$.

- α) Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες, τα τοπικά ακρότατα, το σημείο καμπής και τις ασύμπτωτες της συνάρτησης, να κάνετε τη γραφική της παράσταση.
β) Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι $(x + 1)e^{-2x} \geq 1 - x$ για κάθε $x \geq 0$. (17)

6) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x - 2}$.

Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τα ακρότατα και τις εξισώσεις των ασυμπτωτών της συνάρτησης. Στη συνέχεια, να κάνετε τη γραφική της παράσταση. (16)

7) Αν η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $f(1) = 2$ και τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$

να ισχύει $f(x^2) = f(x)$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x) - 2}{x - 1}$. (7)

8) α) Να μελετήσετε, ως προς τη μονοτονία, τη συνάρτηση $f(x) = x \ln x$.

β) Να αποδείξετε ότι: $x \ln x < (x + 1) \ln(x + 1)$ για κάθε $x > e^{-1}$ (8)

9) Η συνάρτηση $y = k^2 x^3 + 2\lambda x^2 + \mu x$, $k \neq 0$ είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της και έχει σημείο καμπής στο $P(1, 2)$. Να δείξετε ότι $-3 \leq \lambda < 0$. (12)
