

Διαγώνισμα Μαθηματικών

Βαθμός:

Καθηγητής: Αντρέας Χριστοδούλου

Υπογραφή κηδεμόνα:

Ονοματεπώνυμο:

Αρ.:

Τμήμα:

1. Καμπύλη ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις: $\chi = t^2 - 2t$
 $\psi = e^{2t}$, $t \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε την πρώτη και την δεύτερη παράγωγο της καμπύλης.

β) Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης για $t=0$. (β. 2)

2. Αν $\chi = \eta \mu^3 \theta + 1$ να δείξετε ότι $\frac{d\psi}{d\chi} = -\sigma \varphi \theta$ και να βρείτε την $\frac{d^2\psi}{d\chi^2}$. (β. 1,5)

3. Δίνεται η καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις: $\chi = \frac{1}{t}$
 $\psi = -2 \ln t + \frac{a}{t} - \beta t$, $t \in \mathbb{R}^+$

Αν η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο (1,-3), έχει κλίση $\lambda_{\text{εφ}} = -3$. Να βρείτε τα α και β . (β.2)

4. α) Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής. (β.0,5)

β) Να βρείτε αριθμό $\xi \in (3,6)$ για τον οποίο ισχύει το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την συνάρτηση

$$f(\chi) = \sqrt{\chi - 2} \quad \text{στο διάστημα } [3,6]. \quad (\beta.1,5)$$

5. Να βρείτε τα όρια: (β.8)

$$i) \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{2\sigma \nu \chi - 2}{e^{2\chi} - 2\chi - 1} \quad ii) \lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^\chi)}{\chi} \quad iii) \lim_{\chi \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2\sigma \nu \chi}{\pi - 3\chi} \quad iv) \beta) \lim_{\chi \rightarrow 0^+} \left(\chi e^{\frac{1}{\chi}} \right)$$

6. Να εξετάσετε αν οι πιο κάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος της Μέσης τιμής στα διαστήματα που δίνονται σε κάθε περίπτωση. (Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας) (β. 3)

$$\alpha) \quad y = \begin{cases} x^2 & , \quad x \leq 3 \\ -x + 12 & , \quad x > 3 \end{cases} \quad \text{στο } [1,5]$$

$$\beta) \quad y = \ln x + \sin x \quad \text{στο } [1,2]$$

7. Αν σας λεχθεί ότι σε ένα συγκεκριμένο διάστημα μια συνάρτηση ικανοποιεί την μία από τις δύο προϋποθέσεις του Θεωρήματος της μέσης τιμής, αλλά δεν ικανοποιεί την άλλη στο αντίστοιχο διάστημα. Ποια προϋπόθεση ικανοποιεί και ποια όχι; Γιατί; (β. 0,5)

8. Να αποδείξετε ότι $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad |\sin \beta - \sin \alpha| \leq |\beta - \alpha|$. (β. 2)