

1. (α) Να διατυπώσετε το Θεώρημα της Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.).
(β) Να βρείτε αριθμό $\xi \in (1, 2)$ για τον οποίο να ισχύει το Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{2x+3}{3x+2}$.
(γ) Να δείξετε ότι δεν υπάρχει αριθμός $\xi \in (-1, 1)$ για τον οποίο να ισχύει το Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση αυτή.
[B: 15]
2. Να βρείτε τα μ και λ ώστε η συνάρτηση $\psi = \mu + (\lambda + x) \cdot e^{x-1}$ να έχει τοπικό ακρότατο στο σημείο $A(1, 0)$.
[B: 10]
3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = 3x + \sin 2x$, $x \in [0, 2\pi]$, ως προς τα ακρότατα και τα σημεία καμπής της.
[B: 10]
4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 \ln x - 2 \ln \alpha - \frac{x}{\alpha} + \frac{\alpha}{x}$, όπου $\alpha > 0$.
(α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
(β) Να αποδείξετε ότι $\ln \frac{\beta}{\alpha} \leq \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2\alpha\beta}$, για κάθε $\beta \geq \alpha$.
[B: 20]
5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{9}x^3(x-4)$.
(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες, τα διαστήματα μονοτονίας, τα ακρότατα και τα σημεία καμπής της συνάρτησης.
(β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η $f(x)$ στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω.
(γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\psi = f(x)$.
[B: 30]
6. Έστω μια συνάρτηση $\psi = f(x)$ που ορίζεται σε ένα διάστημα Δ . Αν ισχύει ότι $f(x_1) = 0$, $f'(x_1) = 0$ για $x_1 \in \Delta$ και επίσης ότι $f'(x) < 0$ σε όλο το υπόλοιπο διάστημα Δ , να αποδείξετε ότι η $\psi = f^2(x)$ έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο όπου $x = x_1$.
[B: 15]