Γενικές Λυμένες Ασκήσεις Κεφαλαίου 1

❶ Για τις πιο κάτω συναρτήσεις, να επαληθεύσετε ότι ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle στο διάστημα που δίνεται:

$(i)\ f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x, \quad x \in [0,2]$

$(ii)\ f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-2}, \quad x \in [-1,1]$

$(iii)\ f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{x}{3}, \quad x \in [0,9]$

$(iv)\ f(x) = ημx, \quad x \in [-\pi,\pi]$

❷ Βεβαιωθείτε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος της Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού και προσδιορίστε τα σημεία στα οποία η παράγωγος κάθε μίας των ακόλουθων συναρτήσεων λαμβάνει την τιμή που δίνεται στο εν λόγω Θεώρημα, στο αναφερόμενο κάθε φορά διάστημα:

$(i)\ f(x) = x^2 + x, \quad x \in [-2,8]$

$(ii)\ f(x) = \sqrt{x+1}, \quad x \in [0,8]$

$(iii)\ f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \quad x \in [3,4]$

$(iv)\ f(x) = \sqrt{25-x^2}, \quad x \in [-5,3]$

Στο (iv), δώστε γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος.

❸ Έστω $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση τρις-παραγωγίσιμη, με $f(\alpha) = f(\beta) = f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$. Τί συμπεραίνετε για την ύπαρξη ριζών της εξίσωσης $f'''(x) = 0$;

❹ Έστω η εξίσωση $x^3 + x - 1 = 0$. Δείξτε ότι η εξίσωση αυτή έχει ακριβώς μια *πραγματική* λύση.

❺ Έστω $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $3\alpha x^2 + 2\beta x = \alpha + \beta$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0,1)$.

Υπόδειξη: Θεωρήστε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - (\alpha+\beta)x$ και εφαρμόστε το Θεώρημα του Rolle στο διάστημα $(0,1)$.

❻ Δείξτε ότι για κάθε τιμή του α, η εξίσωση $x^4 + 32x + \alpha = 0$ έχει το πολύ 2 πραγματικές λύσεις.

❼ Αν f μια συνάρτηση, δις παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,2]$ τέτοια ώστε $f(0) = f(1) = f(2) = 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $c \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f''(c) = 0$.

❽ Έστω f μια δισπαραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή δεύτερη παράγωγο τέτοια ώστε $f(0) = 3, f(1) = 1, f(4) = 7$. Δείξτε ότι υπάρχει $c \in (0,4)$ τέτοιο ώστε $f''(c) > 0$.

❾ Δείξτε ότι τα γραφήματα των συναρτήσεων f και g με τύπους $f(x) = 2x$ και $g(x) = -συνx$ συναντώνται σε ένα και μόνο σημείο.

❿ Αν $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση η οποία έχει ακριβώς n διακεκριμένες πραγματικές ρίζες $(n \in \mathbb{N})$, δείξτε ότι και η συνάρτηση $f + cf'$ έχει ακριβώς n πραγματικές ρίζες (c πραγματική σταθερά).

⓫ Έστω $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $f'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Τότε, υπάρχει πραγματική σταθερά C τέτοια ώστε $f(x) = C, \forall x \in \mathbb{R}$, δηλ. η συνάρτηση f είναι σταθερή συνάρτηση (στο $\mathbb{R}$).

⓬ Βρείτε μια συνάρτηση $f:(-2,2) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f'(x) = 5x^4$ και $f(0) = 1$.

⓭ Έστω $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $f'(x) = f(x) \cdot συνx, \forall x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$. Να βρείτε τον τύπο της f.

⓮ Έστω $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \ln[f(x)] - 3x$ είναι σταθερή συνάρτηση και να βρείτε τον τύπο της f.

⓯ Έστω $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του συνόλου $[\alpha,\beta]$ συνάρτηση τέτοια ώστε $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Αν $c \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε $cf'(\xi)+f(\xi)=0$.

⓰ Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση στο εσωτερικό του συνόλου $[\alpha,\beta]$. Να δείξετε ότι υπάρχει ενα (τουλάχιστον) $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε

$$f'(\xi)=\frac{\alpha+\beta-2\xi}{(x-\alpha)(x-\beta)}.$$

⓱ Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ $(\alpha<\beta)$ μια συνεχής συνάρτηση, παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του συνόλου $[\alpha,\beta]$, δηλ. στο (α,β). Δείξτε ότι η συνθήκη της ύπαρξης του $\lim_{x\to a} f'(x)$ συνεπάγεται την ύπαρξη της παραγώγου της συνάρτησης στο σημείο με $x=\alpha$.

⓲ Έστω f μια περιττή και παντού παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι για κάθε $c>0$, υπάρχει $\xi\in(-c,c)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{f(c)}{c}$.

⓳ Θεωρούμε μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(1)=0$ και $f'(1)=\frac{1}{x}, x\in(0,+\infty)$. Αποδείξτε ότι $f(x)\le x-1, x\in(0,+\infty)$.

Υπόδειξη: Μελετήστε ξεχωριστά τις περιπτώσεις $x>1$ και $x<1$.

⓴ Θεωρούμε μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(0)=1$ και $f'(x)\le 6, \forall x\in\mathbb{R}$. Ποιά είναι η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το $f(3)$;

㉑ Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(6)=f(2)+20$, Να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}, x_1\ne x_2$ τέτοια ώστε $f'(x_1)+f'(x_2)=10$.

㉒ Αποδείξτε ότι $\forall\nu\in\mathbb{N}$ ισχύει

$$\frac{1}{2\sqrt{\nu+1}}<\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu}<\frac{1}{2\sqrt{\nu}}$$

㉓ Αποδείξτε ότι $\forall x\in(0,\frac{\pi}{2}]$ ισχύει

$$\sigma\upsilon\nu x<\frac{\eta\mu x}{x}<1.$$

Ισχύει η πιο πάνω για $x\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$;

㉔ Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ μια δις παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία $(0,f(0))$ και $(1,f(1))$ του γραφήματος της f τέμνει το γράφημά της σε ένα σημείο $(\alpha,f(\alpha))$, όπου $\alpha\in(0,1)$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in[0,1]$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

㉕ Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $(0,1)$ και συνεχής στο $[0,1]$ με $f(0)=f(1)$. Δείξτε ότι υπάρχουν δυο διακεκριμένα $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$ με $f'(\xi_1)=-f'(\xi_2)$.

㉖ Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση, δις-παραγωγίσιμη στο (α,β) και $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Αν υπάρχει $\gamma\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\gamma)<0$, αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)>0$.

㉗ Έστω η διαφορίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ όπου $\alpha\cdot\beta>0$. Τότε, υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{\alpha f(\beta)-\beta f(\alpha)}{\alpha-\beta}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

㉘ Έστω η διαφορίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ όπου $\alpha\ge 0$. Δείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε

$$\frac{f'(\xi_1)}{\alpha+\beta}=\frac{f'(\xi_2)}{2\xi_2}.$$

㉙ Έστωσαν οι συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x)=\sqrt{x}$ και $g(x)=\frac{1}{x}$. Υπολογίστε το

$$\lim_{x\to0^+}\big(f(x)\cdot g(x)\big).$$

㉚ Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια

$(i)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+4x^2-1}{x^5+x^2-x}$ $(ii)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^{3x}}$ $(iii)\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^3 x}{x}$

(iv) $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}\cdot\ln x$ $(v)\ \lim\limits_{x\to0^+}x^2\cdot\ln x$

Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου 4 (Ορισμένο Ολοκλήρωμα)

❶ Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $x^2 \le f(x) \le 6, \forall x \in [-1,2]$. Να βρείτε αριθμούς A και B τέτοιους ώστε

$$A \le \int_{-1}^{2} f(x)\,dx \le B.$$

❷ Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot f'(x)\,dx = \frac{1}{2}[f^2(\beta) - f^2(\alpha)]$$

❸ Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[1, 3)$. Να δείξετε ότι

$$\int_{1}^{2} \left[f\left(\frac{2}{t}\right) - 2\frac{f(t)}{t^2}\right] dt = 0$$

❹ Έστω συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left[f(x) - \bar{f}\right] dx = 0$$

❺ Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο f' και η C_f περνά από τα σημεία $A(1,1)$ και $B(2,0)$, να υπολογίσετε το

$$I = \int_{1}^{2} [f(x) + f'(x)] \cdot e^x\,dx$$

❻ Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ και τέτοια ώστε να ισχύει η σχέση

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [f'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x - f(x) \cdot \eta\mu x]\,dx = -2,$$

να υπολογίσετε το $f(\pi)$.

❼ Να βρεθεί η τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει

$$\int_{-4}^{\alpha} \frac{t^2}{3t^2 + 12}dt - \int_{\alpha}^{-4} \frac{4}{3t^2 + 12}dt = 1$$

❽ Δίνεται συνάρτηση $y = f(x)$ για την οποία υπάρχουν η πρώτη παράγωγος f' και η δεύτερη παράγωγος f'' σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ στο οποίο διάστημα είναι συνεχείς (συναρτήσεις). Η εφαπτομένη της καμπύλης με εξίσωση $y = f(x)$ στο σημείο με τετμημένη $x = \alpha$ και η εφαπτομένη της καμπύλης αυτής στο σημείο με τετμημένη $x = \beta$ σχηματίζουν προσανατολισμένη γωνία $\frac{3\pi}{4} rad$ με το θετικό ημιάξονα Ox. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x) \cdot f''(x)\,dx.$$

❾ Έστω η συνάρτηση

$$F: [0, +\infty) \to \mathbb{R} \ \ \mu\varepsilon \ \ F(x) = \int_{0}^{x^3} \sigma\upsilon\nu t\,dt.$$

Είναι η F παραγωγίσιμη; αν ναι, υπολογίστε την παράγωγό της.

❿ Έστω η συνάρτηση

$$F: [1, +\infty) \to \mathbb{R} \ \ \mu\varepsilon \ \ F(x) = \int_{1}^{x^2+1} (1 + t)\,dt.$$

Είναι η F παραγωγίσιμη; αν ναι, υπολογίστε την παράγωγό της.

⓫ Υπολογίστε την

$$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3} \sigma\upsilon\nu^2 t\,dt.$$

⓬ Έστω η συνάρτηση

$$F: [0, +\infty) \to \mathbb{R} \ \ \mu\varepsilon \ \ F(x) = \int_{0}^{x} \frac{dt}{t^2 + t + 1}.$$

Μελετήστε την F ως προς την κυρτότητα.

⓭ Υπολογίστε τις

$$\frac{d}{dx}\int_{-x}^{x} \frac{dt}{1+t} \quad \text{και} \quad \frac{d}{dx}\int_{-1}^{x^2+\sqrt{x}} \left(t + \sqrt{t}\right) dt.$$

⓮ Έστω η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \int_{0}^{x} \frac{dt}{1+t^2} + \int_{0}^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}.$$

Δείξτε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

⓯ Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$x \mapsto f(x) = \int_{x}^{x+1} e^{\sigma\upsilon\nu\,(2\pi t)}\,dt$$

είναι σταθερή (παντού στο $\mathbb{R}$).

⓰ Αν

$$F(x)=\int_0^{x^2}(1+t^2)\,dt, x\in(0,+\infty),$$

να υπολογίσετε το $(F^{-1})'(2)$.

⓱ Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[2,+\infty)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F:[2,+\infty)\to\mathbb{R}\ \ \mu\varepsilon\ \ F(x)=\int_2^{x} f\left(\frac{2}{t}\right)dt.$$

Να υπολογίσετε την F'.

⓲ Βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ οι οποίες ικανοποιούν την

$$\int_0^{x^2} f(t)dt=1-e^{2x^2}$$

⓳ Βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ οι οποίες ικανοποιούν την

$$\int_0^{x} f(t)dt=e^{x}$$

⓴ Βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ οι οποίες είναι δύο φορές παραγωγίσιμες με συνεχή δεύτερη παράγωγο και ικανοποιούν τη Δ.Ε.

$$f'(x)=f(x)+\int_0^1 f(t)dt.$$

㉑ Υπολογίστε την τιμή του x για την οποία

i) $\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}}=-3,$ ii) $\int_x^0 \frac{dt}{(3t+1)^2}=-\frac{1}{6},$

iii) $\int_2^x (4t-1)\,dt=9$

㉒ Υπολογίστε το

$$\int_{-3}^{1}(2+|x|)\,dx$$

㉓ Να βρείτε την τιμή του x για την οποία υλοποιείται η μέση τιμή $\bar{f}$ όταν $f(x)=\eta\mu^2 x, x\in[0,\pi]$.

㉔ Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $t=\kappa-x$, όπου $\kappa>0$ σταθερά, να δείξετε ότι το ολοκλήρωμα

$$A=\int_0^{\kappa}\frac{f(\kappa-x)}{f(x)+f(\kappa-x)}dx$$

είναι ίσο με το ολοκλήρωμα

$$B=\int_0^{\kappa}\frac{f(x)}{f(x)+f(\kappa-x)}dx$$

Με τη βοήθεια του πιο πάνω, να υπολογίσετε το $A+B$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι $B=\frac{\kappa}{2}$. Τέλος, υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\eta\mu x}}{\sqrt{\eta\mu x}+\sqrt{\sigma\upsilon\nu x}}dx\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu^3 x}{\eta\mu^3 x+\sigma\upsilon\nu^3 x}dx$$

㉕ Δίνονται οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ οι οποίες είναι συνεχείς. Η συνάρτηση f είναι άρτια και για τη συνάρτηση g δίνεται ότι αυτή ικανοποιεί τη σχέση $g(x)+g(-x)=1, \forall x\in\mathbb{R}$

(i) Να δείξετε ότι:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)g(x)\,dx=\int_0^{\alpha} f(x)\,dx, \acute{o}\pi o\upsilon\ \alpha>0.$$

(ii) Να υπολογίσετε το

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu(x)}{e^{2x}+1}dx$$

㉖Δίνονται οι συναρτήσεις f και g οι οποίες είναι συνεχείς στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Η συνάρτηση f είναι άρτια και για τη συνάρτηση g δίνεται ότι αυτή ικανοποιεί τη σχέση $g(x)\cdot g(-x)=1, \forall x\in\mathbb{R}$.

(i) Να δείξετε ότι:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f(x)}{1+g(x)}dx=\int_0^{\alpha} f(x)\,dx, \acute{o}\pi o\upsilon\ \alpha>0.$$

(ii) Να υπολογίσετε το

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu(x)}{e^{2x}+1}dx$$

㉗ Δίνονται οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ οι οποίες είναι συνεχείς. Η συνάρτηση f είναι άρτια και η συνάρτηση g περιττή. Έστω $\alpha>0$.

(i) Να δείξετε ότι:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{f(x)}{e^{g(x)}+1}dx=\int_0^{\alpha} f(x)\,dx.$$

(ii) Να υπολογίσετε το

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma\upsilon\nu^2(x)+5}{2e^{\eta\mu x}+2}dx.$$

㉘ Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση με $f(\alpha+\beta-x)=f(x), \forall x\in[\alpha,\beta]$. Δείξτε ότι

$$\int_a^\beta x\cdot f(x)\,dx=\frac{\alpha+\beta}{2}\int_a^\beta f(x)\,dx.$$

Να υπολογίσετε το

$$\int_0^\pi \frac{x\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}dx.$$

❷❾ Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Να δείξετε ότι

$$\int_0^\pi x\cdot f(\eta\mu x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\eta\mu x)\,dx$$

και με τη βοήθεια τούτου, να υπολογίσετε το

$$\int_0^\pi \frac{x\cdot\eta\mu^3 x}{1+\sigma\upsilon\nu^2 x}dx.$$

Υπόδειξη: Θεωρήστε το μετασχηματισμό $u=\pi-x$.

❸⓿ Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση και $\alpha>0$. Αν για την f ισχύει ότι

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\big(f(x+\alpha)+f(\alpha-x)\big)\,dx=\int_{-\alpha}^{\alpha}(x+\alpha)\,dx,$$

να δείξετε ότι $\int_0^{2\alpha} f(x)\,dx=a^2$.

❸❶ Έστω $f:[0,2\alpha]\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση όπου $\alpha>0$. Να δείξετε ότι

$$\int_0^{\alpha}\big(f(x)+f(x+\alpha)\big)\,dx=\int_0^{2\alpha}f(x)\,dx$$

Υπολογίστε το

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\eta\mu(x)+\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right)dx$$

❸❷ Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή πρώτη παράγωγο τέτοια ώστε

$$\int_0^2 e^{-x}\big(f(x)-f'(x)\big)\,dx=-1,\quad \kappa\alpha\iota\ \ f(2)=e^2.$$

Να βρείτε την τιμή της $f(0)$.

❸❸ Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια δις παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή δεύτερη παράγωγο τέτοια ώστε

$$\int_0^2 e^{-x}\big(f(x)-f''(x)\big)\,dx=-1,\qquad f'(2)+f(2)=e^2$$

και $f'(0)=0$. Να βρείτε την τιμή της $f(0)$.

❸❹ Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια δις παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή δεύτερη παράγωγο και $R(f)=(0,+\infty)$. Αν επιπλέον ισχύει ότι

$$\begin{cases}\int_0^2\big(x\cdot f''(x)+2f'(x)\big)\,dx=1\\ \text{και}\\ f'(2)=\dfrac{f(0)}{2}\end{cases},$$

να δείξετε ότι $f(2)=1$

❸❺ Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια δις παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή δεύτερη παράγωγο και τέτοια ώστε $f(\pi)=1$ και

$$\int_0^\pi\big(f(x)+f''(x)\big)\,\eta\mu x dx=1.$$

Να δείξετε ότι $f(0)=0$.

❸❻ (α) Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή (πρώτη) παράγωγο. Να υπολογιστεί το

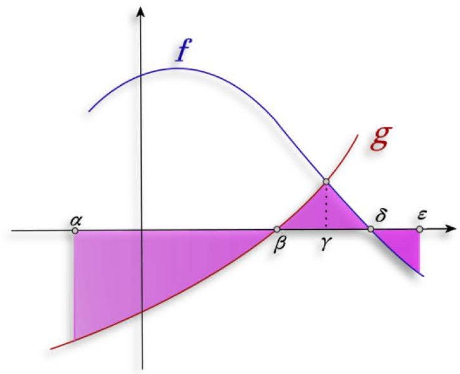
$$\int\frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}dx$$

(β) Έστω $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή (πρώτη) παράγωγο. Αν ισχύει ότι

$$\lim_{x\to a}f(x)=-\infty,\qquad \lim_{x\to\beta}f(x)=+\infty$$

και $f'(x)\le 1+[f(x)]^2, \forall x\in(\alpha,\beta)$, να δείξετε ότι $\beta-\alpha\ge\pi$.

❸❼ Να εκφράσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους του πιο κάτω σχήματος με τη βοήθεια ολοκληρωμάτων των συναρτήσεων f και g.



(ακολουθούν ασκήσεις από το 6.2 του παλιού βιβλίου)

❸❽ Να υπολογίσετε το εμβαδόν που περικλείεται από το διάγραμμα της συνάρτησης $y = -x^2 + 2x$ και τον άξονα των x.

❸❾ Να υπολογίσετε το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη $y = x^3 + 1$, τον άξονα των x και την ευθεία $x = 3$.

❹⓿ Να υπολογίσετε το εμβαδόν που περικλείεται από τις καμπύλες $y = x^2, y = x^2 - 4x + 4$ και τον άξονα των x.

❹❶ Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μέρους του επιπέδου που περικλείεται από τον άξονα των x και την καμπύλη $y = x^3 - 4x$.

❹❷ Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μέρους του επιπέδου που περικλείεται από την καμπύλη $y = x^3 + 1$, την ευθεία $y = 2$ και τον άξονα των y.

❹❸ Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μέρους του επιπέδου που περικλείεται από την καμπύλη $y = \ln x$, τους άξονες των συντεταγμένων και την ευθεία $y = 1$.

❹❹ Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μέρους του επιπέδου που περικλείεται από την καμπύλη $x = 2t^2, y = 4t, t \geq 0$, την ευθεία $x = 2$ και τον άξονα των x.

(ακολουθούν ασκήσεις από σελ. 151-153 του παλιού βιβλίου)

❹❺ Να υπολογίσετε το εμβαδόν που περικλείεται από τις καμπύλες

$$y = x^2 - 3x + 2 \quad και \quad y = x - x^2 + 2$$

❹❻ Αν το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = e^x$, τον άξονα των τετμημένων και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = 2\alpha$ για $\alpha > 0$ ισούται με 2 τ.μ., να δείξετε ότι $\alpha = \ln 2$.

❹❼ Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$. Η εφαπτομένη της στο σημείο Ρ(1,2) τέμνει τον άξονα των y στο σημείο Α. Αν Ο είναι η αρχή των αξόνων, να υπολογίσετε:

i) το εμβαδόν του μικτόγραμμου χωρίου ΟΡΑ

ii) τον όγκο του στερεού που παράγει το μικτόγραμμο χωρίο ΟΡΑ, όταν περιστραφεί γύρω από τον άξονα Oy.

❹❽ Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις $x^2 + y^2 \leq 8$ και $y \geq \frac{x^2}{2}$.

Οι ασκήσεις βρίσκονται λυμένες στο βιβλίο:

Πλήρης Θεωρία
με αντιπαραδείγματα
και εφαρμογές

Προτεινόμενες Λύσεις
των σχολικών ασκήσεων

250 λυμένες ασκήσεις

Λυμένα εξεταστικά
δοκίμια

Τυπολόγια/θεωρία
από προηγούμενες
τάξεις

Μέγεθος Α4 | 579 σελίδες

ISBN 978-9925-7485-7-0 μαλακό εξώφυλλο
ISBN 978-9925-7567-2-8 σκληρό εξώφυλλο