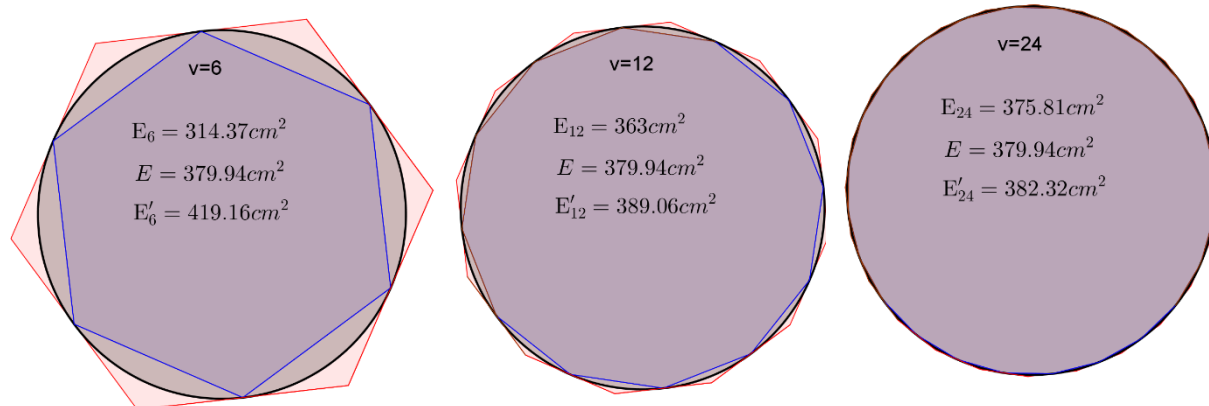


Εμβαδόν Κυκλικού Δίσκου (E)

Ο κύκλος (K, R) μαζί με όλα τα του εσωτερικά σημεία αποτελούν τον κυκλικό δίσκο με κέντρο K και ακτίνα R .

Ο μοναδικός θετικός αριθμός E τον οποίο προσεγγίζουν τα εμβαδά των εγγεγραμμένων (E_n) και περιγεγραμμένων (E'_n) στον κύκλο κανονικών πολυγώνων, καθώς το πλήθος των πλευρών τους αυξάνεται ($n \rightarrow +\infty$), είναι το **εμβαδόν του κυκλικού δίσκου**.



Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε την ακολουθία των εμβαδών $E_3, E_4, E_5, \dots, E_n, \dots$, των κανονικών πολυγώνων που είναι εγγεγραμμένα στον κύκλο (K, R) και έχουν αντίστοιχα 3, 4, 5, $\dots, n, \dots$, πλευρές.

Το όριο των περιμέτρων των πιο πάνω πολυγώνων είναι το μήκος του κύκλου (K, R) και το όριο των αποστημάτων τους είναι η ακτίνα του.

Δηλαδή, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \Gamma$ και $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = R$. Άρα,

$$E = \lim_{n \rightarrow +\infty} E_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} P_n \alpha_n = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \frac{1}{2} \Gamma \cdot R = \frac{1}{2} 2\pi R \cdot R = \pi R^2$$

Επομένως, το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου (O, R) δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{E = \pi R^2}$$

Παράδειγμα 1

Το μήκος κύκλου (K, R) είναι $24\pi \text{ cm}$. Να βρείτε:

(α) την ακτίνα του

(β) το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου (K, R) .

Λύση

(α) Είναι $\Gamma = 2\pi R \Leftrightarrow 24\pi = 2\pi R \Rightarrow R = 12 \text{ cm}$

(β) Αντικαθιστώντας στον πιο πάνω τύπο βρίσκουμε:

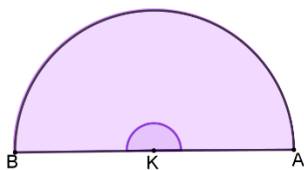
$$E = \pi R^2 = \pi \cdot 12^2 = 144\pi \text{ cm}^2$$

Εμβαδόν κυκλικού τομέα ($E_{τομ}$)

Το σύνολο των κοινών σημείων μιας επίκεντρης γωνίας $AOB = \mu^\circ$ και του κυκλικού δίσκου (K, R) λέγεται κυκλικός τομέας κέντρου K και ακτίνας R .

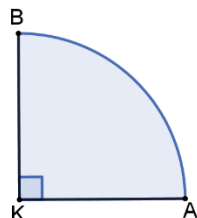
Βρίσκουμε διαδοχικά το εμβαδόν των ακόλουθων επίπεδων σχημάτων:

α) ημικυκλίου

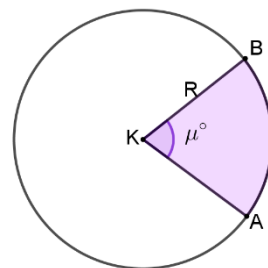


$$E_{\eta\mu} = \frac{\pi R^2}{2}$$

β) τετατοκυκλίου



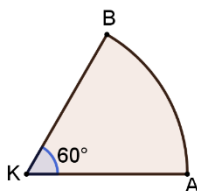
$$E_{\tau\epsilon\tau} = \frac{\pi R^2}{4}$$



γ) κυκλικού τομέα 1°

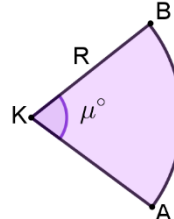
$$E = \frac{\pi R^2}{360^\circ}$$

δ) κυκλικού τομέα 60°



$$E = \frac{\pi R^2 \cdot 60^\circ}{360^\circ}$$

ε) κυκλικού τομέα μ°



$$E = \frac{\pi R^2 \cdot \mu^\circ}{360^\circ}$$

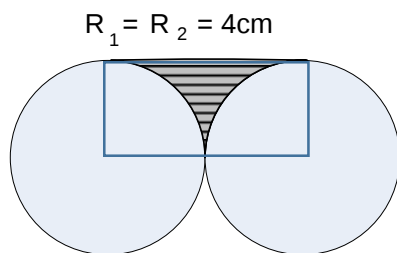
Επομένως, το εμβαδόν κυκλικού τομέα μ° δίνεται από τον τύπο:

$$E_{τομ} = \frac{\pi R^2 \cdot \mu^\circ}{360^\circ}$$

Παράδειγμα 2

Να βρείτε το εμβαδόν των πιο κάτω σκιασμένων περιοχών:

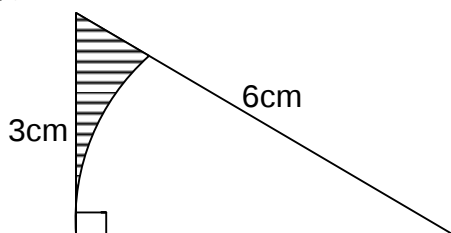
(α)



Λύση

$$E = E_{\sigma\rho\theta} - 2E_{\tau\epsilon\tau} = 8 \cdot 4 - 2 \cdot \frac{\pi R^2}{4} = 32 - \frac{\pi \cdot 4^2}{2} = (32 - 8\pi) \text{ cm}^2$$

(β)



Λύση

Παρατηρούμε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο οπότε εφαρμόζοντας το πυθαγόρειο θεώρημα βρίσκουμε την ακτίνα του κυκλικού τομέα:

$$R^2 + 3^2 = 6^2 \Leftrightarrow R^2 = 36 - 9 = 27 \Rightarrow R = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

Ο κυκλικός τομέας αντιστοιχεί σε γωνία $\mu = 30^\circ$

Με εφαρμογή του θεωρήματος των βρίσκουμε ότι

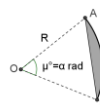
$$E = E_{\text{ορθ.τρ.}} - E_{\text{τομ}} = \frac{\beta \cdot v}{2} - \frac{\pi R^2 \cdot \mu^\circ}{360^\circ} = \frac{3\sqrt{3} \cdot 3}{2} - \frac{\pi \cdot (3\sqrt{3})^2 \cdot 30^\circ}{360^\circ} = \frac{9}{4} (2\sqrt{3} - \pi) \text{ cm}^2$$

Εμβαδόν κυκλικού τμήματος ($E_{\tau\mu}$)

Κυκλικό τμήμα ονομάζεται καθένα από τα δύο μέρη που βρίσκονται εκατέρωθεν μιας χορδής AB κύκλου (O, R) . Το εμβαδόν κυκλικού τμήματος που περιέχεται στην κυρτή γωνία

AOB υπολογίζεται με τη βοήθεια της ισότητας:

$$E_{\tau\mu} = E_{\text{τομ}(OAB)} - E_{\text{τρ.}OAB}$$



Παράδειγμα 3

Να βρείτε το εμβαδόν κυκλικού τμήματος που αντιστοιχεί σε πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας $R = 6 \text{ cm}$.

Λύση

Έχουμε ότι $AB = \lambda_6 = R \Rightarrow \mu = \angle AKB = \angle K_6 = \frac{360}{6} = 60^\circ$

$$E_{\tau\mu} = E_{\text{τομ}AKB} - E_{\text{τρ.}AKB} = \frac{\pi 6^2 \cdot 60^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \eta\mu 60^\circ$$

$$E_{\tau\mu} = (6\pi - 9\sqrt{3}) \text{ cm}^2$$

