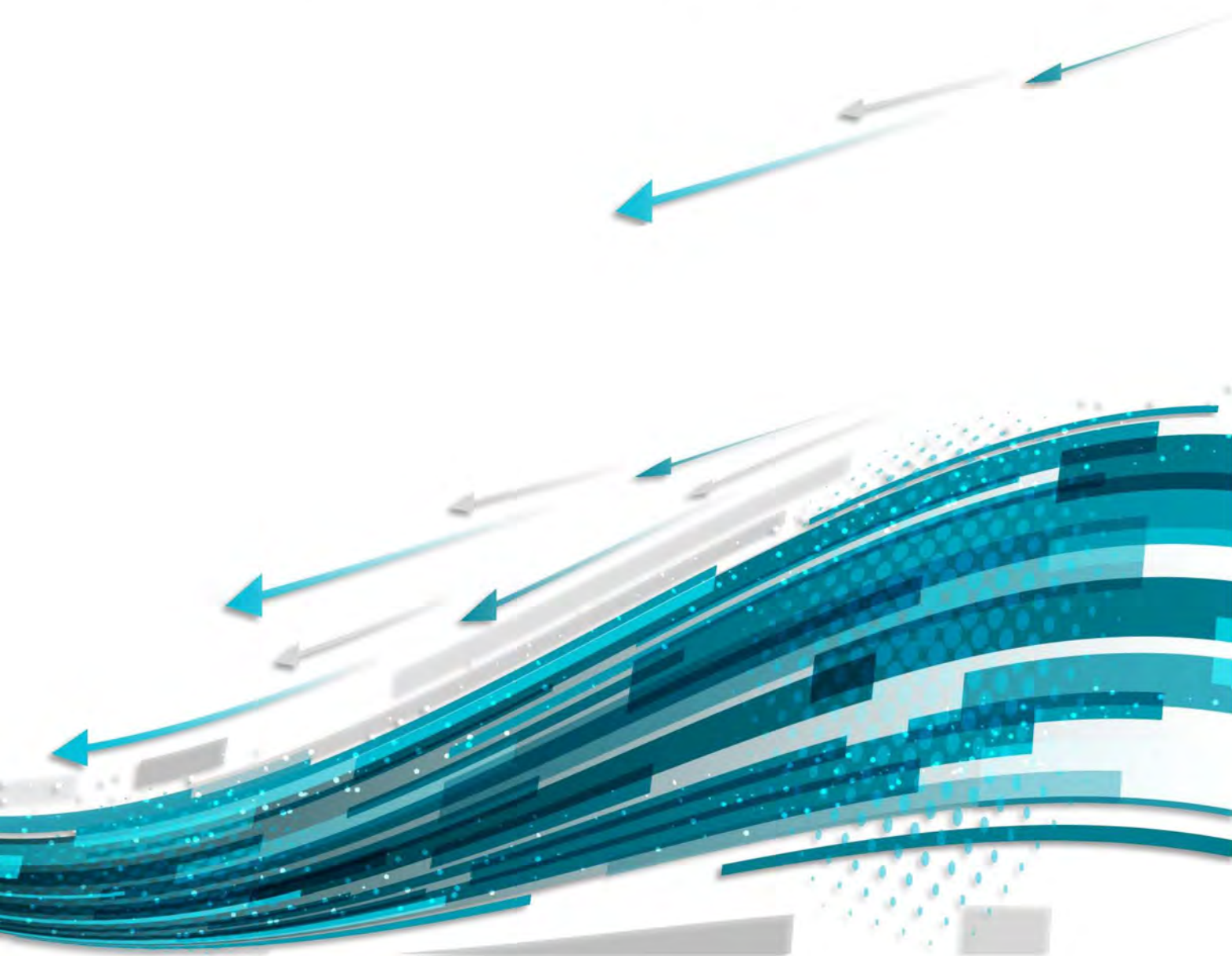


Ενδεικτικές Λύσεις

Δειγματικού [Μέρος Α]
του οδηγού σπουδών 2018



Μαθηματικά 8-2018-Δειγματικό για τις Εισαγωγικές Εξετάσεις (Από οδηγό σπουδών)
Μέρος Α

[Άσκηση 1]

Να βρείτε το

$$\int (3x^2 - \sin x + e^{2x} + \pi) dx$$

Λύση

Εκ της γραμμικότητας του αορίστου ολοκληρώματος,

$$\int (3x^2 - \sin x + e^{2x} + \pi) dx = \int 3x^2 dx - \int \sin x dx + \int e^{2x} dx + \pi \int dx = \frac{x^3}{3} + \eta \mu x + \frac{e^{2x}}{2} + \pi x + c$$

για κάποια (αυθαίρετη πραγματική) σταθερά c .

[Άσκηση 2]

Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

(α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου.

(β) Να γράψετε παραμετρικές εξισώσεις για τον πιο πάνω κύκλο.

Λύση

(α) Έχουμε

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + 4}{(x-2)^2} - 4 + \frac{y^2 - 6y + 9}{(y-3)^2} - 9 - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 25 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 5^2$$

και άρα το κέντρο του κύκλου είναι το $K(2,3)$ και η ακτίνα του $R = 5$

(β) παραμετρικές εξισώσεις για τον πιο πάνω κύκλο είναι οι

$$\begin{cases} x = x(t) = 5\sin(t) + 2 \\ y = y(t) = 5\eta\mu(t) + 3 \end{cases}, t \in [0, 2\pi)$$

[Άσκηση 3]

Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$2019x^{2018} - 2018(x+1)x^{2017} + x = 0$$

όπου $x \in \mathbb{R}$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0,1)$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = x^{2019} - (x+1)x^{2018} + x$$

Η f είναι παραγωγίσιμη παντού (ως πολυωνυμική) άρα παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,1)$ και συνεχής στο $[0,1]$. Επίσης, $f(0) = f(1) = 0$. Άρα, πληρούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle $\Rightarrow$ υπάρχει $\xi \in (0,1)$ με $f'(\xi) = 0$. Αλλά, $f'(c) = 0 \Leftrightarrow 2019\xi^{2018} - 2018(\xi+1)\xi^{2017} + \xi = 0$ και το ζητούμενο έπεται.

[Άσκηση 4]

(α) Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

(β) Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ και $f(a) = c, c \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$.

Λύση

(α) Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού:

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα (κλειστό) διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο $[a, \beta] - \{a, \beta\} \equiv (a, \beta)$. Τότε, υπάρχει $c \in (a, \beta)$ τέτοιος ώστε

$$f'(c) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}.$$

Γεωμετρική ερμηνεία:

Το ΘΜΤ μας λέει ότι σε κάποιο σημείο στο διάστημα (a, β) ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής ισούται με το μέσο ρυθμό μεταβολής σε όλο το διάστημα. Δηλ. μεταξύ οποιονδήποτε δύο σημείων του γραφήματος μιας συνάρτησης συνεχούς σε ένα (κλειστό) διάστημα $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμης στο (a, β) υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο στο οποίο η εφαπτομένη στο σημείο αυτό είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία a και β .(β) Έστωσαν $a, \beta \in \mathbb{R}$ με $a < \beta$. Από το ΘΜΤ θα υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιος ώστε

$$0 = f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}.$$

δηλ. $f(\beta) = f(a)$ και αφού τα a, β είναι τυχόντα, έχουμε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση, δηλ. υπάρχει $\kappa \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $f(x) = \kappa, \forall x \in \mathbb{R}$. Αλλά, $f(a) = c$ και αρα $\kappa = c$, δηλ. $f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$.

[Άσκηση 5]

Αν A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με

$$3P(A) = P(A), \quad 2P(B) = 1 + P(A) \quad \text{και} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{2}$$

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες:

$$(\alpha) P(A \cup B) \quad (\beta) P(A|B) \quad \text{και} \quad (\gamma) P(A \cap B)$$

Λύση

$$(\alpha) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Αλλά,

$$3P(A) = P(A) \Rightarrow 3(1 - P(A)) = P(A) \Rightarrow P(A) = \frac{3}{4}$$

και

$$P(A) = 1 - P(A) = \frac{1}{4}$$

Επίσης,

και

$$2P(B) = 1 + P(A) = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow P(B) = \frac{5}{8}$$

Συνεπώς,

$$P(A \cup B) = \frac{3}{4} + \frac{5}{8} - \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$$

(β) Είναι

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{8}} = \frac{4}{5}$$

(γ) Είναι

$$P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(A)$$

[Άσκηση 6]

Δίνεται η έλλειψη

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Να βρείτε την εξίσωση της χορδής της η οποία έχει μέσο το σημείο $A(1,2)$.

Λύση

Καταρχάς, το σημείο $A(1,2)$ βρίσκεται εντός της έλλειψης. Αν $B(x_B, y_B)$ και $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$ τα άκρα της χορδής αυτής, τότε

$$\frac{x_B + x_\Gamma}{2} = 1 \text{ και } \frac{y_B + y_\Gamma}{2} = 2$$

δηλ.

$$x_B + x_\Gamma = 2 \text{ και } y_B + y_\Gamma = 4 \quad (*)$$

Είναι

$$\lambda_{B\Gamma} = \frac{y_\Gamma - y_B}{x_\Gamma - x_B}$$

($x_\Gamma \neq x_B$ αφού η $B\Gamma$ δεν είναι κατακόρυφη, εφόσον το $A(1,2)$ δεν κείται πάνω στον άξονα των τετμημένων). Τώρα, αφού τα B και Γ ανήκουν στην έλλειψη, θα επαληθεύουν την εξίσωση αυτής, ήτοι:

$$\frac{x_B^2}{4} + \frac{y_B^2}{9} = 1 \text{ και } \frac{x_\Gamma^2}{4} + \frac{y_\Gamma^2}{9} = 1$$

δηλ.

$$9x_B^2 + 4y_B^2 = 36 \text{ και } 9x_\Gamma^2 + 4y_\Gamma^2 = 36$$

και αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε

$$9(x_B^2 - x_\Gamma^2) + 4(y_B^2 - y_\Gamma^2) = 0$$

δηλ.

$$9(x_B - x_\Gamma)(x_B + x_\Gamma) = -4(y_B - y_\Gamma)(y_B + y_\Gamma)$$

δηλ. (χρησιμοποιώντας την $(*)$)

$$18(x_B - x_\Gamma) = -16(y_B - y_\Gamma)$$

και αρα

$$\lambda_{B\Gamma} = \frac{y_\Gamma - y_B}{x_\Gamma - x_B} = -\frac{18}{16} = -\frac{9}{8}$$

Συνεπώς, η εξίσωση της χορδής της έλλειψης η οποία έχει μέσο το σημείο $A(1,2)$ είναι η

$$y - 2 = -\frac{9}{8}(x - 1)$$

δηλ. η

$$8y + 9x - 25 = 0$$

[Άσκηση 7]

Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{5x}{(x^2 + 4)(x + 1)} dx$$

Λύση

Είναι ($x \neq -1$)

$$\frac{5x}{(x^2 + 4)(x + 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{\Gamma}{x + 1}$$

Κατά τα γνωστά, ευρίσκουμε ότι $A = 1, B = 4, \Gamma = -1$, ήτοι

$$\frac{5x}{(x^2 + 4)(x + 1)} = \frac{x + 4}{x^2 + 4} - \frac{1}{x + 1}$$

και αρα

$$\int \frac{5x}{(x^2+4)(x+1)} dx = \int \frac{x+4}{x^2+4} dx - \int \frac{dx}{x+1}$$

Είναι

$$\begin{aligned} \int \frac{x+4}{x^2+4} dx &= \int \frac{x}{x^2+4} dx + 4 \int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+4} dx + \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+4)}{x^2+4} + 2 \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{2} \ln(x^2+4) + 2 \operatorname{τοξεφ}\left(\frac{x}{2}\right) + c_1 \end{aligned}$$

και

$$\int \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1| + c_2$$

Συνεπώς,

$$\int \frac{5x}{(x^2+4)(x+1)} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+4) + 2 \operatorname{τοξεφ}\left(\frac{x}{2}\right) - \ln|x+1| + c$$

όπου c αυθαίρετη πραγματική σταθερά.**[Άσκηση 8]**

Αν ισχύει

$$\int_0^{\alpha} 2xe^x dx = 4e^{\alpha} + \int_{\alpha}^0 x^2 e^x dx, \alpha > 0,$$

να υπολογίσετε την τιμή του α .

Λύση

$$\begin{aligned} \int_0^{\alpha} 2xe^x dx = 4e^{\alpha} + \int_{\alpha}^0 x^2 e^x dx &\Leftrightarrow \int_0^{\alpha} 2xe^x dx - \int_{\alpha}^0 x^2 e^x dx = 4e^{\alpha} \Leftrightarrow \int_0^{\alpha} 2xe^x dx + \int_0^{\alpha} x^2 e^x dx = 4e^{\alpha} \\ &\Leftrightarrow \int_0^{\alpha} (2xe^x + x^2 e^x) dx = 4e^{\alpha} \Leftrightarrow \int_0^{\alpha} (x^2 e^x)' dx = 4e^{\alpha} \\ &\Leftrightarrow [x^2 e^x]_0^{\alpha} = 4e^{\alpha} \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 e^{\alpha} = 4e^{\alpha} \Leftrightarrow \alpha^2 = 4 \Leftrightarrow \alpha = 2 \quad \text{αφού } \alpha > 0. \end{aligned}$$

[Άσκηση 9]

Να βρείτε πόσοι από τους εννιάψήφιους αριθμούς που σχηματίζονται χρησιμοποιώντας τους φυσικούς αριθμούς 123456789 χωρίς επανάληψη, έχουν το 2 πριν από το 3 και το 8 πριν από το 9 (π.χ. ο 145862973 είναι ένας τέτοιος αριθμός).

Λύση

Βήμα 1

Το 2 μπορεί να τοποθετηθεί στην 1η, 2η, ..., 8η θέση. Τότε, το 3 μπορεί να τοποθετηθεί στην 8η, 7η, ..., 1η θέση αντίστοιχα. Άρα, τα 2 και 3 μπορούν να τοποθετηθούν κατά

$$8+7+6+4+3+2+1=36 \text{ τρόπους.}$$

Βήμα 2

Το 8 (δεδομένου του προηγούμενο βήματος) μπορεί να τοποθετηθεί σε

όλα τα ψηφία 1-8

$$\hat{9} - \hat{2} - 1 = 6 \text{ θέσεις}$$

και άρα (ομοίως με πριν) τα ψηφία 8 και 9 μπορούν να τοποθετηθούν με $6+5+4+3+2+1=21$ τρόπους.

Βήμα 3

Τα υπόλοιπα 5 ψηφία (1,4,5,6,7) μπορούν να τοποθετηθούν με $5!$ τρόπους (όσο το πλήθος των αναδιατάξεών τους).

Άρα, από την **πολλαπλασιαστική αρχή**, το ζητούμενο πλήθος είναι

$$36 \cdot 21 \cdot 5! = 90270 \text{ αριθμοί}$$

[Άσκηση 10]⁷⁷

Δίνεται συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = 1 - \frac{x}{x^2 + a}$$

όπου $a \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι αν η συνάρτηση f έχει τοπικά ακρότατα, τότε δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Λύση

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f έχει τοπικά ακρότατα. Αν $a = 0$, τότε $D(f) = \mathbb{R}_*$ και

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

Αφού

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_*$$

τότε $f'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}_*$, άτοπο από το Θεώρημα του Fermat.

Αν $a > 0$, τότε $D(f) = \mathbb{R}$. Έτσι, για κάθε $x \in D(f) = \mathbb{R}$, τα όρια $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ είναι πεπερασμένα. Έτσι, δεν μπορεί να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Αν $a < 0$, τότε $D(f) = \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{|a|}\}$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $D(f)$ και παρουσιάζει πόλο τάξης 1 $\pm\sqrt{|a|}$. Είναι για $x \in \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{|a|}\}$

$$f'(x) = \frac{a - x^2}{(x^2 + a)^2}$$

Τότε από το Θεώρημα του Fermat, θα πρέπει $f'(x) = 0$, δηλ. πρέπει να έχει λύση η εξίσωση $a - x^2 = 0$, δηλ. πρέπει $a > 0$, άτοπο.

Σημείωση: για το αντίστροφο, δηλ. το ότι

αν η συνάρτηση f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη, τότε έχει τοπικά ακρότατα

έχουμε:

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Αν $a = 0$, τότε $D(f) = \mathbb{R}_*$ και

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

δηλ. η συνάρτηση έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη, τον άξονα των τεταγμένων, άτοπο.

Αν $a > 0$, τότε $D(f) = \mathbb{R}$. Έτσι, για κάθε $x \in D(f) = \mathbb{R}$ έχουμε $x^2 + a \neq 0$ και αρα η συνάρτηση δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Αν $a < 0$, τότε $D(f) = \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{|a|}\}$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $D(f)$ και παρουσιάζει πόλο τάξης 1 $\pm\sqrt{|a|}$. Είναι για $x \in \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{|a|}\}$

$$f'(x) = \frac{a - x^2}{(x^2 + a)^2}$$

και αρα $a - x^2 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{|a|}\}$. Κατα συνέπεια, $f'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{|a|}\}$ και το αποτέλεσμα έπεται από το Θεώρημα του Fermat.

⁷⁷ Ίδιο με θέμα του [Μαθηματικά 4/2001]. Επίσης, σημειώστε ότι ισχύει και η αντίστροφη κατεύθυνση.

Οι παρακάτω ασκήσεις έχουν λυθεί σύμφωνα με την ύλη του Νέου Αναλυτικού προγράμματος και τις συνέπειες αυτού. Σε κάθε λύση γίνεται αναφορά στα αποτελέσματα που έχουν χρησιμοποιηθεί.

Οι λύσεις αυτές δεν συμβαδίζουν κατ'ανάγκη με τις οδηγίες λύσης του ΥΠΠ.

Σκοπός των λύσεων είναι ο έλεγχος των γνώσεων του εξεταζομένου.

Για σχόλια/παρατηρήσεις:

Ιωακείμ Ι.



yiannisioa@hotmail.com



/yiannisioak