

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ_ΕΝΟΤΗΤΑ 10: ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Οι μαθητές μας, μπορούν να διαβάσουν από το πιο πάνω σχολικό εγχειρίδιο και να λύσουν πρώτα τα ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ και τις δραστηριότητες που αντιστοιχούν στις παραγράφους (10.1, 10.2, 10.3, 10.4), βασιζόμενοι στα λυμένα παραδείγματα του βιβλίου. Συνοπτική περιγραφή της ύλης υπάρχει στον Οδηγό Παγκυπρίων Εξετάσεων 2020, που αναρτήθηκε. Πολύ χρήσιμη αναφορά για το θεωρητικό πλαίσιο με κατάλληλα παραδείγματα είναι το Αναλυτικό Πρόγραμμα με σχετική αναφορά στους Δείκτες Επιτυχίας Επάρκειας (ΔΕΕ). Σχετικές ασκήσεις μπορούν να βρουν και στα θέματα Παγκυπρίων Εξετάσεων προηγούμενων ετών, τα οποία βρίσκονται αναρτημένα στην ιστοσελίδα της Υπηρεσίας Εξετάσεων.

- Από το σχολικό εγχειρίδιο, τόμος Δ', **Ενότητα 10 – ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ** το οποίο βρίσκεται και αναρτημένο στην ηλεκτρονική διεύθυνση

<http://mathm.schools.ac.cy/index.php/el/yliko/didaktiko-yliko>

ΕΝΟΤΗΤΑ 10

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

10.1 Εισαγωγή στη Συνδυαστική

10.1.1 Αρχή Αθροίσματος

10.1.2 Πολλαπλασιαστική Αρχή

10.2 Μεταθέσεις

10.2.1 Το n παραγοντικό,

10.2.2 Μεταθέσεις

10.2.3 Κυκλικές μεταθέσεις

10.2.4 Επαναληπτικές μεταθέσεις

10.3 Διατάξεις

10.3.1 Απλές διατάξεις

10.3.2 Επαναληπτικές διατάξεις

10.4 Συνδυασμοί

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ_ΕΝΟΤΗΤΑ 10: ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Ορισμός: Το n παραγοντικό ($n!$)

Το n παραγοντικό με $n \in \mathbb{N}$ και $n > 1$ ισούται με το γινόμενο των n πρώτων θετικών ακεραίων και συμβολίζεται με $n!$. Δηλαδή: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$,

$n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

Ειδικές περιπτώσεις: $1! = 1$ και $0! = 1$

A. Αρχή της Απαρίθμησης:

Αν μια διαδικασία μπορεί να αναλυθεί σε n διαδοχικές φάσεις και κάθε φάση μπορεί να γίνει με $k_1, k_2, \dots, k_n$ τρόπους αντίστοιχα, τότε η διαδικασία μπορεί να ολοκληρωθεί με $k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$ τρόπους.

Παράδειγμα 1:

Έχω 5 πουκάμισα και 3 παντελόνια. Πόσους συνδυασμούς μπορώ να κάνω με αυτά τα ρούχα;

Απάντηση:

$5 \cdot 3 = 15$ συνδυασμούς.

Σημείωση:

Σε μια άσκηση που ζητείται να βρούμε πόσους αριθμούς μπορώ να δημιουργήσω χρησιμοποιώντας κάποια ψηφία αν υπάρχει κάποιος περιορισμός (π.χ. άρτιοι, μεγαλύτεροι από κάποιο αριθμό, ...) τότε για να λύσω αυτό το πρόβλημα **ξεκινώ από το ψηφίο στο οποίο υπάρχει περιορισμός**. Εάν δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός τότε δεν έχει σημασία από ποιο ψηφίο θα ξεκινήσω. Από όποιο ψηφίο και αν ξεκινήσω θα πάρω το ίδιο αποτέλεσμα.

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ_ΕΝΟΤΗΤΑ 10: ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Παράδειγμα 2:

Πόσους τριψήφιους μπορώ να σχηματίσω χρησιμοποιώντας τα ψηφία 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , αν: **(α)** Επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίου;

(β) Δεν επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίου;

Λύση:

Ε	Δ	Μ
5	5	5

(α)

Απάντηση: $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ τριψήφιοι

Ε	Δ	Μ
3	4	5

(β)

Απάντηση: $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ τριψήφιοι

Παράδειγμα 3:

Δίνονται τα ψηφία 0 , 1 , 2 , 3 , 4. Να βρείτε πόσους άρτιους τριψήφιους μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας αυτά τα ψηφία:

(α) Αν επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίου.

(β) Αν δεν επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίου.

Λύση:

Ασκήσεις:

1. Από μια οικοδομική επιχείρηση που απασχολεί 5 εργοδηγούς, 15 οικοδόμους και 30 εργάτες, πρόκειται να επιλεγεί μια τριμελής αντιπροσωπία η οποία να αποτελείται από ένα εργοδηγό, έναν οικοδόμο και έναν εργάτη. Με πόσους τρόπους μπορεί να συγκροτηθεί η αντιπροσωπία;
2. Σε μια βιβλιοθήκη υπάρχουν 10 βιβλία της Ελληνικής γλώσσας, 15 της Αγγλικής και 10 της Γερμανικής. Κατά πόσους τρόπους μπορούμε 3 βιβλία, ένα από κάθε γλώσσα;
3. Πόσους διψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας τα ψηφία
1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , αν:
(α) Επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίου.
(β) Δεν επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίου.
4. Δίνονται τα ψηφία 1 , 2 , 4. Πόσοι αριθμοί μεταξύ του 10 και του 300 μπορούν να σχηματιστούν με τα πιο πάνω ψηφία, αν κάθε ψηφίο μπορεί να επαναληφθεί πολλές φορές;

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ_ΕΝΟΤΗΤΑ 10: ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

5. Πόσους φυσικούς αριθμούς μικρότερους του 6000 μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία 2, 3, 4, 7, αν κάθε ψηφίο μπορεί να επαναληφθεί πολλές φορές;
6. Πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί μπορούν να γίνουν με τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5, αν επιτρέπεται η επανάληψη των ψηφίων; Πόσοι από αυτούς είναι περιττοί;
7. Πόσοι τριψήφιοι αριθμοί μπορούν να σχηματιστούν από τους ακέραιους 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, αν πρέπει:
- (α) Και τα τρία ψηφία να είναι διαφορετικά;
 - (β) Και τα τρία ψηφία να είναι τα ίδια;
 - (γ) Ο αριθμός να είναι μεγαλύτερος του 600;
 - (δ) Και τα τρία ψηφία να είναι τα ίδια και ο αριθμός να είναι περιττός;
8. Πόσους τριψήφιους περιττούς αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας τα ψηφία 3, 4, 6, 7, 9, αν δεν επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίου;
9. Να βρεθεί το πλήθος όλων των αριθμών που είναι μεγαλύτεροι από το 1000 και σχηματίζονται από τα ψηφία 0, 2, 3, 4, αν:
- (α) Δεν επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίου.
 - (β) Επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίου (τετραψήφιοι).
10. Με τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5 σχηματίζονται εξαψήφιοι αριθμοί χωρίς επανάληψη. Πόσοι από αυτούς:
- (α) Διαιρούνται με το 5;

Γ 'ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ_ΕΝΟΤΗΤΑ 10: ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

(β) Διαιρούνται με το 2;

(γ) Διαιρούνται με το 2 και το 5;

11. (α) Πόσους τριψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία

0 , 1 , 2 , 3 , 4 αν δεν επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίων;

(β) Πόσοι από τους πιο πάνω αριθμούς είναι άρτιοι;

B. Μεταθέσεις:

Μετάθεση n διαφορετικών αντικειμένων λέγεται κάθε τοποθέτηση των n αντικειμένων πάνω σε ευθεία γραμμή. Το πλήθος των μεταθέσεων n διαφορετικών αντικειμένων συμβολίζεται με M_n και δίνεται από τον τύπο:

$$M_n = n!$$

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ_ΕΝΟΤΗΤΑ 10: ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Παράδειγμα 1:

Να βρεθεί με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν σε ένα παγκάκι 4 παιδιά.

Απάντηση:

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \text{ τρόποι}$$

Παράδειγμα 2:

Δίνεται η λέξη ΤΡΑΠΕΖΙ. Να βρείτε:

(α) Το πλήθος όλων των αναγραμματισμών.

(β) Πόσοι αναγραμματισμοί αρχίζουν από Π.

(γ) Πόσοι από αυτούς τους αναγραμματισμούς έχουν τα φωνήεντα μαζί.

Απάντηση:

(α) ΤΡΑΠΕΖΙ $M_7 = 7!$

(β) ΠΤΡΑΕΖΙ $M_6 = 6!$ (Το Π παραμένει σταθερό στην πρώτη θέση και αλλάζουν θέσεις τα άλλα 6 γράμματα. Άρα 6!)

(γ) ΑΕΙΤΡΠΖ $M_5 \cdot M_3 = 5! \cdot 3!$ (Θεωρώ το κουτάκι σαν ένα πράγμα. Βλέπω ότι εξωτερικά έχω 5 πράγματα, το κουτάκι και τα 4 σύμφωνα. Άρα 5! . Μετά μπαίνω μέσα στο κουτάκι το οποίο έχει 3 γράμματα και αλλάζουν θέσεις με 3! τρόπους)

Γ 'ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ_ΕΝΟΤΗΤΑ 10: ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Ασκήσεις:

1. Πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης ΔΟΥΛΕΙΑ υπάρχουν; Πόσοι από αυτούς αρχίζουν από Δ και τελειώνουν σε Α;
2. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν 6 διαφορετικά μπουκάλια από κρασί να τοποθετηθούν σε σειρά πάνω σε ένα ράφι;
3. Πόσοι από τους εξαψήφιους που μπορούν να κατασκευαστούν με τα ψηφία 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6, έχουν τα ψηφία 1 , 2 , 3 συνεχόμενα, αν δεν επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίου;
4. Πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης ΚΑΛΟΣ υπάρχουν; Από αυτές πόσες αρχίζουν με Κ, πόσες με Λ και πόσες τελειώνουν με Σ;
5. Κατά πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν 5 τόμοι ενός συγγράμματος σε μια βιβλιοθήκη;
6. Μια συμφωνική ορχήστρα πρόκειται να εκτελέσει 6 διαφορετικές συνθέσεις σε μια συναυλία. Κατά πόσους τρόπους μπορεί να εκτελεσθεί αυτό το πρόγραμμα;
7. Κατά πόσους τρόπους μπορούν 5 παιδιά, 3 αγόρια και 2 κορίτσια, να καθίσουν σε ένα καναπέ με 5 θέσεις, αν δεν επιτρέπεται αγόρι να καθίσει δίπλα από αγόρι, ούτε κορίτσι δίπλα από κορίτσι;
8. Σε μια διεθνή σύσκεψη συμμετέχουν 5 Αμερικάνοι και 4 Γερμανοί. Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν στη σειρά έτσι ώστε:
(α) Τα μέλη της ίδιας εθνικότητας να κάθονται μαζί;
(β) Οι Γερμανοί να κάθονται μαζί;
9. Σε ένα ράφι βιβλιοθήκης θα τοποθετήσουμε 4 διαφορετικά βιβλία Λογιστικής, 3 διαφορετικά βιβλία Φυσικής και ορισμένα διαφορετικά βιβλία Μουσικής, έτσι ώστε τα βιβλία της κάθε ειδικότητας να είναι μαζί. Αν διαπιστώσουμε ότι υπάρχουν 5184 δυνατές τοποθετήσεις , πόσα είναι τα βιβλία της Μουσικής;

Γ 'ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ_ΕΝΟΤΗΤΑ 10: ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

10. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε σε μια βιβλιοθήκη 4 βιβλία Χημείας, 3 βιβλία Ιστορίας και 5 βιβλία Φυσικής έτσι ώστε τα βιβλία της ίδιας κατηγορίας να είναι μαζί;
11. Με πόσους τρόπους μπορούν 6 παιδιά να τοποθετηθούν σε σειρά αν 2 συγκεκριμένα παιδιά δεν πρέπει να είναι το ένα δίπλα στο άλλο;
12. Πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης ΠΟΤΑΜΙ μπορούν να γίνουν; Πόσοι από αυτούς τους αναγραμματισμούς έχουν το Α στην αρχή και το Ι στο τέλος;
13. Οι αριθμοί εγγραφής αυτοκινήτων είναι εξαψήφιοι. Τα τρία πρώτα ψηφία τα παίρνουμε από τα γράμματα Α, Β, Γ και τα επόμενα τρία από τους αριθμούς 0, 1, 2, 3. Πόσους αριθμούς αυτοκινήτων μπορούμε να φτιάξουμε αν όλα τα ψηφία δεν επαναλαμβάνονται και το αριθμητικό μέρος δεν αρχίζει από το 0;

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ_ΕΝΟΤΗΤΑ 10: ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Γ. Κυκλικές Μεταθέσεις:

Κυκλική Μετάθεση ν διαφορετικών αντικειμένων λέγεται κάθε τοποθέτηση ν αντικειμένων σε κύκλο κατά μια ορισμένη φορά.

Το πλήθος K_n των κυκλικών μεταθέσεων ν διαφορετικών αντικειμένων δίνεται

από τον τύπο: $K_n = (n-1)!$

Σημείωση:

Όταν θέλω να τοποθετήσω σε ένα τμήμα του κύκλου ορισμένα διαφορετικά αντικείμενα τότε αυτό γίνεται με απλές μεταθέσεις και όχι με κυκλικές μεταθέσεις. Δηλαδή, όταν θα τοποθετήσω κάποια διαφορετικά αντικείμενα κάπου όπου υπάρχει αρχή και τέλος τότε αυτό γίνεται με μεταθέσεις.

Παράδειγμα 1:

Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν 8 άτομα γύρω από ένα κυκλικό τραπέζι;

Απάντηση:

$$K_8 = (8-1)! = 7!$$

Παράδειγμα 2:

Σε μια σύσκεψη συμμετέχουν 4 Έλληνες και 3 Ιταλοί. Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν σε ένα στρογγυλό τραπέζι:

(α) Χωρίς περιορισμό;

(β) Τα μέλη της ίδιας εθνικότητας να κάθονται μαζί;

(γ) Οι Ιταλοί να κάθονται μαζί;

(δ) Οι Έλληνες να μην κάθονται μαζί;

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ_ΕΝΟΤΗΤΑ 10: ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Απάντηση:

Ασκήσεις:

1. Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν σε ένα κυκλικό τραπέζι σε μια διάσκεψη οι αντιπρόσωποι 7 χωρών;
2. Με πόσους τρόπους μπορούν 6 άτομα να καθίσουν γύρω από ένα κυκλικό τραπέζι; Σε πόσους από αυτούς τους τρόπους 3 συγκεκριμένα άτομα κάθονται σε συνεχόμενα καθίσματα;
3. Κατά πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν 10 άτομα σε ένα κυκλικό τραπέζι, έτσι ώστε να κάθονται μαζί ένα αντρόγυνο και τρεις φίλοι;
4. Σε μια διάσκεψη συμμετέχουν 3 Γάλλοι, 2 Άγγλοι και 5 Έλληνες.
(α) Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν σε ένα κυκλικό τραπέζι αν πρέπει τα άτομα τις ίδιας εθνικότητας να κάθονται μαζί;
(β) Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν σε ένα κυκλικό τραπέζι αν πρέπει οι 3 Γάλλοι να κάθονται πάντα μαζί;
(γ) Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν σε κυκλικό τραπέζι αν οι 2 Άγγλοι δεν πρέπει να κάθονται μαζί;
5. Με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν 8 άτομα σε ένα κυκλικό τραπέζι έτσι ώστε 2 συγκεκριμένα άτομα να μην κάθονται μαζί;

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ_ΕΝΟΤΗΤΑ 10: ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Δ. Επαναληπτικές Μεταθέσεις:

Επαναληπτική Μετάθεση ν αντικειμένων που δεν είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους, λέγεται κάθε τοποθέτηση των ν αντικειμένων πάνω σε ευθεία γραμμή.

Γενικά, το πλήθος M_v^ε των επαναληπτικών μεταθέσεων ν αντικειμένων από τα

οποία τα κ είναι τα ίδια, δίνεται από τον τύπο:

$$M_v^\varepsilon = \frac{v!}{k!}$$

Γενικότερα, το πλήθος των επαναληπτικών μεταθέσεων M_v^ε ν αντικειμένων από τα οποία k_1 αντικείμενα είναι τα ίδια μεταξύ τους και διαφορετικά από τα άλλα, k_2 επίσης τα ίδια μεταξύ τους και διαφορετικά από τα άλλα, . . . , τα k_λ επίσης τα ίδια μεταξύ τους και διαφορετικά από τα άλλα, δίνεται από τον τύπο:

$$M_v^\varepsilon = \frac{v!}{k_1! k_2! \dots k_\lambda!}$$

Παράδειγμα:

Πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ υπάρχουν;

Απάντηση :

Η λέξη έχει 10 γράμματα από τα οποία 2 είναι Σ, 2 είναι Ι και 3 είναι Τ. Άρα:

$$M_{10}^\varepsilon = \frac{10!}{2!2!3!} = 151200 \text{ είναι οι αναγραμματισμοί της λέξης ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ.}$$

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ_ΕΝΟΤΗΤΑ 10: ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Ασκήσεις:

1. Να βρεθεί το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης MISSISSIPPI.
2. Σε πόσους από τους αναγραμματισμούς της λέξης ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ είναι:
(α) Τα δύο Σ διαδοχικά;
(β) Τα Κ και Η διαδοχικά;
3. Να βρεθεί το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ. Πόσοι από αυτούς τους αναγραμματισμούς έχουν όλα τα φωνήεντα μαζί;
4. Δίνεται η λέξη ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟ. Να βρεθούν:
(α) Πόσοι είναι όλοι οι αναγραμματισμοί.
(β) Πόσοι από αυτούς έχουν τα φωνήεντα μαζί.
(γ) Πόσοι από αυτούς έχουν τα φωνήεντα και τα σύμφωνα μαζί.
(δ) Πόσοι από αυτούς δεν αρχίζουν από Α και δεν τελειώνουν σε Ο.
(ε) Πόσοι από αυτούς δεν έχουν τα φωνήεντα μαζί.
5. Να βρεθεί το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης ΑΝΕΞΕΤΑΣΕΙΣ. Πόσοι από αυτούς αρχίζουν με Α και τελειώνουν σε Α;
6. Να βρείτε όλους τους αναγραμματισμούς της λέξης ΑΓΡΑΜΜΑΤΟΣ. Πόσοι από αυτούς τους αναγραμματισμούς έχουν τα τρία Α μαζί;
7. Πόσους άρτιους εξαψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία: 1, 2, 2, 3, 3, 3;
8. Πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης ΕΥΤΥΧΙΑ υπάρχουν; Σε πόσους από αυτούς τα σύμφωνα χωρίζονται από τρία άλλα γράμματα;
9. (α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης: ΠΑΡΑΒΟΛΗ.
(β) Να βρείτε πόσοι από τους αναγραμματισμούς του ερωτήματος (α) έχουν τα δύο Α συνεχόμενα.

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ_ΕΝΟΤΗΤΑ 10: ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

(γ) Να βρείτε πόσοι από τους αναγραμματισμούς του ερωτήματος (α) αρχίζουν από Α και τελειώνουν σε Α.

Ε. Διατάξεις:

- **Διατάξεις n διαφορετικών αντικειμένων ανά k ($k \leq n$)** λέγονται οι τρόποι με τους οποίους μπορώ να πάρω k αντικείμενα από τα n και να τα τοποθετήσω

σε ευθεία γραμμή.

$$\Delta_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- **Επαναληπτικές Διατάξεις n αντικειμένων ανά k :**

$$\delta_k^n = n^k$$

Σημείωση:

Οι ασκήσεις που λύνονται με την μέθοδο των Διατάξεων λύνονται και με την μέθοδο της Αρχής της Απαρίθμησης (κουτάκια). Σε τέτοια μοντέλα ασκήσεων είναι πιο εύκολο να χρησιμοποιούμε την Αρχή της Απαρίθμησης.

Παράδειγμα 1:

Κατά πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν 5 άτομα σε 8 συνεχόμενα καθίσματα;

Απάντηση:

$$\Delta_5^8 = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!} = 6720$$

(Τα πέντε άτομα επιλέγουν πέντε από τα οκτώ καθίσματα και κάθονται σε αυτά σε σειρά)

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ_ΕΝΟΤΗΤΑ 10: ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

(Σημείωση: Η άσκηση αυτή λύνεται και με την Αρχή της Απαρίθμησης. Δηλαδή: Ο 1^{ος} έχει 8 επιλογές για να καθίσει, ο 2^{ος} έχει 7 επιλογές, ο 3^{ος} έχει 6 επιλογές, ο 4^{ος} έχει 5 επιλογές και ο 5^{ος} έχει 4 επιλογές. Άρα : $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720$)

Παράδειγμα 2:

Πόσους τετραψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, αν:

(α) Επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίων;

(β) Δεν επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίων;

Απάντηση:

$$(α) \delta_4^7 = 7^4 = 2401$$

$$(β) \Delta_4^7 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = 840$$

Ασκήσεις:

1. Πόσοι αριθμοί μικρότεροι του 5000 μπορούν να σχηματιστούν από τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5, χωρίς επανάληψη του ιδίου ψηφίου;
2. Πόσοι αριθμοί μεγαλύτεροι του 20 μπορούν να σχηματιστούν με τα ψηφία 2, 3, 4, αν δεν επιτρέπεται η επανάληψη του ιδίου ψηφίου;
3. Κατά πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν 10 άτομα σε 12 συνεχόμενα αριθμημένα καθίσματα;
4. Πόσους τετραψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε με τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6, αν:
(α) Επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίου;
(β) Δεν επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίου;
5. Στις μαθητικές εκλογές μιας τάξης υπάρχουν 10 υποψήφιοι για τις θέσεις του προέδρου, του αντιπροέδρου, του γραμματέα, του ταμεία και του μέλους (1 μέλος). Πόσα διαφορετικά μαθητικά συμβούλια μπορούν να συγκροτηθούν;

Γ 'ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ_ΕΝΟΤΗΤΑ 10: ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

6. Δίνονται τα ψηφία 2 , 4 , 6 , 7 , 8 , 9.

Πόσους τριψήφιους μπορούμε να σχηματίσουμε, αν:

(α) Επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίου;

(β) Δεν επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίου;

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ_ΕΝΟΤΗΤΑ 10: ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Στ. Συνδυασμοί:

Συνδυασμός n διαφορετικών αντικειμένων ανά k λέγεται κάθε ομάδα που μπορεί να σχηματιστεί παίρνοντας k από τα n αντικείμενα **χωρίς** να κατατάσσονται σε σειρά.

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

Ιδιότητες:

1. $\binom{n}{0} = 1$

2. $\binom{n}{1} = n$

3. $\binom{n}{n} = 1$

4. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

5. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Παράδειγμα:

Πέντε άτομα θα επιλεγούν για να αποτελέσουν μια ομάδα που θα παρακολουθήσει ένα συνέδριο. Η επιλογή θα γίνει μεταξύ 6 γυναικών και 10 αντρών. Κατά πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η ομάδα, αν:

(α) Θα συμμετέχουν 2 γυναίκες και 3 άντρες;

(β) Θα συμμετέχουν τουλάχιστον 4 γυναίκες;

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ_ΕΝΟΤΗΤΑ 10: ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Λύση:

$$(α) \binom{6}{2} \cdot \binom{10}{3} = 1800 \text{ ομάδες}$$

(β) Τουλάχιστον 4 γυναίκες σημαίνει το λιγότερο 4 γυναίκες. Δηλαδή: 4 ή 5 γυναίκες.

$$\binom{6}{4} \cdot \binom{10}{1} + \binom{6}{5} \cdot \binom{10}{0} = 156 \text{ ομάδες.}$$

(Το $\binom{10}{0}$ μπορώ να το παραλείψω διότι είναι ίσο με 1)

Σημείωση:

- Όταν σε μια άσκηση λέει **και** τότε γράφω (κάνω) **πολλαπλασιασμό**.
- Όταν σε μια άσκηση λέει **ή** τότε γράφω (κάνω) **πρόσθεση**.

Ασκήσεις:

1. Με πόσους τρόπους μπορεί να επιλεγεί μια ομάδα 5 μαθητών από μια τάξη με 30 μαθητές;
2. Με πόσους τρόπους μπορούν να εκλεγούν 4 χαρτιά από μια τράπουλα των 52 χαρτιών, αν σε αυτά θα περιλαμβάνεται:
 - (α) Το πολύ ένας άσσος;
 - (β) Τουλάχιστον ένας άσσος;
3. Σε ένα κουτί υπάρχουν 5 κόκκινες, 4 μαύρες και 2 άσπρες σφαίρες. Με πόσους τρόπους μπορώ να πάρω 3 μπάλες:
 - (α) Χωρίς περιορισμό;
 - (β) Από το ίδιο χρώμα; (και οι 3 μπάλες να είναι του ιδίου χρώματος)
 - (γ) Να μην πάρω κόκκινη μπάλα;
 - (δ) Να πάρω τουλάχιστον μια κόκκινη μπάλα;

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ_ΕΝΟΤΗΤΑ 10: ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

4. Μια επιτροπή 4 ατόμων θα εκλεγεί από μια ομάδα 8 αντρών και 4 γυναικών.
Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η επιτροπή, αν θα πρέπει να περιλαμβάνει:
- (α) Ακριβώς μια γυναίκα;
 - (β) Τουλάχιστον μια γυναίκα;
 - (γ) Καμία γυναίκα;
5. (α) Με πόσους τρόπους μπορώ να επιλέξω 3 γράμματα από την λέξη ΠΕΤΡΑ;
(β) Πόσες λέξεις τριών γραμμάτων από την λέξη ΠΕΤΡΑ μπορώ να σχηματίσω;
6. Ένας διαθέτει ανά ένα από τα εξής σταθμά 1gr , 2gr , 4gr , 8gr , 16gr , 32gr .
Να βρείτε το πλήθος όλων των διάφορων βαρών που μπορεί να σχηματίσει χρησιμοποιώντας ένα τουλάχιστον από τα πιο πάνω σταθμά.
7. Κατά πόσους τρόπους μπορεί να εκλεγεί μια πενταμελής επιτροπή από 10 μαθητές και 6 μαθήτριες, αν στην επιτροπή πρέπει να είναι 3 μαθητές και 2 μαθήτριες; Σε πόσες από τις επιτροπές περιλαμβάνεται ένας συγκεκριμένος μαθητής;
8. Με πόσους τρόπους μπορούμε να χωρίσουμε 10 παιδιά σε:
- (α) 2 ομάδες των 6 και 4 παιδιών αντίστοιχα;
 - (β) 2 ομάδες των 5 παιδιών;
9. Τρεις μαθητές της Α' τάξης, πέντε της Β' τάξης και έξι της Γ' τάξης ενός Λυκείου είναι υποψήφιοι για μια επιτροπή τεσσάρων ατόμων που θα εκπροσωπήσει το σχολείο τους σε ένα μαθηματικό διαγωνισμό. Να υπολογίσετε με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματισθεί η επιτροπή αυτή, αν:
- (α) μπορεί να επιλεγεί οποιοσδήποτε μαθητής ανεξάρτητα από την τάξη του.
 - (β) κάθε τάξη του σχολείου πρέπει να εκπροσωπείται στην επιτροπή αυτή.

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ_ΕΝΟΤΗΤΑ 10: ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

Ασκήσεις Επανάληψης:

1. Χρησιμοποιώντας τα ψηφία 1 , 2 , 3 , 5 , 7 , 8 , χωρίς να επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίων, να βρεθεί το πλήθος των τριψήφιων αριθμών:
(α) Χωρίς περιορισμό.
(β) Άρτιοι τριψήφιοι.
(γ) Τριψήφιοι > 200
(δ) Άρτιοι τριψήφιοι > 200
Τα ίδια ερωτήματα να απαντηθούν και για την περίπτωση που επιτρέπονται οι επαναλήψεις ψηφίων.
2. Πόσοι δυνατοί αναγραμματισμοί της λέξης ΚΥΠΡΙΟΣ υπάρχουν;
(α) Πόσες λέξεις έχουν τα ψηφία Κ και Σ στις δύο άκρες;
(β) Πόσες λέξεις αρχίζουν και τελειώνουν με φωνήεν;
(γ) Σε πόσες λέξεις τα φωνήεντα είναι συνεχόμενα;
(δ) Σε πόσες λέξεις τα φωνήεντα είναι μαζί και τα σύμφωνα είναι μαζί;
3. Πενταμελής οικογένεια κάθεται σε 5 διαδοχικές θέσεις θεάτρου.
(α) Πόσοι είναι όλοι οι δυνατοί τρόποι;
(β) Σε πόσους τρόπους οι δύο γονείς κάθονται στα δύο άκρα;
(γ) Σε πόσες περιπτώσεις τα δύο αγόρια της οικογένειας δεν κάθονται μαζί;
4. Πόσοι είναι οι αναγραμματισμοί της λέξης ΜΠΑΝΑΝΑ; Σε πόσους αναγραμματισμούς τα τρία Α είναι συνεχόμενα;
5. Με πόσους τρόπους μπορώ να επιλέξω 3 γράμματα από την λέξη ΟΛΥΜΠΙΑ και να τα βάλω σε σειρά;

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ_ΕΝΟΤΗΤΑ 10: ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

6. Δίνονται τα ψηφία 0, 1, 2, 5, 6, 9. Αν δεν επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίων να βρεθούν:
- (α) Πόσοι τριψήφιοι μπορούν να σχηματιστούν.
 - (β) Πόσοι από αυτούς είναι περιττοί.
 - (γ) Πόσοι από αυτούς είναι άρτιοι.
7. Από 6 κορίτσια και 4 αγόρια πόσες τετραμελείς επιτροπές μπορούν να συσταθούν ώστε:
- (α) Να μην υπάρχει κανένας περιορισμός;
 - (β) Τρία μέλη να είναι κορίτσια;
 - (γ) Να υπάρχει τουλάχιστον ένα παιδί από κάθε φύλο;
 - (δ) Να περιλαμβάνονται ο Αντρέας και η Μαρία;
 - (ε) Από τους Κώστα και Ελένη που είναι αδέρφια να περιλαμβάνεται μόνο ο ένας;
8. Δίνεται η λέξη ΤΗΛΕΦΩΝΟ. Να βρεθούν:
- (α) Το πλήθος όλων των αναγραμματισμών.
 - (β) Πόσοι από αυτούς έχουν τα φωνήεντα μαζί.
 - (γ) Πόσοι από αυτούς αρχίζουν από Ν.
9. Μεταξύ 10 μαθητών οι τέσσερις έχουν το ίδιο ανάστημα και οι υπόλοιποι διαφορετικό.
- Να βρείτε:
- (α) Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 2 μαθητές με το ίδιο ανάστημα, (β) Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 3 μαθητές με διαφορετικό ανάστημα;

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ_ΕΝΟΤΗΤΑ 10: ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

- 10.** Δίνονται τα ψηφία 1 , 3 , 4 , 7 , 9. Αν επιτρέπεται η επανάληψη, να βρεθούν:
- (α) Πόσοι αριθμοί μεταξύ του 20 και του 8500 μπορούν να σχηματισθούν.
 - (β) Πόσοι αριθμοί μικρότεροι του 500 μπορούν να σχηματισθούν.
- 11.** Σε ένα σχολείο υπάρχουν 8 Μαθηματικοί, 6 Φιλολόγοι, 4 Φυσικοί και 2 Χημικοί. Με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματισθεί μια πενταμελής επιτροπή αν σε αυτή θα πρέπει να υπάρχει ένας καθηγητής από κάθε ειδικότητα;
- 12.** Δίνονται τα ψηφία 1 , 2 , 4 , 5 , 6 , 8 . Να βρεθούν:
- (α) Πόσοι τετραψήφιοι μπορούν να σχηματισθούν χωρίς επανάληψη ψηφίου.
 - (β) Πόσοι από αυτούς αρχίζουν από 5.
 - (γ) Πόσοι από αυτούς τελειώνουν σε 4.
- 13.** Σε ένα εστιατόριο οι πελάτες μπορούν να κάνουν τους δικούς τους συνδυασμούς από λαχανικά για να συνοδεύσουν ένα πιάτο με ψητό κοτόπουλο. Το εστιατόριο διαθέτει 8 είδη λαχανικών και οι πελάτες μπορούν να επιλέξουν είτε 2, είτε 3, είτε 4 είδη. Να υπολογίσετε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να συνοδευτεί το κοτόπουλο.
- 14.** Δίνονται τα ψηφία 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6.
- (i) Αν επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίων να βρεθούν:
 - (α) Πόσοι τριψήφιοι μπορούν να σχηματιστούν.
 - (β) Πόσοι από αυτούς είναι άρτιοι.
 - (γ) Πόσοι από αυτούς διαιρούνται με το 5.
 - (δ) Πόσοι από αυτούς διαιρούνται με το 2 και το 5.
 - (ε) Πόσοι από αυτούς διαιρούνται μόνο με το 5 και όχι με το 2.

Γ 'ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ_ΕΝΟΤΗΤΑ 10: ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

(στ) Πόσοι από αυτούς διαιρούνται μόνο με το 2 και όχι με το 5.

(ii) Αν δεν επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίων να υπολογιστούν οι παραπάνω περιπτώσεις.

15. Σε περιφέρεια κύκλου είναι τοποθετημένα 10 σημεία. Πόσες χορδές μπορούν να σχηματιστούν με αυτά τα σημεία;

16. Σε μια ερώτηση πολλαπλής επιλογής (multiple choice) υπάρχουν 1 σωστή και 4 λανθασμένες απαντήσεις. Με πόσους τρόπους μπορεί κάποιος να απαντήσει λάθος σε 2 τέτοιες ερωτήσεις;

17. Σε μια διάσκεψη της Ευρωπαϊκής Ένωσης οι αντιπρόσωποι κάθε χώρας αντάλλαξαν μεταξύ τους 66 χειραψίες. Πόσοι ήταν οι αντιπρόσωποι;

18. Σε ένα ράφι υπάρχουν 8 διαφορετικά βιβλία μεταξύ των οποίων και 2 βιβλία του Σαμαράκη. Παίρνουμε 5 από αυτά. Σε πόσες πεντάδες:

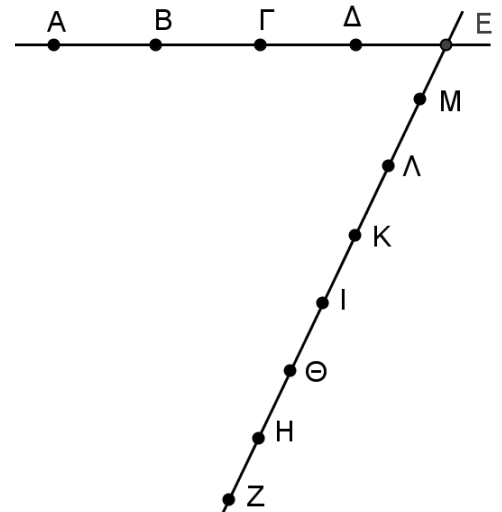
(α) Δεν υπάρχει βιβλίο του Σαμαράκη;

(β) Θα υπάρχει ένα βιβλίο του Σαμαράκη;

19. Δεδομένου ότι ένα τρίγωνο μπορεί να σχηματισθεί ενώνοντας 3 μη συνευθειακά σημεία, να βρεθεί το πλήθος των διαφόρων τριγώνων που μπορούν να σχηματισθούν από τα σημεία A, B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ, Ι, Κ, Λ, Μ του διπλανού σχήματος, αν:

(α) Το E δεν χρησιμοποιηθεί.

(β) Το E επιτρέπεται να χρησιμοποιηθεί.



Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ_ΕΝΟΤΗΤΑ 10: ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

- 20.** Μια ομάδα από εννέα άτομα θα ταξιδέψει με δύο αυτοκίνητα από τα οποία το ένα δεν μπορεί να πάρει περισσότερα από 7 άτομα και το άλλο όχι περισσότερα από 5 άτομα. Με πόσους τρόπους μπορεί να ταξιδέψει η ομάδα;
- 21.** Παίρνοντας 3 φωνήεντα από τα $\alpha, \epsilon, \eta, \omicron$ και 2 σύμφωνα από τα θ, π, κ , πόσες λέξεις των 5 γραμμάτων μπορούμε να σχηματίσουμε;
- 22.** Ένας μαθητής έχει 5 διαφορετικού χρώματος πουκάμισα και τότε δεν φοράει το ίδιο πουκάμισο σε δύο συνεχόμενες μέρες. Σε μια βδομάδα κατά πόσους τρόπους μπορεί να τα φορέσει, αν το άσπρο πουκάμισο θα το φορέσει πρώτο;
- 23.** Πόσους εξαψήφιους αριθμούς πολλαπλάσια του 5 μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5, 6, αν δεν επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίου;
- 24.** Κάποιος θυμάται ότι ο τετραψήφιος κωδικός ασφαλείας του χρηματοκιβωτίου του περιέχει τα ψηφία 1, 2, 4, 7. Δεν θυμάται όμως τον κωδικό. Πόσες το πολύ δοκιμές απαιτούνται για να βρεθεί ο κωδικός;
- 25.** Πόσους διαφορετικούς πενταψήφιους μπορούμε να γράψουμε με τα ψηφία 1, 2;
- 26.** Πόσες μεταθέσεις των στοιχείων: 1, 2, 3, ..., n υπάρχουν στις οποίες το 1 δεν κατέχει την 1^η θέση;

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ_ΕΝΟΤΗΤΑ 10: ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

27. Τα γράμματα Α , Β , Γ , κ , λ , μ , ν , θα τοποθετηθούν σε σειρά. Να βρείτε με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό, αν:
- (α) Δεν υπάρχει περιορισμός.
- (β) Το πρώτο γράμμα της σειράς είναι κεφαλαίο.
28. Δίνεται η λέξη ΑΝΑΛΟΓΙΑ. Πόσες λέξεις των τεσσάρων γραμμάτων σχηματίζονται;
29. Σε ένα πάρτι βρίσκονται 3 παντρεμένα ζευγάρια, 5 ελεύθεροι άντρες και 2 ελεύθερες γυναίκες. Να βρείτε με πόσους τρόπους μπορούμε να σχηματίσουμε ομάδα 4 ατόμων:
- (α) Χωρίς περιορισμό.
- (β) Να περιέχει ένα τουλάχιστον άντρα και μια τουλάχιστον γυναίκα.
- (γ) Να περιέχει ακριβώς ένα παντρεμένο ζευγάρι.
30. Έξι άτομα μπαίνουν στο ασανσέρ μιας δεκαώροφης πολυκατοικίας. Να βρείτε με πόσους τρόπους:
- (α) Θα κατέβουν όλοι στον ίδιο όροφο.
- (β) Θα κατέβουν όλοι ακριβώς σε 2 ορόφους.
31. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{12!}{3! 10!} + \frac{7!}{5! 2!}$
32. Να υπολογίσετε το ν στις πιο κάτω περιπτώσεις:
- (α) $\binom{\nu}{5} = \binom{\nu}{7}$
- (β) $\binom{\nu}{5} = \frac{3}{4} \cdot \binom{\nu}{6}$

Γ ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ_ΕΝΟΤΗΤΑ 10: ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

$$(\gamma) \binom{v}{2} = \binom{v+1}{2} - 10$$

$$(\delta) \binom{v}{v-2} = 10$$

$$(\epsilon) \binom{v+4}{v+1} - \binom{v+3}{3} = 15 \cdot (v+2)$$

33. Αν: $\Delta_2^v = 30$ και $\Delta_2^k = 12$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \binom{v}{k} + \binom{v-1}{k+1}$$