

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ  
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ-ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

## ΕΝΟΤΗΤΑ 2

Απόλυτη Τιμή  
Πραγματικού Αριθμού



|                             |                                                                                                                                                                                                                                         |
|-----------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Συγγραφή:</b>            | Δημητρίου-Καραντάνου Τέρψα<br>Ιωάννου Ιωάννης<br>Λοϊζιάς Σωτήρης<br>Παπαγιάννης Κωνσταντίνος<br>Παραγύιου Θεόκλητος<br>Σαλονικίδης Γιάννης<br>Σεργίδης Μάριος<br>Στυλιανού Ανδρέας<br>Τιμοθέου Σάββας                                   |
| <b>Συντονιστής:</b>         | Χρίστου Κωνσταντίνος, <i>Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου</i>                                                                                                                                                                             |
| <b>Εποπτεία:</b>            | Καλλεπίτη Ευτυχία, <i>Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης</i><br>Φιλίππου Ανδρέας, <i>Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης</i><br>Γιασουμής Νικόλας, <i>Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης</i><br>Παπαγιάννη Όλγα, <i>Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης</i> |
| <b>Συντονισμός έκδοσης:</b> | Χρίστος Παρπούνας, <i>Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων</i>                                                                                                                                                                  |

Α΄ Έκδοση 2016

Εκτύπωση: ΚΩΝΟΣ ΑΤΔ

© ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ  
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΚΥΠΡΟΥ  
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ISBN: 978-9963-54-048-8

# ΕΝΟΤΗΤΑ 2

## ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

### ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

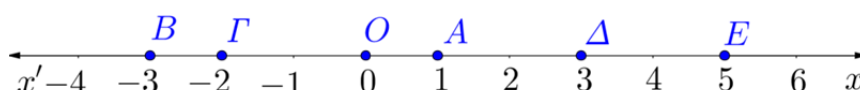
**2.1 Η έννοια της απόλυτης τιμής**

**2.2 Ιδιότητες απολύτων τιμών**

## 2.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΑΠΟΛΥΤΗΣ ΤΙΜΗΣ

### ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ

Στο πιο κάτω σχήμα στο σημείο  $O$  του άξονα των πραγματικών αριθμών απεικονίζεται ο αριθμός μηδέν, στο σημείο  $A$  ο αριθμός  $+1$  (δηλαδή το διάνυσμα  $\overrightarrow{OA}$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα  $x'x$ ) και στα σημεία  $B, \Gamma, \Delta$  και  $E$  απεικονίζονται οι αριθμοί  $-3, -2, +3$  και  $+5$ , αντίστοιχα.



Να βρείτε στον άξονα  $x'x$ :

- Τα σημεία  $Z$  και  $H$  στα οποία απεικονίζονται οι αριθμοί  $\sqrt{2}$  και  $-\sqrt{5}$ .
- Την απόσταση των παραπάνω σημείων από το σημείο  $O$ , δηλαδή να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων  $OA, OB, O\Gamma, O\Delta, OE$ .

Όπως ήδη γνωρίζουμε από το Γυμνάσιο, την απόσταση, για παράδειγμα, του σημείου  $B$  από την αρχή  $O$ , δηλαδή το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος  $OB$ , την ονομάζουμε απόλυτη τιμή του αριθμού  $-3$  και τη συμβολίζουμε με  $|-3|$ .

Έτσι έχουμε:

- $|-3| = (OB) = 3$
- $|-2| = (O\Gamma) = 2$
- $|+3| = (O\Delta) = 3$
- $|+5| = (OE) = 5$
- $|\sqrt{2}| = (OZ) = \sqrt{2}$
- $|-\sqrt{5}| = (OH) = \sqrt{5}$

Γενικά, ονομάζουμε **απόλυτη τιμή** του πραγματικού αριθμού  $x$  την απόσταση  $d(x)$  του αριθμού  $x$  του άξονα των πραγματικών αριθμών από την αρχή  $O$  και τη συμβολίζουμε με  $|x|$ .

Η γεωμετρική έννοια της απόλυτης τιμής πραγματικού αριθμού διατυπώνεται αλγεβρικά με τον πιο κάτω ορισμό:

### Ορισμός

**Απόλυτη τιμή** πραγματικού αριθμού  $x$  ορίζεται ο μη αρνητικός αριθμός

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{αν } x \geq 0 \\ -x, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

---

### Παράδειγμα 1

Να γράψετε τις πιο κάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτα:

$$\alpha) |3 - \pi|, \quad \beta) |\sqrt{5} - 2|, \quad \gamma) |2 - \sqrt{5}|, \quad \delta) |a^2 + 1|, a \in \mathbb{R}$$

**Λύση:**

(α)  $|3 - \pi| = -(3 - \pi) = \pi - 3$ , γιατί η παράσταση  $3 - \pi$  είναι αρνητική.

(β)  $|\sqrt{5} - 2| = \sqrt{5} - 2$ , γιατί η παράσταση  $\sqrt{5} - 2$  είναι θετική.

(γ)  $|2 - \sqrt{5}| = -(2 - \sqrt{5}) = \sqrt{5} - 2$ , γιατί η παράσταση  $2 - \sqrt{5}$  είναι αρνητική.

(δ)  $|a^2 + 1| = a^2 + 1$ , γιατί  $a^2 + 1 > 0, \forall a \in \mathbb{R}$ .

---

### Σημείωση:

Απόσταση δύο σημείων  $A$  και  $B$  του άξονα των πραγματικών αριθμών, τα οποία απεικονίζουν τους πραγματικούς αριθμούς  $x$  και  $y$ , αντίστοιχα, ονομάζουμε τον μη αρνητικό αριθμό

$$d(x, y) = |x - y| = |y - x|,$$

που ισούται με το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος  $AB$ .

Για παράδειγμα, ο αριθμός  $|x - 2|$ ,  $x \in \mathbb{R}$  εκφράζει την απόσταση του σημείου του άξονα  $x'x$ , στο οποίο απεικονίζεται ο αριθμός  $x \in \mathbb{R}$ , από το σημείο στο οποίο απεικονίζεται ο αριθμός 2.

---

### Παράδειγμα 2

Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

$$(\alpha) |\sqrt{3}x - 2| = 0$$

$$(\beta) |x - 2| = 3$$

$$(\gamma) |5x + 6| = -7$$

$$(\delta) ||x| + 1| = 5$$

**Λύση:**

$$(\alpha) |\sqrt{3}x - 2| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

(β) **Α' τρόπος:**

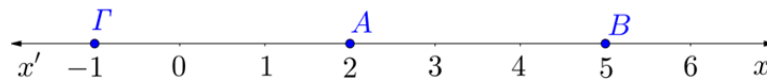
$$|x - 2| = 3 \Leftrightarrow x - 2 = 3 \vee x - 2 = -3$$

$$\Leftrightarrow x = 3 + 2 \vee x = -3 + 2$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = -1$$

Η πρόταση « $p$  ή  $q$ »,  
συμβολικά  $p \vee q$ ,  
ονομάζεται  
διάξευξη των  $p, q$ .

**Β' τρόπος:**



Αν το σημείο  $A$  απεικονίζει τον αριθμό 2, τότε αναζητούμε σημεία της ευθείας  $x'x$ , που να απέχουν 3 μονάδες από το σημείο  $A$ , όπως φαίνεται στο πιο πάνω σχήμα. Τα σημεία  $B$  και  $\Gamma$  απέχουν 3 μονάδες από το  $A$ . Άρα, λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί που αντιστοιχούν στα σημεία  $B$  και  $\Gamma$ , δηλαδή,  $x = 5$  ή  $x = -1$ .

(γ)  $|5x + 6| = -7$

Η εξίσωση είναι αδύνατη στο  $\mathbb{R}$ , γιατί η απόλυτη τιμή κάθε πραγματικού αριθμού είναι μη αρνητικός αριθμός.

(δ)  $||x| + 1| = 5 \Leftrightarrow |x| + 1 = 5$ , γιατί  $|x| + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow |x| = 4$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 4$$

---

### Παράδειγμα 3

Να δείξετε ότι:  $\left(\frac{x}{|x|} - 1\right)(|x| + x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$

**Λύση:**

✦ Αν  $x > 0$ , τότε  $\left(\frac{x}{|x|} - 1\right)(|x| + x) = \left(\frac{x}{x} - 1\right)(x + x)$   
 $= (1 - 1) \cdot 2x$   
 $= 0$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \text{ Αν } x < 0, \text{ τότε } \left( \frac{x}{|x|} - 1 \right) (|x| + x) &= \left( \frac{x}{-x} - 1 \right) (-x + x) \\ &= (-1 - 1) \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Επομένως, η παραπάνω σχέση είναι αληθής  $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

#### Παράδειγμα 4

Να λύσετε το σύστημα  $(\Sigma)$ : 
$$\begin{cases} |x| + |y| = 10 & (1) \\ |x| - |y| = 4 & (2) \end{cases}$$

**Λύση:**

$$\begin{aligned} (\Sigma): \begin{cases} |x| + |y| = 10 \\ |x| - |y| = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2|x| = 14 \\ 2|y| = 6 \end{cases} && \text{(Προσθέτουμε και αφαιρούμε κατά μέλη} \\ &&& \text{τις εξισώσεις (1) και (2))} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |x| = 7 \\ |y| = 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \vee x = -7 \\ y = 3 \vee y = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα, λύσεις του  $(\Sigma)$  είναι:  $(x, y) \in \{(7, 3), (7, -3), (-7, 3), (-7, -3)\}$

## Δραστηριότητες

1. Να γράψετε τις πιο κάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτα:  
(α)  $|\sqrt{5} - 5|$   
(β)  $|\eta\mu x - 1| - |1 - \sigma\upsilon\nu x|, x \in \mathbb{R}$   
(γ)  $|\pi - 4| - |1 - \pi|$   
(δ)  $|- \kappa^2 - 1|, \kappa \in \mathbb{R}$   
(ε)  $|\lambda - 2|, \lambda \in [0, 4]$
2. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:  $A = |\sqrt{3} - 3| - |3 - \sqrt{3} + 1|$
3. Να αποδείξετε ότι η παράσταση  $K = |x - 1| + |x - 3|$ , με  $1 < x < 3$  είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής  $x$  (δηλαδή είναι σταθερή).
4. Αν  $a < 2 < \beta$ , να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:  
(α)  $A = |a - 2| + |\beta + 2| - 7$   
(β)  $B = |\beta - a| - |\beta - 2| + a - 1$
5. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:  
(α)  $|2x - 1| = 3$   
(β)  $|2x + 4| = -4$   
(γ)  $|x^2 - 2x - 12| = 12$   
(δ)  $\left| \frac{x+5}{2-x} \right| = 6$
6. Να γράψετε τις πιο κάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτα:  
(α)  $A = |x + 1| + |x - 1| - 2x + 3$   
(β)  $B = |1 - x| - |2 - x| + x$
7. Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει η παράσταση:  $A = \frac{a}{|a|} + \frac{\beta}{|\beta|}$ , με  $a\beta \neq 0$
8. Τι συμπεραίνετε για τους αριθμούς  $a$  και  $\beta$ , αν  $|a \cdot \beta| = -a \cdot \beta$ , με  $a, \beta \in \mathbb{R}$ ;

## 2.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΩΝ ΤΙΜΩΝ

Στη παράγραφο αυτή θα αναφερθούμε στις ιδιότητες της απόλυτης τιμής, τις οποίες εφαρμόζουμε στην επίλυση προβλημάτων.

### 2.2.1 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

- 1)  $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- 2)  $|x| = |-x|$  και  $|x - y| = |y - x|, \forall x, y \in \mathbb{R}$
- 3)  $|x| = \max\{-x, x\}, \forall x \in \mathbb{R}$
- 4)  $|x| \geq x$  και  $|x| \geq -x, \forall x \in \mathbb{R}$
- 5)  $|x| = \varepsilon \Leftrightarrow x = \varepsilon$  ή  $x = -\varepsilon$  με  $\varepsilon > 0$
- 6)  $|x|^2 = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- 7)  $|x| = |a| \Leftrightarrow x = a$  ή  $x = -a, a \in \mathbb{R}$
- 8)  $\sqrt{x^2} = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$
- 9)  $|x| \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$  με  $\varepsilon > 0$
- 10)  $|x| \geq \varepsilon \Leftrightarrow x \geq \varepsilon$  ή  $x \leq -\varepsilon$  με  $\varepsilon > 0$

#### Απόδειξη:

- 1) Αν  $x \geq 0$ , τότε  $|x| = x \geq 0$ .

Αν  $x < 0$ , τότε  $-x > 0$ . Επομένως,  $|x| = -x > 0$ .

Άρα, σε κάθε περίπτωση ισχύει  $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

- 2) Για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό  $x$  έχουμε:

$$|-x| = \begin{cases} -x, & -x \geq 0 \\ -(-x), & -x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow |-x| = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$$

Επομένως,  $|x| = |-x|, \forall x \in \mathbb{R}$ .

- 3) Ο  $\max\{-x, x\}$  είναι ο μεγαλύτερος αριθμός του ζεύγους των αντίθετων αριθμών  $-x$  και  $x$ . Δηλαδή, είναι ο μη αρνητικός αριθμός από τους δύο και άρα είναι η απόλυτη τιμή του  $x$ . Έτσι,  $|x| = \max\{-x, x\}, \forall x \in \mathbb{R}$ .
- 4) Από την ιδιότητα (3) έχουμε ότι  $|x| = \max\{-x, x\}$ . Δηλαδή, η απόλυτη τιμή του  $x$  είναι το μεγαλύτερο στοιχείο του συνόλου  $\{-x, x\}$  και συνεπώς θα είναι μεγαλύτερη ή ίση από κάθε στοιχείο του πιο πάνω συνόλου.

Άρα  $|x| \geq x$  και  $|x| \geq -x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

✦ Αν  $x > 0$ , τότε  $|x| = x$  και  $|x| > -x$ .

✦ Αν  $x < 0$ , τότε  $|x| > x$  και  $|x| = -x$ .

✦ Αν  $x = 0$ , τότε  $|x| = x$  και  $|x| = -x$ .

5)  $|x| = \varepsilon \Leftrightarrow x = \varepsilon$  ή  $x = -\varepsilon$  με  $\varepsilon > 0$  (Άμεση συνέπεια του ορισμού)

6)  $|x|^2 = |x| \cdot |x| = \begin{cases} x \cdot x = x^2, & \text{αν } x \geq 0 \\ (-x)(-x) = x^2, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$ , επομένως,  $|x|^2 = x^2$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$

7)  $|x| = |a| \Leftrightarrow |x|^2 = |a|^2$

$$\Leftrightarrow x^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - a)(x + a) = 0 \Leftrightarrow x = a \text{ ή } x = -a$$

8) Από τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας και της απόλυτης τιμής έχουμε:

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & \text{αν } x \geq 0 \\ -x, & \text{αν } x < 0 \end{cases} \text{ και } |x| = \begin{cases} x, & \text{αν } x \geq 0 \\ -x, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

Επομένως,  $\sqrt{x^2} = |x|$ .

9)  $|x| \leq \varepsilon \Leftrightarrow |x|^2 \leq \varepsilon^2$

(Υψώνουμε στο τετράγωνο,  $|x| \geq 0, \varepsilon > 0$ )

$$\Leftrightarrow x^2 \leq \varepsilon^2$$

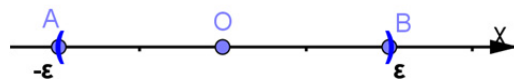
$$\Leftrightarrow x^2 - \varepsilon^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - \varepsilon)(x + \varepsilon) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$$

| $x$                                  | $-\infty$ | $-\varepsilon$ | $+\varepsilon$ | $+\infty$ |
|--------------------------------------|-----------|----------------|----------------|-----------|
| $(x - \varepsilon)(x + \varepsilon)$ | +         | 0              | 0              | +         |



10)  $|x| \geq \varepsilon \Leftrightarrow |x|^2 \geq \varepsilon^2$

$$\Leftrightarrow x^2 \geq \varepsilon^2 \Leftrightarrow x^2 - \varepsilon^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - \varepsilon)(x + \varepsilon) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\varepsilon \text{ ή } x \geq \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -\varepsilon] \cup (\varepsilon, +\infty]$$

---

### Παράδειγμα 1

Να λύσετε την εξίσωση:  $|x + 4| = 3x - 8$

**Λύση:**

Η πιο πάνω εξίσωση έχει λύση στο  $\mathbb{R}$ , αν  $3x - 8 \geq 0$  ή ισοδύναμα  $x \geq \frac{8}{3}$ .

$$|x + 4| = 3x - 8 \Leftrightarrow x + 4 = \pm(3x - 8)$$

$$\Leftrightarrow x + 4 = 3x - 8 \vee x + 4 = -(3x - 8)$$

$$\Leftrightarrow x - 3x = -4 - 8 \vee x + 4 = -3x + 8$$

$$\Leftrightarrow -2x = -12 \vee 4x = 4$$

$$\Leftrightarrow x = 6 \vee x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 6$$

Η λύση  $x = 1$  απορρίπτεται, αφού «απαιτούμε» να ισχύει  $x \geq \frac{8}{3}$ .

---

### Παράδειγμα 2

α) Να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς  $a$  και  $\beta$ , όταν  $|a| + |\beta - 1| = 0$ .

β) Να βρείτε τα  $x, y$  στην πιο κάτω εξίσωση:

$$|x - 3y + 1| + |2x + y - 5| = 0$$

**Λύση:**

α) Επειδή έχουμε άθροισμα μη αρνητικών αριθμών, πρέπει και οι δύο αριθμοί στο απόλυτο να ισούνται με το μηδέν.

$$\text{Συνεπώς: } (a = 0 \wedge \beta - 1 = 0) \Leftrightarrow (a = 0 \wedge \beta = 1)$$

Η πρόταση « $p$  και  $q$ »,  
συμβολικά  $p \wedge q$ ,  
ονομάζεται σύζευξη  
των  $p, q$ .

$$\beta) \quad |x - 3y + 1| + |2x + y - 5| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + 1 = 0 \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = -1 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 6y = 2 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7y = 7 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ 2x + 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ 2x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

### Παρατήρηση

Η έκφραση  $|a| + |b| \neq 0$  για δύο πραγματικούς αριθμούς  $a, b$  δηλώνει ότι ένας τουλάχιστον από αυτούς τους αριθμούς δεν ισούται με το μηδέν.

### Παράδειγμα 3

Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{2|x|+1}{3} - \frac{5-|x|}{2} = |x|$$

$$\beta) |x-2|^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\gamma) \sqrt{(x+2)^2} = 5$$

$$\delta) |x+4| = -3|x+1|$$

**Λύση:**

$$\alpha) \frac{2|x|+1}{3} - \frac{5-|x|}{2} = |x| \Leftrightarrow \frac{2\omega+1}{3} - \frac{5-\omega}{2} = \omega \quad (\text{Θέτω } |x| = \omega > 0)$$

$$\Leftrightarrow 2(2\omega + 1) - 3(5 - \omega) = 6\omega \quad (\text{Απαλοιφή παρονομαστών})$$

$$\Leftrightarrow 4\omega + 2 - 15 + 3\omega = 6\omega$$

$$\Leftrightarrow 4\omega + 3\omega - 6\omega = 13$$

$$\Leftrightarrow \omega = 13$$

$$\Leftrightarrow |x| = 13$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 13 \quad (\text{Ιδιότητα 5})$$

$$\beta) |x-2|^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 3x + 2 = -0 \quad (\text{Ιδιότητα 6})$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - 3x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-6)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 6 \vee x = 1$$

Άρα, το σύνολο λύσεων της εξίσωσης είναι το  $\{1, 6\}$ .

$$\gamma) \sqrt{(x+2)^2} = 3 \Leftrightarrow |x+2| = 3 \quad (\text{Ιδιότητα 8})$$

$$\Leftrightarrow x+2 = 3 \vee x+2 = -3 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -5$$

$$\delta) |x + 4| = -3|x + 1|$$

Η εξίσωση είναι αδύνατη, γιατί  $|x + 4| \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  και  $-3|x + 1| \leq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Μοναδική περίπτωση, που θα μπορούσε να είναι λύση, θα ήταν ο αριθμός που θα μηδένιζε και τις δύο παραστάσεις στα απόλυτα. Το Α' μέλος όμως, μηδενίζεται όταν  $x = -4$  και το Β' μέλος όταν  $x = -1$ . Άρα, δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός και επομένως δεν έχουμε καμία λύση.

### Παράδειγμα 4

Να λύσετε τις πιο κάτω ανισώσεις:

$$\alpha) |x| > 1$$

$$\beta) |3x + 6| \leq 9$$

$$\gamma) |3 - x| < 10$$

$$\delta) 2 \leq |x| \leq 4$$

$$\epsilon) 2 \leq |x - 5| \leq 4$$

**Λύση:**

$$\begin{aligned} \alpha) |x| > 1 &\Leftrightarrow x < -1 \vee x > 1 \\ &\Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \end{aligned}$$

(από ιδιότητα 10)

$$\begin{aligned} \beta) |3x + 6| \leq 9 &\Leftrightarrow -9 \leq 3x + 6 \leq 9 \\ &\Leftrightarrow -9 - 6 \leq 3x \leq 9 - 6 \\ &\Leftrightarrow -15 \leq 3x \leq 3 \\ &\Leftrightarrow -5 \leq x \leq 1 \\ &\Leftrightarrow x \in [-5, 1] \end{aligned}$$

(από ιδιότητα 9)

(Προσθέτουμε το  $-6$ )

(Διαιρούμε με  $3 > 0$ )

$$\begin{aligned} \gamma) |3 - x| < 10 &\Leftrightarrow -10 < 3 - x < 10 \\ &\Leftrightarrow -13 < -x < 7 \\ &\Leftrightarrow -7 < x < 13 \\ &\Leftrightarrow x \in (-7, 13) \end{aligned}$$

(από ιδιότητα 9)

(Προσθέτουμε το  $-3$ )

(Διαιρούμε με  $-1 < 0$  και αλλάζει η φορά)

$$\delta) 2 \leq |x| \leq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq 4 \\ \text{και} \\ |x| \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq 4 \\ \text{και} \\ x \geq 2 \vee x \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-4, -2] \cup [2, 4]$$

$$\epsilon) 2 \leq |x - 5| \leq 4$$

Από το (δ) έχουμε:

$$\begin{aligned} (x - 5) \in [-4, -2] \cup [2, 4] &\Leftrightarrow x \in [-4 + 5, -2 + 5] \cup [2 + 5, 4 + 5] \\ &\Leftrightarrow x \in [1, 3] \cup [7, 9] \end{aligned}$$

## Δραστηριότητες

1. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α)  $\frac{3|x|+1}{2} + \frac{2|x|-1}{3} = \frac{|x|+2}{4}$

(β)  $\frac{5-|1-3x|}{6} = 0$

(γ)  $x^2 - 3|x| + 2x - 6 = 0$

(δ)  $|3x - 4| = 3x + 5$

(ε)  $|x^2 - 1| = -3|x + 1|$

(στ)  $(x - 3)^2 - 4|x - 3| = 12$

2. Να λύσετε τις πιο κάτω ανισώσεις:

(α)  $|x + 6| < 3$

(β)  $|3x - 1| \geq 5$

(γ)  $|x - 11| \geq -10$

(δ)  $\frac{1}{|x-1|} < 2$

(ε)  $|3x| < |2x - 5|$

(στ)  $4 < |x - 2| < 9$

3. Για ποιες τιμές του  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $\sqrt{(x^2 - 5x + 6)^2} = x^2 - 5x + 6$ ;

4. Να βρείτε τους αριθμούς  $a$  και  $\beta$ , αν ισχύει:  $|a - 1| + |a - \beta - 4| = 0$

5. Αν  $|x + 2| < 2$ , να αποδείξετε ότι  $|3x - 2| < 14$ . Στη συνέχεια:

(α) Να αποδείξετε ότι:  $A(x) = |4x^2 - 4x + 1| - |x^2 + x + 1| = 3x^2 - 5x$

(β) Να λύσετε την εξίσωση:  $A(x) = 0$

6. Να αποδείξετε ότι:  $\forall x \in \mathbb{R}, -|x| \leq x \leq |x|$

7. Η απόσταση  $d$  σημείου  $T(x_1, y_1)$  από την ευθεία  $(\varepsilon): Ax + By + \Gamma = 0$  δίνεται από τον τύπο:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Να βρείτε σημεία της μορφής  $(2, y_1)$  που να απέχουν από την ευθεία  $4x + 3y - 1 = 0$  απόσταση  $d = 2$  μονάδες.

---

## 2.2.2 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΣ ΤΙΜΗΣ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

---

Για την απόλυτη τιμή αθροίσματος και γινομένου δύο πραγματικών αριθμών  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ισχύουν επιπλέον οι παρακάτω ιδιότητες :

- $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$
- $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}, \text{ με } \beta \neq 0$
- $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

### Απόδειξη:

- Θα δείξουμε ότι  $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ .

$$\begin{aligned} |\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta| &\Leftrightarrow (|\alpha \cdot \beta|)^2 = (|\alpha| \cdot |\beta|)^2 \\ &\Leftrightarrow (a \cdot \beta)^2 = |\alpha|^2 \cdot |\beta|^2 \\ &\Leftrightarrow (a \cdot \beta)^2 = \alpha^2 \cdot \beta^2, \text{ αληθής} \end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση είναι αληθής για όλους τους πραγματικούς αριθμούς  $a, \beta$  και επειδή οι συνεπαγωγές είναι αντιστρεπτές, τότε και η αρχική σχέση είναι αληθής, δηλαδή,

$$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Η πιο πάνω ιδιότητα ισχύει και για περισσότερους από δύο πραγματικούς αριθμούς:

$$|a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdot \dots \cdot |a_n| \text{ με } \alpha_i \in \mathbb{R}, i=1, 2, \dots, n \quad (*)$$

- 
- Η απόδειξη της ιδιότητας  $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$ , με  $\beta \neq 0$ , αφήνεται ως άσκηση.

(Υπόδειξη :  $\alpha = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \beta$ )

- 
- Θα δείξουμε ότι  $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ .

$$\begin{aligned} |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| &\Leftrightarrow |\alpha + \beta|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2 && \text{(Υψώνουμε στο τετράγωνο,} \\ &&& \text{όροι μη αρνητικοί)} \\ &\Leftrightarrow (a + \beta)^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2|\alpha| \cdot |\beta| \\ &\Leftrightarrow a^2 + \beta^2 + 2a\beta \leq a^2 + \beta^2 + 2|a\beta| \\ &\Leftrightarrow a\beta \leq |a\beta|, \text{ αληθής.} \end{aligned}$$

Επειδή η τελευταία σχέση είναι αληθής  $\forall a, \beta \in \mathbb{R}$  και τα βήματα είναι αντιστρεπτά, συμπεραίνουμε ότι και η αρχική σχέση είναι αληθής, δηλαδή,

$$|a + \beta| \leq |a| + |\beta|, \quad \forall a, \beta \in \mathbb{R}$$

Η ισότητα στην πιο πάνω σχέση ισχύει μόνο στην περίπτωση που  $a\beta \geq 0$ , δηλαδή, όταν  $a, \beta$  είναι ομόσημοι αριθμοί.

Η πιο πάνω ιδιότητα ισχύει και για περισσότερους από δύο πραγματικούς αριθμούς:

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| \quad \text{με } a_i \in \mathbb{R}, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (**)$$

### Παρατήρηση

Οι πιο πάνω ιδιότητες (\*) και (\*\*) μπορούν να αποδειχθούν με την μέθοδο της τέλειας επαγωγής.

### Παράδειγμα 1

Αν  $|a - \beta| = |a| + |\beta|$  και  $|a\beta| \neq 0$ , να αποδείξετε ότι οι αριθμοί  $a$  και  $\beta$  είναι ετερόσημοι.

#### Λύση:

Ισοδύναμα, θέλουμε να αποδείξουμε ότι για οποιουσδήποτε δύο μη αρνητικούς αριθμούς  $a$  και  $\beta$  ισχύει ότι:

$$|a - \beta| = |a| + |\beta| \Leftrightarrow a\beta < 0$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} |a - \beta| = |a| + |\beta| &\Leftrightarrow |a - \beta|^2 = (|a| + |\beta|)^2 && \text{(Υψώνουμε στο τετράγωνο)} \\ &\Leftrightarrow a^2 - 2a\beta + \beta^2 = |a|^2 + 2|a||\beta| + |\beta|^2 && \text{(Εκτελούμε τις πράξεις)} \\ &\Leftrightarrow a^2 - 2a\beta + \beta^2 = a^2 + 2|a\beta| + \beta^2 && \text{(Εφαρμογή ιδιοτήτων)} \\ &\Leftrightarrow |a\beta| = -a\beta && \text{(Εκτελούμε τις πράξεις)} \\ &\Leftrightarrow a\beta \leq 0 && \text{(Συνέπεια του ορισμού της απόλυτης τιμής)} \end{aligned}$$

Όμως, λόγω της αρχικής υπόθεσης έχουμε  $a\beta \neq 0$ .

Άρα,  $a\beta < 0$  και έτσι οι μη αρνητικοί αριθμοί  $a$  και  $\beta$  είναι ετερόσημοι.

---

### Παράδειγμα 2

Αν  $a, \beta \in \mathbb{R}$ , με  $a + \beta \neq 0$ , να αποδείξετε ότι:

$$\left| \frac{2a}{a+\beta} \right| + \left| \frac{2\beta}{a+\beta} \right| \geq 2$$

**Λύση:**

Έστω  $a, \beta \in \mathbb{R}$ , με  $a + \beta \neq 0$ . Τότε:

$$\begin{aligned} \left| \frac{2a}{a+\beta} \right| + \left| \frac{2\beta}{a+\beta} \right| &\geq \left| \frac{2a+2\beta}{a+\beta} \right| && \text{(Εφαρμογή ιδιότητας } |a + \beta| \leq |a| + |\beta| \text{)} \\ &= \left| \frac{2(a+\beta)}{a+\beta} \right| = |2| = 2 && \text{(Εκτελούμε τις πράξεις)} \end{aligned}$$

---

### Παράδειγμα 3

Αν  $|x - y| < \varepsilon$  και  $|y - z| < \varepsilon$ , με  $\varepsilon > 0$  να δείξετε ότι:  $|x - z| < 2\varepsilon$

**Λύση:**

$$\begin{aligned} |x - z| &= |x - y + y - z| && \text{(Αφαιρούμε και προσθέτουμε το } y \text{)} \\ &\leq |x - y| + |y - z| \\ &< \varepsilon + \varepsilon \\ &= 2\varepsilon \end{aligned}$$

Άρα,  $|x - z| < 2\varepsilon$ .

---

### Παράδειγμα 4

Να γράψετε την ανίσωση  $2 < x < 8$  στη μορφή  $|x - a| < \beta$ , όπου  $a, \beta$  παράμετροι που πρέπει να βρείτε.

**Λύση:**

Η ανισότητα  $|x - a| < \beta$  παίρνει τη μορφή:

$$-\beta < x - a < \beta \Leftrightarrow a - \beta < x < a + \beta$$

Συνεπώς παίρνουμε το σύστημα:  $\begin{cases} a - \beta = 2 \\ a + \beta = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 10 \\ 2\beta = 6 \end{cases} \Leftrightarrow a = 5, \beta = 3$

Άρα,  $2 < x < 8 \Leftrightarrow |x - 5| < 3$ .

---

### Παράδειγμα 5

Αν  $xy \neq 0$  να δείξετε ότι:  $\left| \frac{x}{y} \right| + \left| \frac{y}{x} \right| \geq 2$

**Λύση:**

Θα δείξουμε ότι  $\left| \frac{x}{y} \right| + \left| \frac{y}{x} \right| \geq 2$

$$\frac{|x|}{|y|} + \frac{|y|}{|x|} \geq 2 \Leftrightarrow |x|^2 + |y|^2 \geq 2|x| \cdot |y|$$

$$\Leftrightarrow |x|^2 + |y|^2 - 2|x| \cdot |y| \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (|x| - |y|)^2 \geq 0 \text{ αληθής, άρα και η αρχική είναι αληθής,}$$

$$\text{δηλαδή, } \left| \frac{x}{y} \right| + \left| \frac{y}{x} \right| \geq 2$$

## Δραστηριότητες

1. Αν  $|x| \leq 7$  και  $|y| \leq 10$ , να δείξετε ότι:  $|2x + 3y| \leq 44$
2. Να γράψετε τις παρακάτω ανισότητες στη μορφή  $|x - a| < \beta$ , όπου  $a, \beta$  παράμετροι που πρέπει να υπολογίσετε:  
(α)  $-1 < x < 3$   
(β)  $9,9 < x < 10,2$
3. Να βρείτε αριθμό  $a \in \mathbb{R}$ , ώστε να ισχύει:  $|a - 1| + |3 - 3a| = 8$
4. Αν  $x \in \mathbb{R}$ , με  $x \neq -1$  και  $\left| \frac{x+4}{x+1} \right| = 2$ , να αποδείξετε ότι:  $|x| = 2$
5. Αν  $\left| \frac{2a+3\beta}{3a+2\beta} \right| \leq 1$ , με  $a \neq 0$ , να αποδείξετε ότι:  $\left| \frac{\beta}{a} \right| \leq 1$
6. Αν  $a^2 < 16\beta^2$ , με  $a\beta \neq 0$ , να αποδείξετε ότι:  
(α)  $\left| \frac{a}{\beta} \right| < 4$   
(β)  $\left| \frac{a}{\beta} \right| - \left| \frac{\beta}{a} \right| < \frac{15}{4}$
7. Να αποδείξετε ότι:  $|a - \beta| \leq |a| + |\beta|$ ,  $\forall a, \beta \in \mathbb{R}$
8. Να αποδείξετε ότι:  $|2a + \beta|^2 + |a - 2\beta|^2 = 5(|a|^2 + |\beta|^2)$
9. Έστω  $a, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$ .  
(α) Αν  $||a| - |\beta|| = |a + \beta|$ , να αποδείξετε ότι οι  $a$  και  $\beta$  είναι ετερόσημοι.  
(β) Αν  $|a + \beta| = |a| + |\beta|$ , να αποδείξετε ότι οι  $a$  και  $\beta$  είναι ομόσημοι.

## Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να χαρακτηρίσετε τις πιο κάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ) και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(α) Αν  $a > 2$ , τότε  $|a - 1| = a - 1$

(β)  $|a - \beta| = |\beta - a|$ ,  $\forall a, \beta \in \mathbb{R}$

(γ)  $|a| \geq 1 \Leftrightarrow a \geq 1$

(δ) Η ισότητα  $|x + y| = |x| + |y|$  ισχύει μόνο όταν οι  $x, y$  είναι θετικοί αριθμοί.

(ε) Αν  $|x| \leq 2$ , τότε  $x \in [-2, 2]$

(στ) Αν  $x < 1$ , τότε  $|x - 1| + |x - 2| - |x - 3| = -x$

2. Αν ισχύει  $a < 1 < \beta$ , να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A = |a - 1| + |2\beta - 2| - |\beta - a|$$

3. Να βρείτε τις τιμές των  $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , ώστε να ισχύει:

$$|a + 1| + |2\beta - 1| + |3\gamma - 4| = 0$$

4. Να γράψετε τις πιο κάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτα:

(α)  $A = 7 - |x - 7|$

(β)  $B = 2x + |x| - |x - 1|$

5. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α)  $|3a - 1| = 8$

(β)  $|x + 1| = |1 - x|$

(γ)  $\left| \frac{y-1}{10-y} \right| = 2$

(δ)  $x^2 - 5|x| + 6 = 0$

(ε)  $y^2 + |y| - y - 4 = 0$

6. Να λύσετε τις πιο κάτω ανισώσεις:

(α)  $|x - 4| < 5$

(β)  $|y - 2| \geq 3$

(γ)  $|3 - 4a| \leq -7$

(δ)  $|z - 1| < |5z - 5| + 8$

7. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α)  $A = 3|x - y| + |y - x| - |4y - 4x|$

(β)  $B = \frac{\sqrt{x^2}}{x} - \frac{\sqrt{(x^2-2x+1)^2}}{x-1}, \quad 0 < x < 1$

(γ)  $\Gamma = \eta\mu x \sqrt{\eta\mu^2 x} - \sigma\upsilon\nu x \sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 x}, \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi$

(δ)  $\Delta = \tau\epsilon\mu x \sqrt{\tau\epsilon\mu^2 x} + \epsilon\phi x \sqrt{\epsilon\phi^2 x}, \quad \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

8. Να αποδείξετε ότι:  $\left| \frac{6a}{9a^2+1} \right| \leq 1, \forall a \in \mathbb{R}$

9. Να βρείτε τις πραγματικές τιμές του  $x$ , ώστε να ισχύει:  $|x| + |x + 3| = 3$

10. Να υπολογίσετε την μικρότερη τιμή του  $M$ , για την οποία ισχύει:

$$\left| \frac{1}{x} \right| \leq M, \forall x \in [2, 7]$$

11. (α) Να βρείτε τις πιθανές τιμές της παράστασης:  $\frac{|x-1|}{x-1}, \quad x \neq 1$

(β) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του  $x$  που να αληθεύει την ισότητα:

$$\frac{|x-1|}{x-1} = 2x$$

12. Να αποδείξετε ότι αν  $|x \cdot y| + |x| \cdot y = 2xy$ , με  $xy \neq 0$ , τότε οι  $x, y$  είναι ομόσημοι αριθμοί.

13. Ο όγκος  $V$  ενός στερεού ισούται περίπου με 6,94. Το σφάλμα αυτής της προσέγγισης είναι μικρότερο από 0,02. Να περιγράψετε τις πιθανές τιμές του όγκου του στερεού, χρησιμοποιώντας την απόλυτη τιμή.

14. Δίνεται το σημείο  $M(\lambda^2 - 7\lambda + 6, |\lambda - 1| - 3)$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

(α) Να βρείτε την τιμή του  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ώστε το σημείο  $M$  να ανήκει στο θετικό ημιάξονα  $Oy$ .

(β) Να βρείτε την τιμή του  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ώστε το σημείο  $M$  να βρίσκεται στο 2<sup>ο</sup> τεταρτημόριο.

(γ) Αν  $\lambda = 2$ , να βρείτε τα συμμετρικά σημεία του  $M$  ως προς τον άξονα  $y'y$  και ως προς τη διχοτόμο  $y = x$ .

## Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:  
(α)  $d(x, \sqrt{5}) = 2$   
(β)  $d(x, -\sqrt{3}) = 5$
2. Να διατυπώσετε τις πιο κάτω προτάσεις, χρησιμοποιώντας το σύμβολο της απόλυτης τιμής. Στη συνέχεια, να βρείτε τις τιμές του  $x$  που τις επαληθεύουν.  
(α) «Το  $x$  απέχει 3 μονάδες από το 2»  
(β) «Το  $2x$  απέχει 7 μονάδες από το  $-2$ »
3. Να διατυπώσετε τις πιο κάτω προτάσεις, χρησιμοποιώντας το σύμβολο της απόλυτης τιμής. Στη συνέχεια, να βρείτε τις τιμές του  $x$  που τις επαληθεύουν.  
(α) «Το  $x$  απέχει μέχρι και 4 μονάδες από το 2»  
(β) «Το  $3x$  απέχει περισσότερο από 6 μονάδες από το  $-1$ »
4. Να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η συνάρτηση  $f$  με τύπο:  
(α)  $f(x) = \sin x + |\sin x|$ ,  $x \in [0, 2\pi]$   
(β)  $f(x) = x^2 - 1 + |x|$ ,  $x \in \mathbb{R}$
5. Για ποια τιμή του  $\beta \in \mathbb{R}$ , η εξίσωση  $|5x - 3| = 2x - \beta$  έχει μοναδική λύση;
6. Να απλοποιήσετε την παράσταση:  $K = \left| x - \sqrt{(x-1)^2} \right|$ ,  $x \in (-\infty, 0)$
7. Αν  $|a| < |\beta|$  και  $|a + \beta x| < |ax + \beta|$ , να αποδείξετε ότι:  $|x| < 1$
8. Αν  $|a| < 1$  και  $|\beta| < 1$ , να αποδείξετε ότι:  
(α)  $-1 < a\beta < 1$   
(β)  $|a + \beta| < |1 + a\beta|$
9. Αν  $a, \beta \in \mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι:  $|a - \beta| \leq |5a + 2\beta| + |4\beta - 7a| + |3a - 7\beta|$
10. Αν  $\begin{cases} |a| < |\beta + \gamma| \\ |\beta| < |\gamma + a| \\ |\gamma| < |a + \beta| \end{cases}$ , με  $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι οι αριθμοί  $a, \beta$  και  $\gamma$  είναι ομόσημοι.
11. Να αποδείξετε ότι οι πιο κάτω σχέσεις αληθεύουν  $\forall n, n \geq 2$   
(α)  $|a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdot \dots \cdot |a_n|$ , με  $a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$   
(β)  $|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$ , με  $a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$



