

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΝΟΤΗΤΑ 4

Συναρτήσεις



Συγγραφή:	Δημητρίου-Καραντάνου Τέρψα Ιωάννου Ιωάννης Λοϊζιάς Σωτήρης Παπαγιάννης Κωνσταντίνος Παραγύιου Θεόκλητος Σαλονικίδης Γιάννης Σεργίδης Μάριος Στυλιανού Ανδρέας Τιμοθέου Σάββας
Συντονιστής:	Χρίστου Κωνσταντίνος, <i>Καθηγητής Πανεπιστημίου Κύπρου</i>
Εποπτεία:	Καλλεπίτη Ευτυχία, <i>Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης</i> Φιλίππου Ανδρέας, <i>Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης</i> Γιασουμής Νικόλας, <i>Επιθεωρητής Μέσης Εκπαίδευσης</i> Παπαγιάννη Όλγα, <i>Επιθεωρήτρια Μέσης Εκπαίδευσης</i>
Συντονισμός έκδοσης:	Χρίστος Παρπούνας, <i>Συντονιστής Υπηρεσίας Ανάπτυξης Προγραμμάτων</i>

Α΄ Έκδοση 2016

Εκτύπωση: Printco Manufacturing & Trading Ltd

© ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

ISBN: 978-9963-54-049-5

ΕΝΟΤΗΤΑ 4

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

- 4.1 Εισαγωγή στις συναρτήσεις
- 4.2 Η έννοια της συνάρτησης- Αναπαραστάσεις συνάρτησης
- 4.3 Γράφημα – Γραφική παράσταση συνάρτησης
- 4.4 Είδη συναρτήσεων-Άρτια, περιττή συνάρτηση
- 4.5 Πεδίο ορισμού-Σύνολο τιμών πραγματικής συνάρτησης πραγματικής μεταβλητής που ορίζεται με τύπο
- 4.6 Ισότητα συναρτήσεων
- 4.7 Πράξεις συναρτήσεων
- 4.8 Σύνθεση συναρτήσεων
- 4.9 Συναρτήσεις 1-1 - Συναρτήσεις επί
- 4.10 Αντίστροφη συνάρτηση

4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Η έννοια της συνάρτησης είναι από τις θεμελιώδεις έννοιες των Μαθηματικών και ιδιαίτερα της Ανάλυσης. Η συνάρτηση είναι το κατάλληλο μέσο, για να εκφράσουμε και να περιγράψουμε τον φυσικό κόσμο με Μαθηματικά. Με τις συναρτήσεις είμαστε σε θέση να παρατηρήσουμε, για παράδειγμα, πώς οι τιμές μιας μεταβλητής επηρεάζονται ή εξαρτώνται από τις τιμές μιας άλλης μεταβλητής, όπως:



- Η απόσταση που χρειάζεται ένα αυτοκίνητο, για να σταματήσει είναι συνάρτηση της ταχύτητάς του.
- Το εμβαδόν του κύκλου είναι συνάρτηση του τετραγώνου της ακτίνας του.
- Η ατμοσφαιρική πίεση είναι συνάρτηση του υψόμετρου.
- Η απόσταση που καλύπτει ένα αντικείμενο και η ταχύτητα που έχει, όταν αφήνεται να πέσει ελεύθερα, είναι συνάρτηση του χρόνου που κινείται.
- Ο αριθμός των ψαριών σε μια λίμνη είναι συνάρτηση του πλήθους των ατόμων που ψαρεύουν σε αυτή.

Εκτός από την αντιστοιχία μεταξύ των μεγεθών, η συνάρτηση περιγράφει και διαδικασίες ποσοτικών μεταβολών, συμβάλλοντας στον ακριβή υπολογισμό ορίων, όπως είναι:

- ✓ η κλίση της εφαπτομένης μιας καμπύλης σε ένα σημείο της,
- ✓ η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού, όταν είναι γνωστή η συνάρτηση της μετατόπισης του κινητού σε σχέση με το χρόνο,
- ✓ το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της καμπύλης και ευθειών ή μεταξύ δύο καμπυλών.



Οι διαδικασίες που μας επιτρέπουν να «διέλθουμε» από τις απλές διαδικασίες, όπως η κλίση μιας ευθείας ή το εμβαδόν μιας ορθογώνιας περιοχής, σε πιο σύνθετες, όπως η κλίση της καμπύλης σε σημείο της ή το εμβαδόν που περικλείεται από καμπύλη και συγκεκριμένη ευθεία, λέγεται στα Μαθηματικά «Ανάλυση» και έχει τη βάση της στην έννοια της συνάρτησης.

Ιστορικό Σημείωμα

Η έννοια της συνάρτησης εμφανίζεται με διάφορες όψεις σε διαφορετικές χρονικές περιόδους, χωρίς να καθορίζεται ο ακριβής χρόνος σύλληψης της έννοιας.

Σύμφωνα με τον D.E. Smith η πραγματική ιδέα της συνάρτησης με χρήση συντεταγμένων, πρωτοεμφανίστηκε από τον Descartes (1596 – 1650) και τον Pierre de Fermat (1601 – 1665).

Ο Leibniz εισήγαγε για πρώτη φορά (Αύγουστος 1673) τη λέξη «συνάρτηση» που προέρχεται από το λατινικό ρήμα «fungor» και σημαίνει εκτελώ, λειτουργώ. Εισήγαγε, επίσης, τις λέξεις: σταθερά, μεταβλητή, συντεταγμένες, παράμετρος.

Ο Johann Bernoulli πρώτος όρισε τη συνάρτηση (1718) με αναλυτικό τρόπο σύμφωνα με τον οποίο:

«Συνάρτηση μεταβλητού μεγέθους είναι μια ποσότητα που σχηματίζεται με οποιοδήποτε τρόπο από αυτό το μεταβλητό μέγεθος και από σταθερές».

Ο Leibniz εισήγαγε το ελληνικό γράμμα φ για τον συμβολισμό της συνάρτησης και μάλιστα ως «φχ». Τον 18^ο αιώνα ο Euler εισάγει τον συμβολισμό f για τη συνάρτηση και γράφει $f(x)$. Ορίζει τις έννοιες της «σταθεράς», της «μεταβλητής ποσότητας» και τη συνάρτησης μιας μεταβλητής και περισσότερων μεταβλητών, δίνοντας, το 1748, τον πιο κάτω ορισμό:

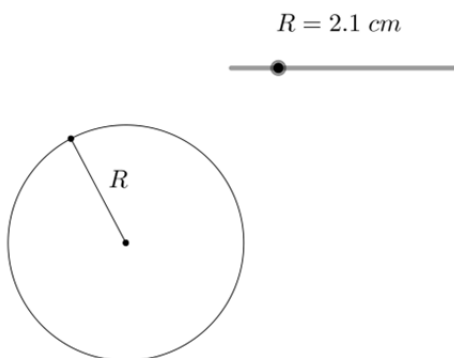
«Συνάρτηση μιας μεταβλητής ποσότητας είναι εκείνη η αναλυτική έκφραση, που προκύπτει από τη σύνθεση με οποιοδήποτε τρόπο της ποσότητας με αριθμούς ή και άλλες σταθερές ποσότητες».

4.2 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ – ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Διερεύνηση 1

Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «[Blyk_En04_EnnoiaSinartisis.ggb](#)».

Να μετακινήσετε το δρομέα «*R*» σε διάφορες θέσεις και να διατυπώσετε τις παρατηρήσεις σας για την αντίστοιχη τιμή του εμβαδού του κυκλικού δίσκου σε κάθε περίπτωση.



Διερεύνηση 2

Οι εισπράξεις (σε ευρώ) μίας εταιρείας κινητής τηλεφωνίας από την πώληση x κινητών τηλεφώνων δίνονται από την πιο κάτω σχέση:

$$f(x) = -1,2x^2 + 220x$$

Το κόστος (σε ευρώ) της εταιρείας από την πώληση x κινητών τηλεφώνων δίνεται από την πιο κάτω σχέση:

$$g(x) = 0,05x^3 - 2x^2 + 65x + 500$$

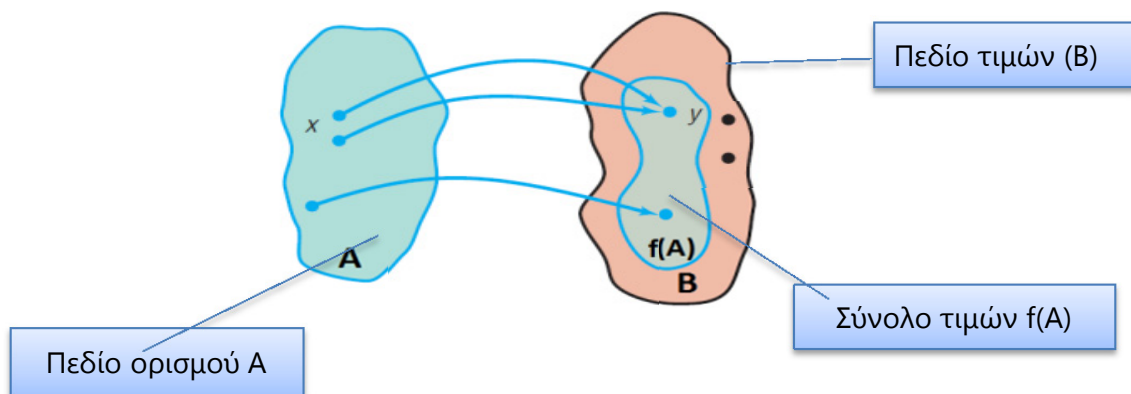


- Πόσο είναι το κέρδος της εταιρείας (σε ευρώ) μετά την πώληση 1500 κινητών τηλεφώνων;

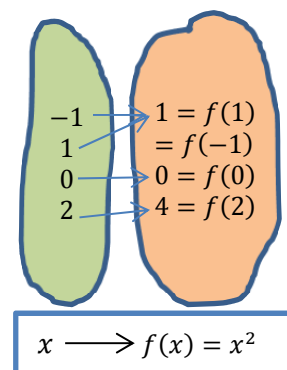
Ορισμός: Έστω δύο μη κενά σύνολα A, B . Ονομάζουμε **συνάρτηση** f από το σύνολο A στο σύνολο B μια αντιστοιχία (κανόνα), όπου σε κάθε στοιχείο x του συνόλου A ($\forall x \in A$) αντιστοιχεί ένα και μόνον ένα στοιχείο y του συνόλου B ($y \in B$) και τη συμβολίζουμε με $f: A \rightarrow B$.

- ✓ Το σύνολο A καλείται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης. Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f συμβολίζεται με D_f .
- ✓ Το σύνολο B καλείται **πεδίο τιμών** της συνάρτησης.
- ✓ Για κάθε στοιχείο x του συνόλου A ($\forall x \in A$), το αντίστοιχο στοιχείο y του B καλείται η **τιμή** της συνάρτησης στο x ή η **εικόνα** του x και συμβολίζεται με $f(x)$.
- ✓ Το σύνολο όλων των εικόνων των στοιχείων του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης καλείται **σύνολο τιμών** της συνάρτησης και συμβολίζεται με $f(A) = \{f(x) | x \in A\}$. Το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f συμβολίζεται με R_f .

Από τη στιγμή που κάποια στοιχεία του συνόλου B μπορεί να μην είναι εικόνες κάποιων στοιχείων του συνόλου A , τότε το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης είναι υποσύνολο του B . Δηλαδή, $f(A) \subseteq B$.



Όπως αναφέραμε πιο πάνω, κάθε στοιχείο x του συνόλου A έχει την εικόνα του $f(x)$ στο σύνολο B , δηλαδή $x \in A \rightarrow f(x) \in B$. Το σύμβολο $f(x)$ διαβάζεται « f του x » και ονομάζεται η **τιμή** της f στο x ή η **εικόνα** του x μέσω της f .



Σε αυτήν την ενότητα θα ασχοληθούμε με συναρτήσεις που το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών τους είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Συγκεκριμένα, η συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ ονομάζεται:

- **συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής** αν $A \subseteq \mathbb{R}$
- **πραγματική συνάρτηση** αν $B \subseteq \mathbb{R}$

Δηλαδή, πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B ονομάζουμε κάθε συνάρτηση $f: A \rightarrow B$, όταν το $A \subseteq \mathbb{R}$ και το $B \subseteq \mathbb{R}$.

Στην περίπτωση που δεν δίνεται το πεδίο τιμών θεωρούμε πάντα ότι αυτό είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}$, χωρίς να εννοείται γενικά ότι συμπίπτει με το σύνολο τιμών.

Για παράδειγμα, όταν δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2, x \in [-1, 3]$, εννοείται ότι το πεδίο τιμών είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο όλων των εικόνων του $A = [-1, 3]$ (πεδίου ορισμού), που είναι το σύνολο:

$$f(A) = \{f(x) | x \in [-1, 3]\} = [2, 9] \subseteq \mathbb{R}$$

Μία συνάρτηση $f: A \rightarrow B$, μπορεί να αναπαρασταθεί με διάφορους τρόπους, όπως:

- Λεκτικά (Μία λεκτική έκφραση η οποία αποδίδει τη συνάρτηση)
- Βελοδιάγραμμα
- Τύπο (Μία σχέση της μορφής $y = f(x)$ με $x \in A, f(x) \in B$).
- Γράφημα (Ένα σύνολο με τα διατεταγμένα ζεύγη της συνάρτησης f)
- Γραφική παράσταση (Μία αναπαράσταση σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων των σημείων που αντιστοιχούν στο γράφημα της συνάρτησης)

Παράδειγμα 1:

Ο Αντώνης και ο Γιώργος είναι φοιτητές και συγκατοικούν. Κάθε βδομάδα κάνουν ένα πρόγραμμα εργασιών του σπιτιού, όπως φαίνεται στον πιο κάτω πίνακα.

	Δευτέρα	Τρίτη	Τετάρτη	Πέμπτη	Παρασκευή	Σάββατο	Κυριακή
Γιώργος	✓		✓		✓		✓
Αντώνης		✓		✓		✓	

Να εξετάσετε κατά πόσο το πιο πάνω πρόγραμμα ορίζει συνάρτηση. Στην περίπτωση που είναι συνάρτηση, να αναφέρετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης και να κατασκευάσετε το αντίστοιχο βελοειδές διάγραμμα.

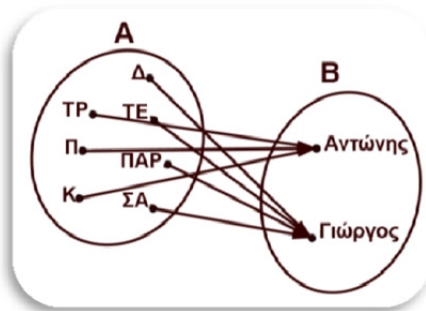
Λύση

Το πιο πάνω πρόγραμμα ορίζει συνάρτηση, γιατί για κάθε μέρα (ανεξάρτητη μεταβλητή) εργάζεται ακριβώς ένας φοιτητής (εξαρτημένη μεταβλητή).

Το πεδίο ορισμού είναι

$A = \{\text{Δευτέρα, Τρίτη, Τετάρτη, Πέμπτη, Παρασκευή, Σάββατο, Κυριακή}\}$,
και το σύνολο τιμών $B = \{\text{Γιώργος, Αντώνης}\}$.

Το πιο πάνω παράδειγμα μπορεί να οριστεί και με βελοειδές διάγραμμα.



Με το βελοδιάγραμμα παρατηρούμε ότι μπορούν δύο διαφορετικά στοιχεία του συνόλου A να αντιστοιχίζονται στο ίδιο στοιχείο του συνόλου B .

Παράδειγμα 2:

Δίνεται η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 2x + 3$.

- (α) Να βρείτε το σύνολο τιμών, όταν το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο $A = \{-2, 0, \frac{3}{2}, 2, 3\}$.
- (β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού, όταν το σύνολο τιμών είναι το σύνολο $f(A) = \{-3, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

Λύση

- (α) Για $x = -2$, τότε $f(-2) = 2(-2) + 3 = -4 + 3 = -1$

Για $x = 0$, τότε $f(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 3$.

Για $x = \frac{3}{2}$, τότε $f\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \cdot \frac{3}{2} + 3 = 6$.

Για $x = 2$, τότε $f(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$.

Για $x = 3$, τότε $f(3) = 2 \cdot 3 + 3 = 9$.

Έτσι, το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $f(A) = \{-1, 3, 6, 7, 9\}$.

- (β) Για $f(x) = -3$, τότε $-3 = 2x + 3 \Rightarrow x = -3$.

Για $f(x) = -1$, τότε $-1 = 2x + 3 \Rightarrow x = -2$.

Για $f(x) = 0$, τότε $0 = 2x + 3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$.

Για $f(x) = 1$, τότε $1 = 2x + 3 \Rightarrow x = -1$.

Για $f(x) = 2$, τότε $2 = 2x + 3 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Για $f(x) = 3$, τότε $3 = 2x + 3 \Rightarrow x = 0$.

Έτσι, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A = \{-3, -2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0\}$.

Έτσι, το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $f(A) = \{-1, 3, 6, 7, 9\}$.

Παράδειγμα 3:

Δίνεται το σύνολο $A = \{-2, -1, 0, \sqrt{2}, 2\}$. Να ορίσετε τον τύπο της συνάρτησης f , η οποία αναπαριστάται λεκτικά ως εξής:

«Κάθε στοιχείο του συνόλου A υψώνεται στο τετράγωνο και στη συνέχεια αυξάνεται κατά 3».

Στη συνέχεια, να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Λύση:

Αν $x \in A$, τότε η λεκτική αναπαράσταση της συνάρτησης f ερμηνεύεται με τον τύπο: $f(x) = x^2 + 3$. Για τον υπολογισμό του συνόλου τιμών έχουμε:

$$\text{Για } x = -2, \text{ τότε } f(-2) = (-2)^2 + 3 = 4 + 3 = 7.$$

$$\text{Για } x = -1, \text{ τότε } f(-1) = (-1)^2 + 3 = 1 + 3 = 4.$$

$$\text{Για } x = 0, \text{ τότε } f(0) = 0^2 + 3 = 3.$$

$$\text{Για } x = \sqrt{2}, \text{ τότε } f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 + 3 = 2 + 3 = 5.$$

$$\text{Για } x = 2, \text{ τότε } f(2) = 2^2 + 3 = 4 + 3 = 7.$$

Επομένως, το σύνολο τιμών της f είναι: $f(A) = \{3, 4, 5, 7\}$.

Παράδειγμα 4:

Για τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x^2 - 3x$, να υπολογίσετε τα πιο κάτω:

(α) $f(4)$	(β) $f(-x)$	(γ) $f(2x)$
(δ) $f(x-1)$	(ε) $-f(5x+2)$	(στ) $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, h \neq 0$

Λύση

(α) Αντικαθιστούμε όπου x την τιμή 3 στον τύπο της συνάρτησης f και παίρνουμε:

$$f(3) = 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 = 2 \cdot 9 - 3 \cdot 3 = 18 - 9 = 9$$

(β) Αντικαθιστούμε όπου x το $-x$ στον τύπο της συνάρτησης f και παίρνουμε:

$$f(-x) = 2 \cdot (-x)^2 - 3 \cdot (-x) = 2x^2 + 3x$$

(γ) Αντικαθιστούμε όπου x το $2x$ στον τύπο της συνάρτησης f και παίρνουμε:

$$f(2x) = 2 \cdot (2x)^2 - 3 \cdot (2x) = 2 \cdot 4x^2 - 6x = 8x^2 - 6x$$

(δ) Αντικαθιστούμε όπου x το $x - 1$ στον τύπο της συνάρτησης f και παίρνουμε:

$$\begin{aligned}f(x - 1) &= 2 \cdot (x - 1)^2 - 3 \cdot (x - 1) = 2x^2 + 3 \\&= 2 \cdot (x^2 - 2x + 1) - 3x + 3 \\&= 2x^2 - 4x + 2 - 3x + 3 \\&= 2x^2 - 7x + 5\end{aligned}$$

(ε) Είναι:

$$\begin{aligned}-f(5x + 2) &= -[2 \cdot (5x + 2)^2 - 3 \cdot (5x + 2)] \\&= -[2 \cdot (25x^2 + 20x + 4) - 3 \cdot (5x + 2)] \\&= -(50x^2 + 40x + 8 - 15x - 6) \\&= -50x^2 - 25x - 2\end{aligned}$$

(στ) Είναι:

$$\begin{aligned}\frac{f(x + h) - f(x)}{h} &= \frac{[2 \cdot (x + h)^2 - 3 \cdot (x + h)] - (2x^2 - 3x)}{h} \\&= \frac{[2 \cdot (x^2 + 2xh + h^2) - 3 \cdot (x + h)] - (2x^2 - 3x)}{h} \\&= \frac{(2x^2 + 4xh + 2h^2 - 3x - 3h) - (2x^2 - 3x)}{h} \\&= \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 - 3x - 3h - 2x^2 + 3x}{h} \\&= \frac{4xh + 2h^2 - 3h}{h} = \frac{h \cdot (4x + 2h - 3)}{h} \\&= 4x + 2h - 3\end{aligned}$$

Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
(α) Κάθε αντιστοιχία είναι συνάρτηση.
(β) Η σχέση $y = f(x)$ δεν παριστάνει συνάρτηση, όταν ισχύουν $f(-2) = 8$ και $f(-2) = 0$.
(γ) Η σχέση μεταξύ της περιμέτρου Π ενός ισόπλευρου τριγώνου και της πλευράς του a είναι συνάρτηση.
(δ) Η εξίσωση της ευθείας που περνά από τα σημεία $(0,2)$ και $(2,0)$ είναι της μορφής $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$. Η εξίσωση αυτή παριστάνει συνάρτηση.
2. Να υπολογίσετε τις τιμές που αναγράφονται δίπλα από κάθε συνάρτηση f .
(α) $f(x) = 3x^2 + 2x - 4$, $f(0)$ (β) $f(x) = -2x^2 + x - 1$, $f(2)$
(γ) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $f(t)$ (δ) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+4}$, $f(-t)$
3. Αν $f(x) = 2x^3 + Ax^2 + 4x - 5$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(2) = 5$, να υπολογίσετε την τιμή του A .
4. Αν $g(x) = \frac{3x+8}{2x-B}$, $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{B}{2}\right\}$ και $g(0) = 2$, να υπολογίσετε την τιμή του B .
5. Η συνάρτηση h με τύπο $h(x) = 20 - 4,9x^2$, $x \in [0, +\infty)$, περιγράφει το ύψος από το έδαφος στο οποίο βρίσκεται ένα αντικείμενο, όταν αυτό πέφτει από ένα βράχο ύψους 20 m . (h είναι η απόσταση του αντικειμένου από το έδαφος σε μέτρα και x είναι ο χρόνος σε δευτερόλεπτα). Να απαντήσετε στα πιο κάτω ερωτήματα, χρησιμοποιώντας υπολογιστική μηχανή.
(α) Ποια είναι η απόσταση του αντικειμένου από το έδαφος, ύστερα από:
i. 1 δευτερόλεπτο
ii. 1,1 δευτερόλεπτα
(β) Ύστερα από πόσα δευτερόλεπτα το αντικείμενο θα απέχει από το έδαφος:
i. 15 μέτρα
ii. 10 μέτρα
iii. 5 μέτρα
(γ) Ύστερα από πόσα δευτερόλεπτα το αντικείμενο θα κτυπήσει στο έδαφος;
6. (α) Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο 100 m και η μια πλευρά του έχει μήκος $x \text{ m}$. Να εκφράσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x , όπου $x > 0$.
(β) Να χρησιμοποιήσετε την πιο πάνω συνάρτηση, για να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου με το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδόν.

7. Μερικές συναρτήσεις έχουν την εξής ιδιότητα:

$$f(a + \beta) = f(a) + f(\beta), \forall a, \beta \in \mathbb{R}$$

i. Ποιες από τις πιο κάτω συναρτήσεις έχουν αυτή την ιδιότητα;

(α) $f_1(x) = 2x$

(β) $f_2(x) = x^2$

(γ) $f_3(x) = 5x - 2$

(δ) $f_4(x) = \frac{1}{x}$

ii. Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση f :

(α) $f(0) = 0$

(β) $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$

(γ) $f(3x) = 3f(x), \forall x \in \mathbb{R}$

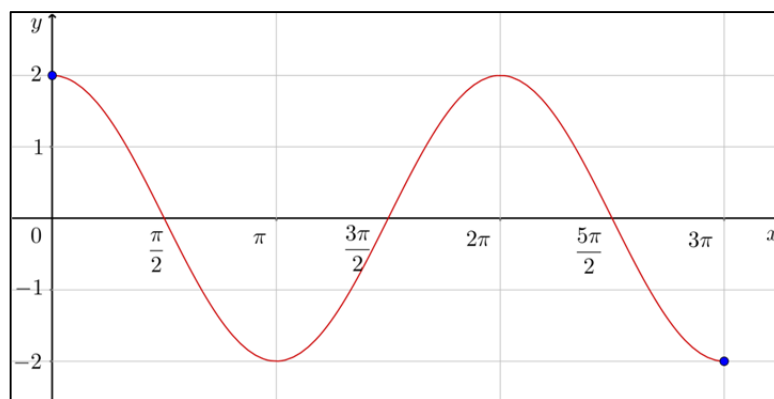
8. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 0, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$

Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-2,5)$, $f(\sqrt{2})$, $f(\pi)$, $f\left(\frac{3}{5}\right)$, $f(0,888 \dots)$.

4.3. ΓΡΑΦΗΜΑ - ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Διερεύνηση 1

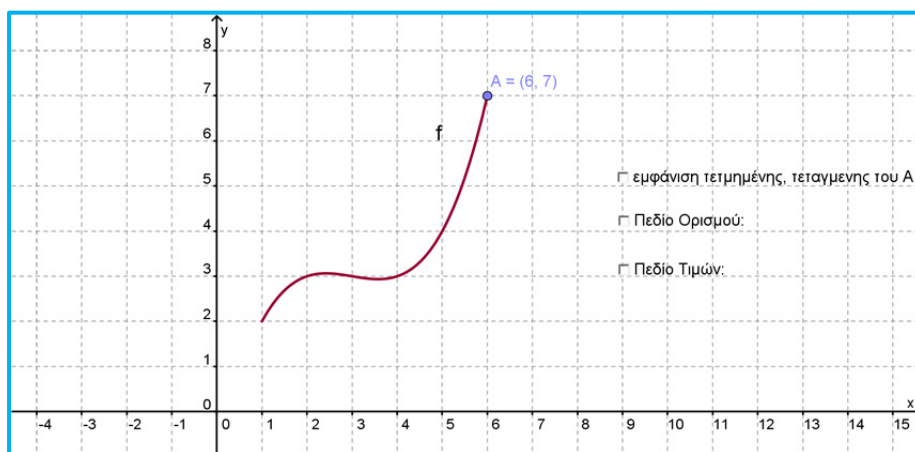
Πιο κάτω δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



- ✓ Να υπολογίσετε τα $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ και $f(3\pi)$.
- ✓ Να αναφέρετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .
- ✓ Πόσες είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 1$;
- ✓ Ποιες είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$;
- ✓ Να αναφέρετε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) > 0$.

Διερεύνηση 2

Να ανοίξετε το αρχείο «[Blyk_En04_PO_PT.ggb](#)».

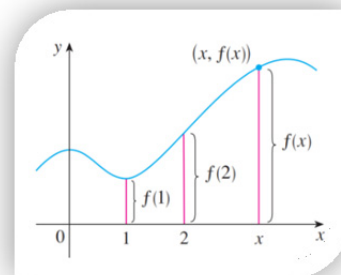


- (α) Να μετακινήσετε το σημείο A και να παρατηρήσετε τις τιμές των συντεταγμένων του καθώς κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
- (β) Να επιλέξετε το « ☐ εμφάνιση τετμημένης, τεταγμένης του A » . Να μετακινήσετε το σημείο A σε διάφορες θέσεις και να σημειώσετε τις παρατηρήσεις σας για τις τιμές της τετμημένης και τεταγμένης του A . Ακολούθως, να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

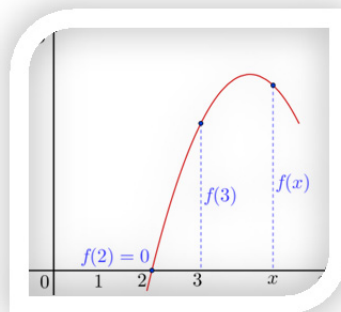
Ορισμοί:

- **Γράφημα** μιας συνάρτησης $f: A \rightarrow B$ είναι το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών (x, y) , όπου $x \in A$ και $y \in B$, για τα οποία ισχύει $y = f(x)$ και συμβολίζεται με G , δηλαδή $G = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in A, y \in B\}$.
- **Γραφική παράσταση** μιας συνάρτησης f είναι η αναπαράσταση των διατεταγμένων ζευγών $(x, f(x))$ του γραφήματος G της συνάρτησης σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων.

Με άλλα λόγια, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι το σύνολο των σημείων (x, y) , για τα οποία ισχύει ο κανόνας $y = f(x)$. Έτσι, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι η γραφική παράσταση της εξίσωσης $y = f(x)$.



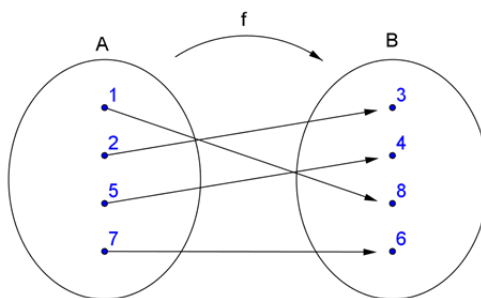
Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f παρουσιάζει μια εικόνα της «συμπεριφοράς» της συνάρτησης. Μπορούμε, για παράδειγμα, να υπολογίσουμε την τιμή της συνάρτησης f στο x , υπολογίζοντας το «ύψος» του σημείου της γραφικής παράστασης της f πάνω (ή κάτω) από το σημείο $(x, 0)$.



Παράδειγμα 1:

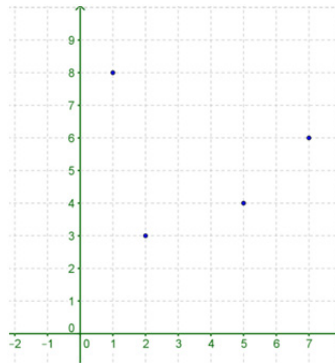
Δίνεται το βελοειδές διάγραμμα της συνάρτησης $f: A \rightarrow B$.

- (α) Να βρείτε το γράφημα της συνάρτησης f .
- (β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .



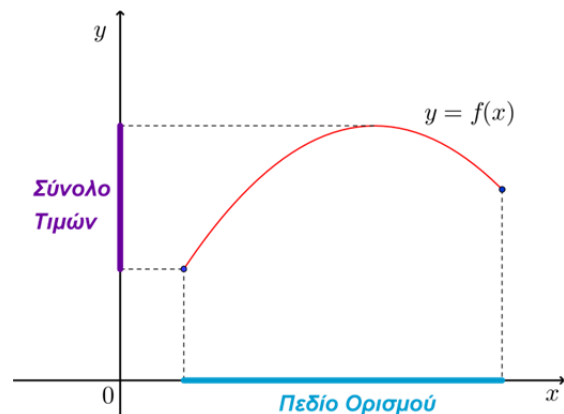
Λύση

- (α) Η συνάρτηση f αντιστοιχίζει τα στοιχεία του συνόλου $A = \{1, 2, 5, 7\}$ με τα στοιχεία του συνόλου $B = \{3, 4, 8, 6\}$, έτσι ώστε $f(1) = 8$, $f(2) = 3$, $f(5) = 4$ και $f(7) = 6$. Επομένως, το γράφημα είναι το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών (x, y) : $G = \{(1, 8), (2, 3), (5, 4), (7, 6)\}$.
- (β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα και αποτελείται (μόνο) από τα 4 σημεία.:



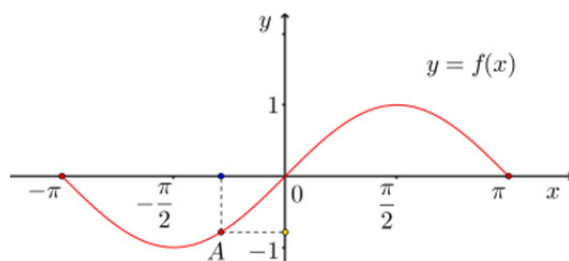
Παρατήρηση:

Το σύνολο των τετμημένων των σημείων της γραφικής παράστασης είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και το σύνολο των τεταγμένων των σημείων της γραφικής παράστασης είναι το σύνολο τιμών της.



Παράδειγμα 2:

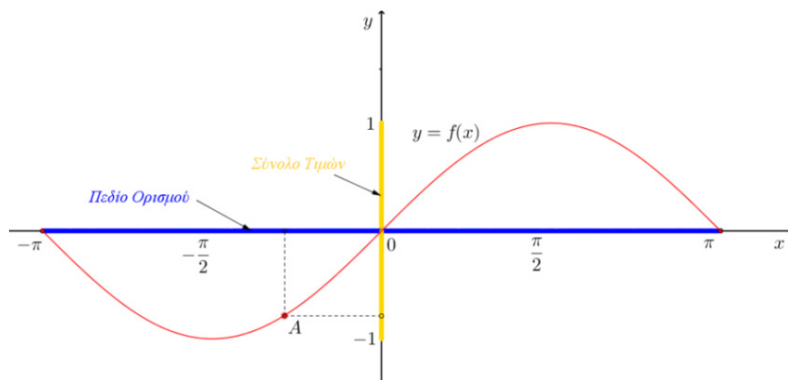
Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «[Blyk_En04_PedioOrismou_SinoloTimwn](#)».



Να μετακινήσετε το σημείο A κατά μήκος της καμπύλης και να αναφέρετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

Λύση

Με τη χρήση του εφαρμογιδίου παρατηρούμε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $[-\pi, \pi]$ και το σύνολο τιμών της είναι το $[-1, 1]$. Το σύνολο των προβολών των σημείων της γραφικής παράστασης της f στον άξονα των τετμημένων (πεδίο ορισμού της f) έχει μπλε χρώμα, ενώ το σύνολο των προβολών των σημείων της γραφικής παράστασης της f στον άξονα των τεταγμένων (σύνολο τιμών της f) έχει κίτρινο χρώμα.



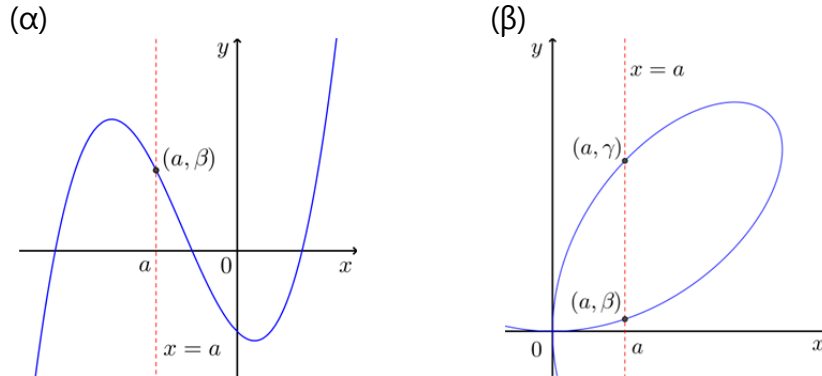
Σημείωση:

Από τον ορισμό της συνάρτησης δεν μπορεί το ίδιο x του πεδίου ορισμού να αντιστοιχίζεται σε διαφορετικά y του πεδίου τιμών. Αυτό σημαίνει ότι στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης δεν μπορεί μία τετμημένη να αντιστοιχεί σε δύο ή περισσότερες τεταγμένες. Έτσι, για να εξετάσουμε κατά πόσο μια γραφική παράσταση αναπαριστά συνάρτηση, σε ορισμένες περιπτώσεις χρησιμοποιούμε ένα πρακτικό τρόπο ο οποίος αναφέρεται ως έλεγχος της κατακόρυφης γραμμής:

«Μια καμπύλη στο καρτεσιανό επίπεδο είναι γραφική παράσταση συνάρτησης αν και μόνον αν κάθε κατακόρυφη ευθεία τέμνει την καμπύλη αυτή το πολύ σε ένα σημείο».

Παράδειγμα 3:

Να εξετάσετε κατά πόσο καθεμία από τις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις καμπύλων ορίζει συνάρτηση.



- (α) Η καμπύλη είναι γραφική παράσταση συνάρτησης, γιατί σε κάθε στοιχείο $x = a$ του άξονα των τετμημένων αντιστοιχεί μόνο ένα στοιχείο $y = \beta$ του άξονα των τεταγμένων.
- (β) Η καμπύλη δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης, γιατί υπάρχει στοιχείο του άξονα των τετμημένων (το $x = a$), το οποίο αντιστοιχεί σε δύο στοιχεία του άξονα των τεταγμένων (τα β και γ).

Παράδειγμα 4:

Να εξετάσετε κατά πόσο τα πιο κάτω γραφήματα είναι συναρτήσεις. Σε περίπτωση που ένα γράφημα είναι συνάρτηση, να αναφέρετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

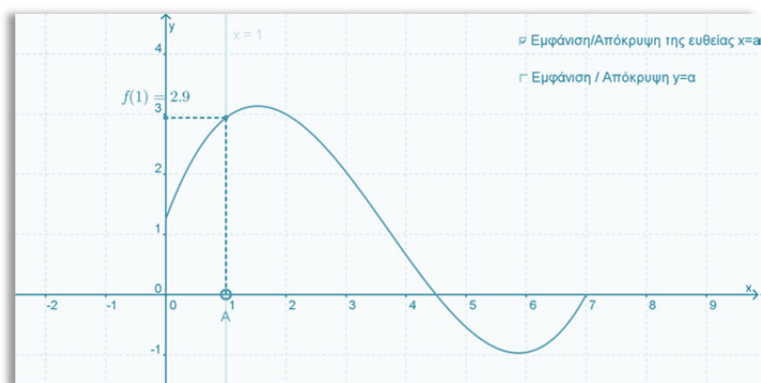
- (α) $\{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7)\}$
- (β) $\{(-3, 9), (-2, 4), (0, 0), (1, 1), (-3, 8)\}$

Λύση

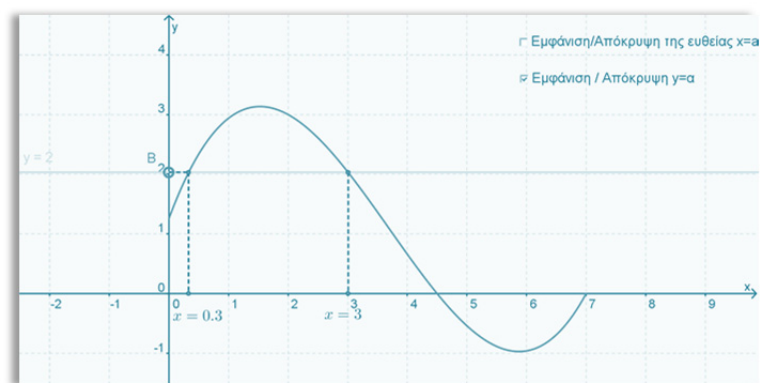
- (α) Το γράφημα $\{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7)\}$ είναι συνάρτηση, αφού δεν υπάρχουν διατεταγμένα ζεύγη με ίδια τετμημένη και διαφορετική τεταγμένη. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\{1, 2, 3, 4\}$ και το σύνολο τιμών της είναι το $\{4, 5, 6, 7\}$.
- (β) Το γράφημα $\{(-3, 9), (-2, 4), (0, 0), (1, 1), (-3, 8)\}$ δεν είναι συνάρτηση, αφού υπάρχουν δύο διατεταγμένα ζεύγη, $(-3, 9)$ και $(-3, 8)$, με ίδια τετμημένη και διαφορετική τεταγμένη.

Παράδειγμα 5:

Να χρησιμοποιήσετε το αρχείο «[BLyk_En04_paradeigma.ggb](#)».



- (α) Να επιλέξετε το «☒ Εμφάνιση/Απόκρυψη της ευθείας $x=a$ ». Μετακινώντας το σημείο A , να υπολογίσετε τις τιμές $f(1)$, $f(2)$ και $f(5)$.



- (β) Να επιλέξετε το «☒ Εμφάνιση / Απόκρυψη $y=a$ ». Μετακινώντας το σημείο B , να υπολογίσετε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = 2$ και $f(x) = 1$.

- (γ) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f ;

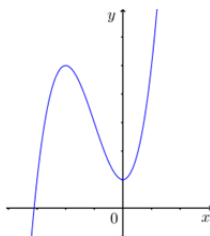
Λύση

- (α) Από τη γραφική παράσταση (με τη βοήθεια του εφαρμογιδίου), παρατηρούμε ότι $f(1) = 2,9$, $f(2) = 3$ και $f(5) = -0,5$.
- (β) Από το σχήμα, παρατηρούμε ότι τα σημεία με τεταγμένη $y = 2$, που ανήκουν στη γραφική παράσταση της f , έχουν τετμημένες $x = 0,3$ και $x = 3$.
Το σημείο με τεταγμένη $y = 1$, που ανήκει στη γραφική παράσταση της f , έχει τετμημένη $x = 3,8$.
- (γ) Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ ορίζεται, όταν $0 \leq x \leq 7$. Άρα, το πεδίο ορισμού είναι το κλειστό διάστημα $[0,7]$.

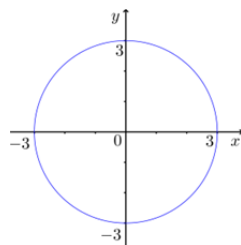
Παράδειγμα 6:

Να εξετάσετε κατά πόσο οι παρακάτω γραφικές παραστάσεις είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων. Στην περίπτωση που ορίζεται συνάρτηση, να αναφέρετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.

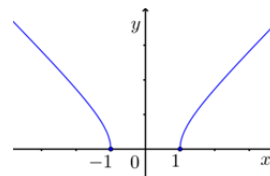
(α)



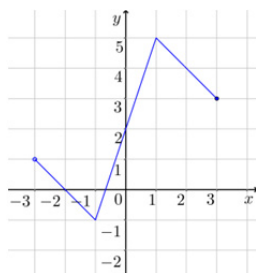
(β)



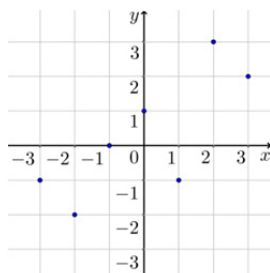
(γ)



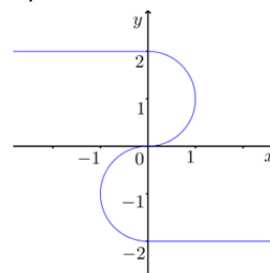
(δ)



(ε)



(στ)



Λύση:

Οι γραφικές παραστάσεις (α), (γ), (δ) και (ε) είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, αφού κάθε κατακόρυφη ευθεία τέμνει την καθεμιά από αυτές το πολύ σε ένα σημείο.

Το πεδίο ορισμού, σε κάθε περίπτωση, είναι το πιο κάτω σύνολο:

(α) $\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

(γ) $\{x \mid x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$

(δ) $\{x \mid x \in [-3, 3]\}$

(ε) $\{x \mid x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

Το σύνολο τιμών σε κάθε περίπτωση είναι το πιο κάτω σύνολο,

(α) $\{y \mid y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

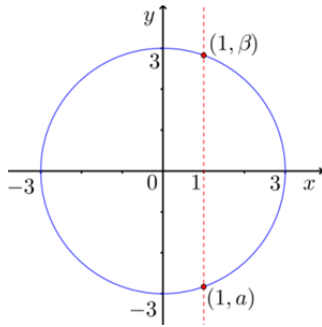
(γ) $\{y \mid y \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\} = [0, +\infty)$

(δ) $\{y \mid y \in [-3, 3]\} = [-1, 5]$

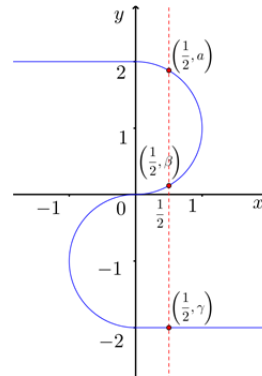
(ε) $\{y \mid y = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

Οι γραφικές παραστάσεις (β) και (στ) δεν είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, αφού υπάρχει σε κάθε περίπτωση τουλάχιστον μια κατακόρυφη ευθεία που τέμνει την κάθε γραφική παράσταση σε περισσότερα από ένα σημεία. Μπορούμε να το διαπιστώσουμε πολύ εύκολα, παρατηρώντας τα πιο κάτω σχήματα.

(β)



(στ)



Παράδειγμα 7:

Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω εξισώσεις ορίζουν συναρτήσεις με ανεξάρτητη μεταβλητή το x .

(α) $y = 3x - 1, x \in \mathbb{R}$

(β) $x^2 + y^2 = 9, x \in [-3, 3]$

Λύση

(α) Η εξίσωση $y = 3x - 1, x \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει όλα τα τριπλάσια μειωμένα κατά μια μονάδα.

Για παράδειγμα, αν $x = 2$, τότε $y = 3 \cdot 2 - 1 = 6 - 1 = 5$ και γενικά, κάθε $a \in \mathbb{R}$ αντιστοιχεί σε μόνο μία τιμή την $3a - 1$.

Συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση αυτή ορίζει συνάρτηση με ανεξάρτητη μεταβλητή την x .

(β) Επιλύουμε την εξίσωση ως προς y .

$$x^2 + y^2 = 9 \Leftrightarrow y^2 = 9 - x^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{9 - x^2}$$

Για οποιονδήποτε τιμή του $x \neq \pm 3$ στο διάστημα $[-3, 3]$, έχουμε δύο αντίστοιχες τιμές για το y .

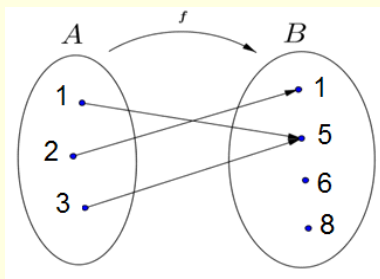
Για παράδειγμα, αν $x = 0$, τότε $y = \pm\sqrt{9} = \pm 3$.

Επομένως, η εξίσωση αυτή δεν ορίζει συνάρτηση.

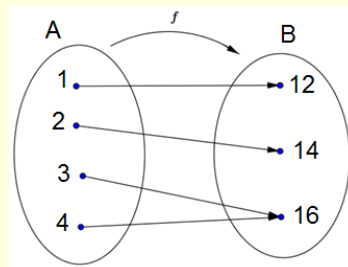
Δραστηριότητες

1. Να γράψετε τα γραφήματα των πιο κάτω συναρτήσεων:

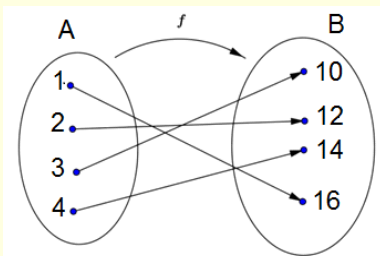
(α)



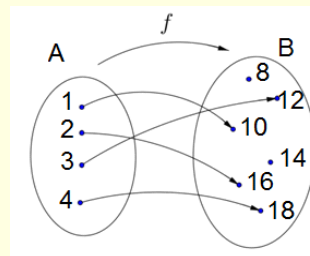
(β)



(γ)



(δ)



2. Να εξετάσετε κατά πόσο τα γραφήματα που δίνονται ορίζουν συναρτήσεις. Στην περίπτωση που ορίζεται συνάρτηση, να αναφέρετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.

(α) $\{(2, 1), (-2, 5), (0, 4), (1, -7)\}$

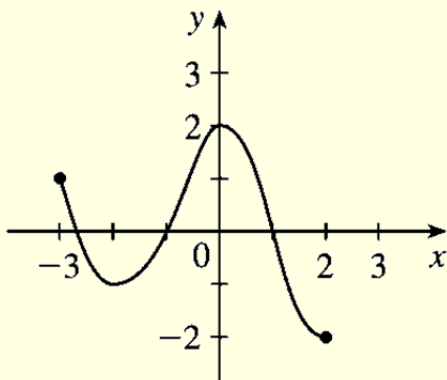
(β) $\{(1, 8), (-4, -5), (-3, 3), (1, 1)\}$

(γ) $\{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1)\}$

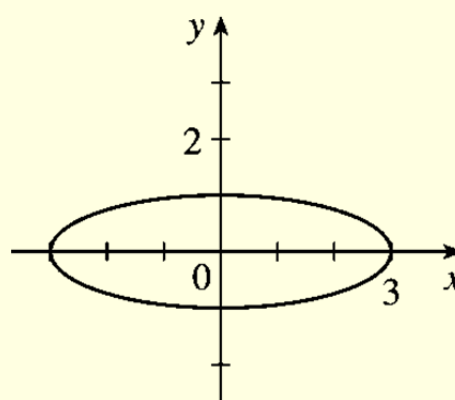
(δ) $\{(2, 4), (-6, 0), (-3, 0), (4, -2), (2, 2)\}$

3. Να εξετάσετε ποιες από τις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις είναι συνάρτηση του y ως προς x :

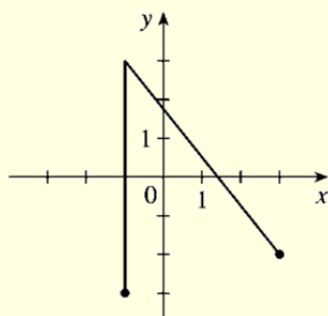
(α)



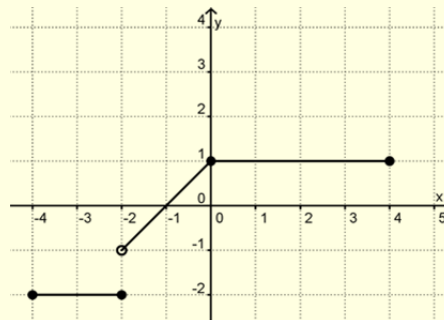
(β)



(γ)



(δ)



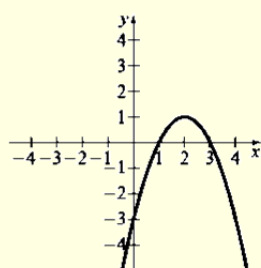
4. Αν το σημείο $(3,8)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g , να υπολογίσετε το $a \in \mathbb{R}$ σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:

(α) $g(x) = x^2 + a$

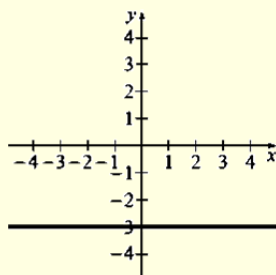
(β) $g(x) = ax + 2$

5. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των συναρτήσεων, που παρουσιάζονται με τις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις:

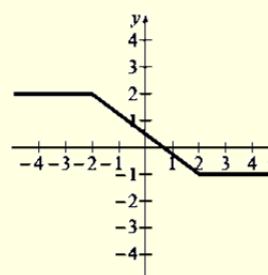
(α)



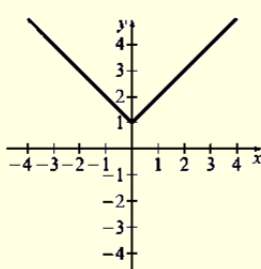
(β)



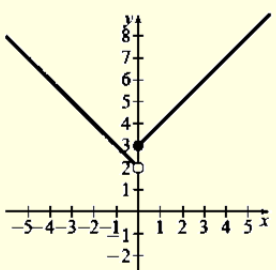
(γ)



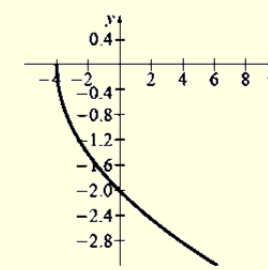
(δ)



(ε)



(στ)



6. Να εξετάσετε αν η καθεμία από τις πιο κάτω εξισώσεις ορίζει συνάρτηση με ανεξάρτητη μεταβλητή το x .

(α) $y = x^2, x \in \mathbb{R}$

(β) $y = x^5, x \in \mathbb{R}$

(γ) $y = \frac{1}{x}, x \neq 0$

(δ) $y^2 = 16 - x^2, x \in [-4, 4]$

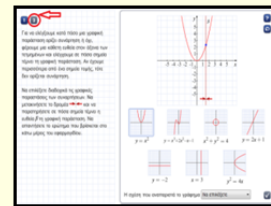
(ε) $y^2 = x, x \geq 0$

(στ) $x + 2y = 1, x \in \mathbb{R}$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 1$.

- (α) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες.
- (β) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της f με τη χρήση δυναμικού λογισμικού δημιουργίας γραφικών παραστάσεων.
- (γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

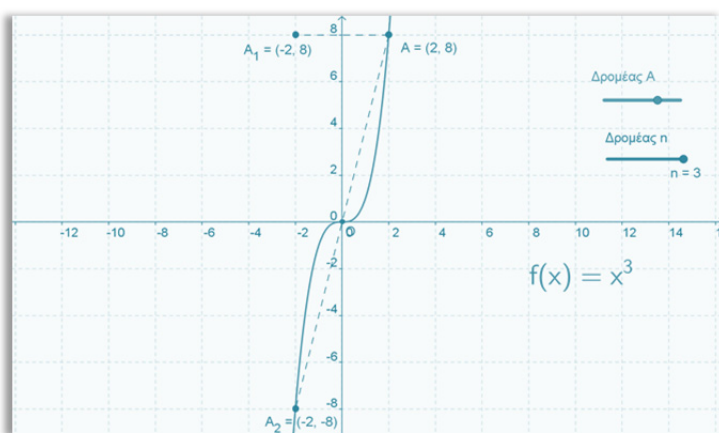
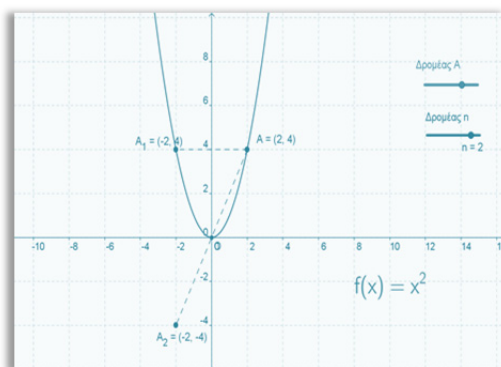
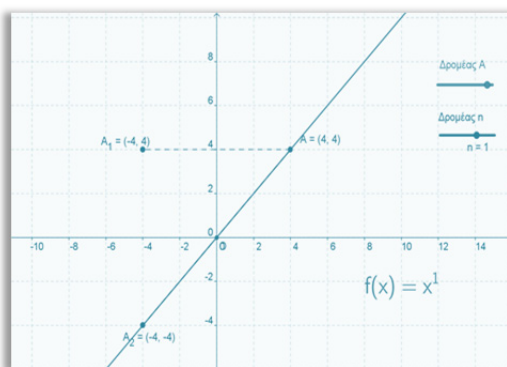
8. Να χρησιμοποιήσετε το ψηφιακό εκπαιδευτικό περιεχόμενο «1.4 Η έννοια της συνάρτησης» και να ακολουθήσετε τις οδηγίες ώστε να εξετάσετε κατά πόσο ορίζεται συνάρτηση ή όχι για καθεμιά από τις γραφικές παραστάσεις.



4.4 ΕΙΔΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ – ΑΡΤΙΑ, ΠΕΡΙΤΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Να ανοίξετε το αρχείο «Blyk_En04_eidikes.ggb».

Διερεύνηση



- ✓ Μετακινώντας το «Δρομέα n » εμφανίζεται, ανάλογα με τις τιμές του n ($n = -2, -1, 0, 1, 2, 3$), η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^n$.
- ✓ Για καθεμιά από τις γραφικές παραστάσεις να καταγράψετε τις παρατηρήσεις σας.
- ✓ Να εξετάσετε αν παρουσιάζουν συμμετρία ως προς κέντρο ή ως προς άξονα.

Ορισμός:

Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ για την οποία ισχύει $f(x) = a$, για κάθε $x \in A$ ($\forall x \in A$), όπου a σταθερό στοιχείο του B , λέγεται **σταθερή συνάρτηση** στο A ή απλά σταθερή.

Δηλαδή, όλα τα στοιχεία του A έχουν την ίδια τιμή στο B (Το σύνολο τιμών είναι μονοσύνολο και ισχύει $f(A) = \{a\} \subseteq B$).

Παράδειγμα: Η συνάρτηση $f(x) = 3, x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερή συνάρτηση.

Ορισμός:

Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow A$ για την οποία ισχύει $f(x) = x$, για κάθε $x \in A$ ($\forall x \in A$), λέγεται **ταυτοτική συνάρτηση** στο A ή απλά ταυτοτική.

Παράδειγμα: Η συνάρτηση $f(x) = (x-1)^2 - x^2 + 3x - 1, x \in \mathbb{R}$ είναι ταυτοτική, γιατί $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ορισμός:

Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ λέγεται **πολυωνυμική**, αν είναι της μορφής

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, x \in A,$$

όπου $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}_0$.

Παράδειγμα: Η συνάρτηση $f(x) = x^7 + 4x^3 - x^2 + 3x - 1, x \in \mathbb{R}$ είναι πολυωνυμική ενώ οι συναρτήσεις $g(x) = x^{-1}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$ και $h(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$ δεν είναι πολυωνυμικές.

Σημείωση: Αν μια πολυωνυμική συνάρτηση είναι μηδενικού βαθμού, τότε η συνάρτηση είναι σταθερή.

Ορισμός: Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ λέγεται **ρητή** αν είναι της μορφής

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

όπου $P(x), Q(x)$ είναι πολυώνυμα και $Q(x) \neq 0, \forall x \in A$.

Ισοδύναμα, μια ρητή συνάρτηση έχει τη μορφή $f(x) = \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{\beta_\mu x^\mu + \dots + \beta_1 x + \beta_0}$ με $n, \mu \in \mathbb{N}_0$ και $\beta_\mu x^\mu + \dots + \beta_1 x + \beta_0 \neq 0, \forall x \in A$.

Παράδειγμα: Η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^4 - 4x + 1}{x^2 + 3}, x \in \mathbb{R}$ είναι μια ρητή συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Σημείωση: Αν ο παρονομαστής μιας ρητής συνάρτησης είναι μηδενικού βαθμού, τότε η συνάρτηση είναι πολυωνυμική.

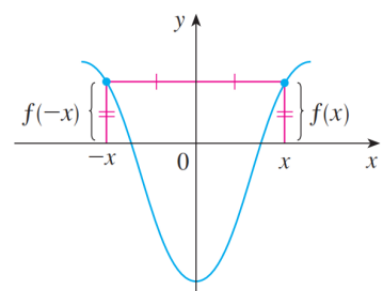
ΑΡΤΙΕΣ-ΠΕΡΙΤΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

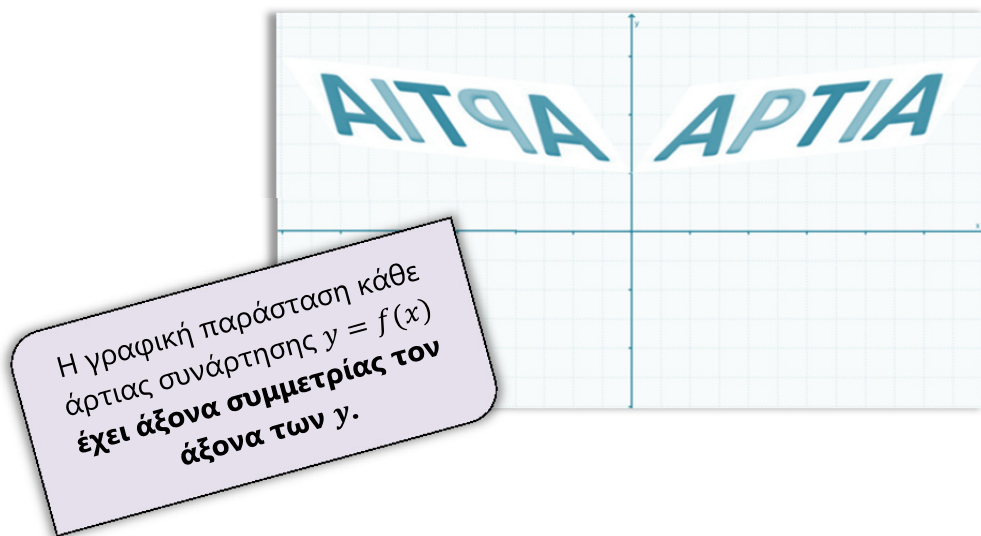
Ορισμός:

Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ ονομάζεται **άρτια**, όταν για κάθε $x \in A$ ($\forall x \in A$) ισχύει:

$$-x \in A \text{ και } f(-x) = f(x)$$

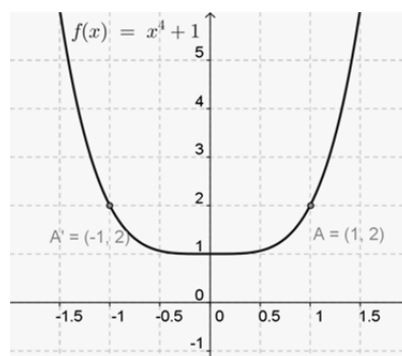
Μια άρτια συνάρτηση f έχει την ίδια τιμή σε αντίθετα στοιχεία του πεδίου ορισμού της, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των τεταγμένων.





Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 1, x \in \mathbb{R}$, είναι άρτια με άξονα συμμετρίας τον άξονα των y .

Από τη γραφική παράσταση, φαίνεται ότι $f(-1) = 2 = f(1)$ και γενικά $f(-a) = a^4 + 1 = f(a)$.

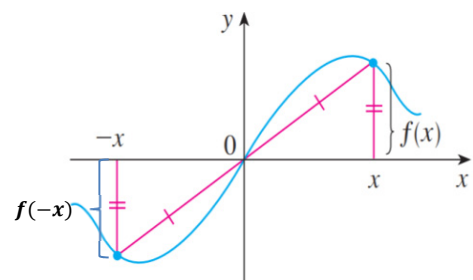


Ορισμός:

Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ ονομάζεται **περιττή**, όταν για κάθε $x \in A$ ($\forall x \in A$) ισχύει:

$$-x \in A \text{ και } f(-x) = -f(x)$$

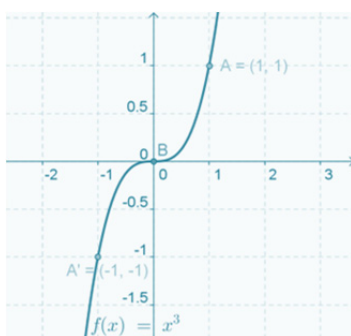
Μια περιττή συνάρτηση f έχει αντίθετες τιμές σε αντίθετα στοιχεία του πεδίου ορισμού της, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.





Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$, είναι περιττή με κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων $(0,0)$.

Από τη γραφική παράσταση, φαίνεται ότι $f(-1) = -1 = -f(1)$ και γενικά $f(-a) = -a^3 = -f(a)$.



Παράδειγμα 1:

Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω συναρτήσεις είναι σταθερές.

- (α) $f(x) = 2(x + 4) - 2x, x \in \mathbb{R}$
- (β) $f(x) = 2(x + 4) - 8, x \in \mathbb{R}$
- (γ) $f(x) = 2(x + 4) - 2x - 8, x \in \mathbb{R}$
- (δ) $f(x) = x^3 - 4x + 2, x \in \{-2, 0, 2\}$

Λύση

- (α) Για τη συνάρτηση $f(x) = 2(x + 4) - 2x, x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f(x) = 8, x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή, η f είναι σταθερή συνάρτηση.
- (β) Για τη συνάρτηση $f(x) = 2(x + 4) - 8, x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f(x) = 2x, x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή, η f δεν είναι σταθερή συνάρτηση.
- (γ) Για τη συνάρτηση $f(x) = 2(x + 4) - 2x - 8, x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή, η f είναι σταθερή συνάρτηση.
- (δ) Για τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - 4x + 2, x \in \{-2, 0, 2\}$ ισχύει $f(-2) = f(0) = f(2) = 2$. Επομένως, $f(x) = 2, \forall x \in \{-2, 0, 2\}$. Άρα, η συνάρτηση είναι σταθερή στο $\{-2, 0, 2\}$.

Παράδειγμα 2:

Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις $y = f(x)$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι άρτιες.

(α) $f(x) = 3x^2$

(β) $f(x) = x^6 + 2x^4 - 3x^2 + 1$

(γ) $f(x) = 3x^2 + 2x + 3$

(δ) $f(x) = \sin x$

(ε) $f(x) = |x| + x^2 + 2$

Λύση

(α) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$, ισχύει $-a \in \mathbb{R}$ και $f(-a) = 3(-a)^2 = 3a^2 = f(a)$.
Άρα, η συνάρτηση f είναι άρτια.

(β) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$, ισχύει $-a \in \mathbb{R}$ και:
 $f(-a) = (-a)^6 + 2(-a)^4 - 3(-a)^2 + 1 = a^6 + 2a^4 - 3a^2 + 1 = f(a)$
Άρα, η συνάρτηση f είναι άρτια.

(γ) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$, ισχύει $-a \in \mathbb{R}$ και:
 $f(-a) = 3(-a)^2 + 2(-a) + 3 = 3a^2 - 2a + 3 \neq f(a)$
Άρα, η συνάρτηση f δεν είναι άρτια.

(δ) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$, ισχύει $-a \in \mathbb{R}$ και $f(-a) = \sin(-a) = -\sin a = -f(a)$.
Άρα, η συνάρτηση f είναι άρτια.

(ε) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ ισχύει $-a \in \mathbb{R}$ και $f(-a) = |-a| + (-a)^2 + 2 = a + a^2 + 2 = f(a)$. Άρα, η συνάρτηση f είναι άρτια.

Παράδειγμα 3:

Να εξετάσετε κατά πόσο η συνάρτηση $f(x) = x^2$, $x \in [-2, 8]$ είναι άρτια.

Λύση

Η συνάρτηση $f(x) = x^2$, $x \in [-2, 8]$ δεν είναι άρτια, γιατί το $3 \in [-2, 8]$ ενώ το $-3 \notin [-2, 8]$.

Δηλαδή, δεν ισχύει ότι για κάθε $x \in [-2, 8]$ το $-x \in [-2, 8]$.

Παράδειγμα 4:

Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις $y = f(x)$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι περιττές.

(α) $f(x) = 2x^3$

(β) $f(x) = x^5 + 4x^3 + x$

(γ) $f(x) = x^5 - 4x^3 + x + 1$

(δ) $f(x) = \eta \mu x$

Λύση

(α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $-x \in \mathbb{R}$ και $f(-x) = 2 \cdot (-x)^3 = -2x^3 = -f(x)$.

Άρα, η συνάρτηση f είναι περιττή συνάρτηση.

(β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $-x \in \mathbb{R}$ και:

$$f(-x) = (-x)^5 + 4(-x)^3 + (-x) = -x^5 - 4x^3 - x = -(x^5 + 4x^3 + x) = -f(x)$$

Άρα, η συνάρτηση f είναι περιττή συνάρτηση.

(γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $-x \in \mathbb{R}$ και:

$$f(-x) = (-x)^5 - 4(-x)^3 + (-x) + 1 = -x^5 + 4x^3 - x + 1 \neq -f(x)$$

Άρα, η συνάρτηση f δεν είναι περιττή συνάρτηση.

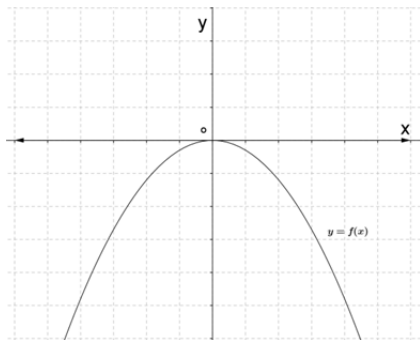
(δ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $-x \in \mathbb{R}$ και $f(-x) = \eta\mu(-x) = -\eta\mu x = -f(x)$.

Άρα, η συνάρτηση f είναι περιττή συνάρτηση.

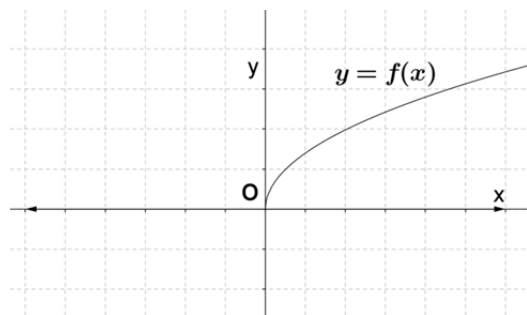
Παράδειγμα 5:

Να εξετάσετε ποια από τα ακόλουθα διαγράμματα είναι γραφική παράσταση είτε άρτιας είτε περιττής συνάρτησης.

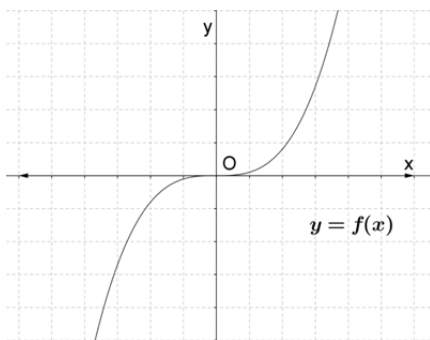
(α)



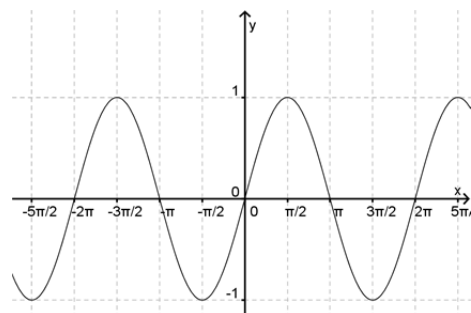
(β)



(γ)



(δ)



Λύση

(α) Είναι άρτια, γιατί η γραφική της παράσταση, είναι συμμετρική ως προς τον y' άξονα.

- (β) Δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή, γιατί η γραφική της παράσταση δεν είναι συμμετρική ως προς τον y/y άξονα, ούτε έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$.
- (γ) Είναι περιττή, επειδή έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$.
- (δ) Είναι περιττή, επειδή έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$.

Παράδειγμα 6:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x|$.

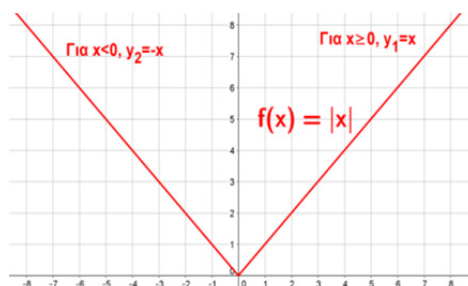
- (α) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράστασή της.
- (β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- (γ) Να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή συνάρτηση.

Λύση:

- (α) Για $x \geq 0$ σχεδιάζουμε την ημιευθεία $y_1 = x$ και για $x < 0$ σχεδιάζουμε την ημιευθεία $y_2 = -x$.

- (β) Αφού ισχύει $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση έχει σύνολο τιμών $[0, +\infty)$.

- (γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των τεταγμένων και άρα είναι άρτια.



Ορισμός:

Μια συνάρτηση ονομάζεται **πολλαπλού τύπου** (ή τμηματική) όταν παρουσιάζει διαφορετικό τύπο σε ξένα μεταξύ τους υποσύνολα του πεδίου ορισμού της.

Η συνάρτηση $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \in [0, +\infty) \\ -x, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$ είναι πολλαπλού τύπου (ή τμηματική), γιατί στο διάστημα $A_1 = [0, +\infty)$ παρουσιάζει διαφορετικό τύπο από το διάστημα $A_2 = (-\infty, 0)$ και τα σύνολα A_1, A_2 είναι ξένα μεταξύ τους.

Παράδειγμα 7:

Δίνεται η πολλαπλού τύπου συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & \text{αν } x \leq -1 \\ x, & \text{αν } -1 < x \leq 1 \\ -1, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

- (α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-4), f(-1), f(0), f(25)$.
- (β) Να κατασκευάσετε τη γραφική της παράσταση.

Λύση

- (α) Το -4 ανήκει στο πεδίο ορισμού του πρώτου «κλάδου» και η τιμή της συνάρτησης βρίσκεται από τον αντίστοιχο τύπο, δηλαδή ισχύει $f(-4) = (-4)^2 + 2(-4) = 8$.

Με τον ίδιο τρόπο σκέψης βρίσκουμε ότι:

$$f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) = -1$$

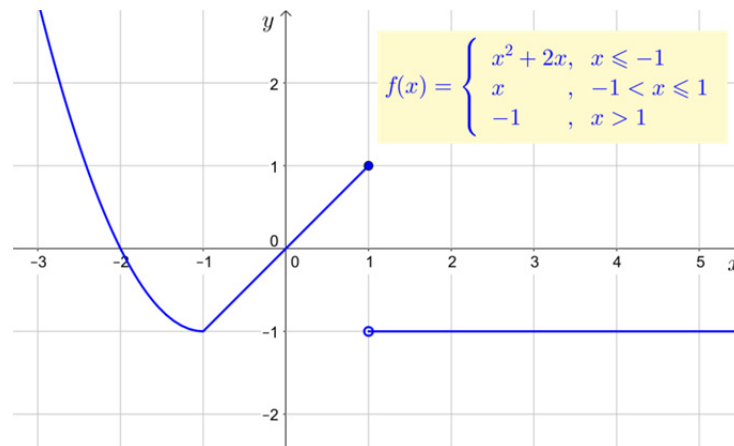
$$f(0) = 0, f(25) = -1.$$

(β) Για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης κατασκευάζουμε:

✓ Την $y = x^2 + 2x$ για $x \leq -1$

✓ Την $y = x$ για $-1 < x \leq 1$

✓ Την $y = -1$ για $x > 1$



Παράδειγμα 8:

Το κόστος ενός τηλεφωνήματος από Κύπρο στην Ελλάδα (προς κινητό) είναι €0,25020 ανά λεπτό (ή ανά μέρος ενός λεπτού), συμπεριλαμβανομένου του Φ.Π.Α.

(α) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση του κόστους K (σε ευρώ) του τηλεφωνήματος ως συνάρτηση του χρόνου ομιλίας t (σε λεπτά).

(β) Ποιο είναι το κόστος ενός τηλεφωνήματος από Κύπρο στην Ελλάδα (προς κινητό) διάρκειας 7 λεπτών και 13 δευτερολέπτων;

Λύση

(α) Έστω $K(t)$ το κόστος (σε ευρώ) ενός τηλεφωνήματος διάρκειας t λεπτών. Αφού $t > 0$, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής είναι το $(0, +\infty)$. Από τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε την πολλαπλού τύπου συνάρτηση $K(t)$ με:

$$K(t) = 0,25020, \quad 0 < t \leq 1$$

$$K(t) = 0,25020 \cdot 2 = 0,50040, \quad 1 < t \leq 2$$

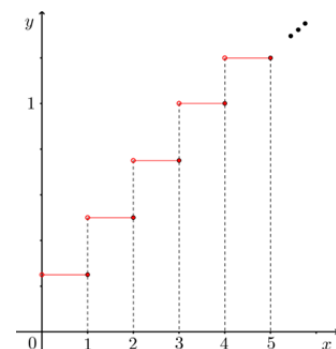
$$K(t) = 0,25020 \cdot 3 = 0,75060, \quad 2 < t \leq 3$$

$$K(t) = 0,25020 \cdot 4 = 1,00080, \quad 3 < t \leq 4$$

...

(β) Αφού η διάρκεια του τηλεφωνήματος είναι 7 λεπτά και 13 δευτερόλεπτα, το κόστος θα είναι:

$$K(t) = 0,25020 \cdot 8 = 2,00160 \text{ ευρώ}$$



Παράδειγμα 9:

Να μετασχηματίσετε τις πιο κάτω συναρτήσεις σε πολλαπλού τύπου και να τις αναπαραστήσετε γραφικά σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων.

(α) $f(x) = |x - 2|, x \in \mathbb{R}$

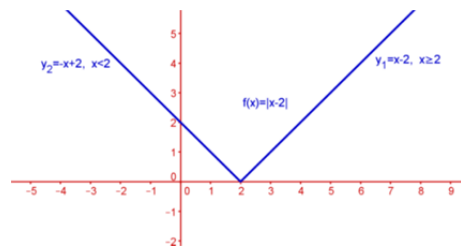
(β) $g(x) = |x - 2| - x, x \in \mathbb{R}$

Λύση

(α) Σύμφωνα με τον ορισμό έχουμε,

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{αν } x - 2 \geq 0 \\ -(x - 2) & \text{αν } x - 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow |x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{αν } x \geq 2 \\ -x + 2 & \text{αν } x < 2 \end{cases}$$

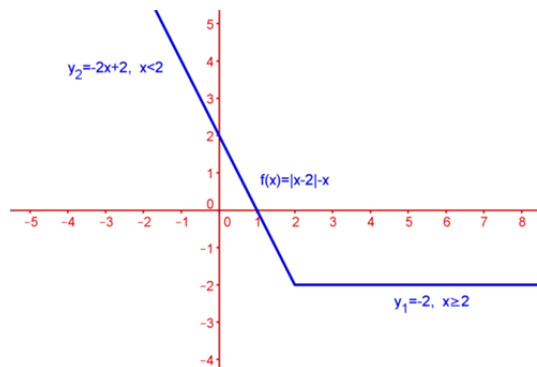
Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f είναι πολλαπλού τύπου, γιατί σε διαφορετικά διαστήματα παρουσιάζει διαφορετικό τύπο. Για $x \geq 2$ σχεδιάζουμε την ημιευθεία $y_1 = x - 2$ και για $x < 2$ σχεδιάζουμε την ημιευθεία $y_2 = -x + 2$.



(β) Σύμφωνα με τον ορισμό έχουμε,

$$|x - 2| - x = \begin{cases} x - 2 - x & \text{αν } x - 2 \geq 0 \\ -(x - 2) - x & \text{αν } x - 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow |x - 2| - x = \begin{cases} -2 & \text{αν } x \geq 2 \\ -2x + 2 & \text{αν } x < 2 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση g είναι πολλαπλού τύπου, γιατί σε διαφορετικά διαστήματα παρουσιάζει διαφορετικό τύπο. Για $x \geq 2$ σχεδιάζουμε την ημιευθεία $y_1 = -2$ και για $x < 2$ σχεδιάζουμε την ημιευθεία $y_2 = -2x + 2$.



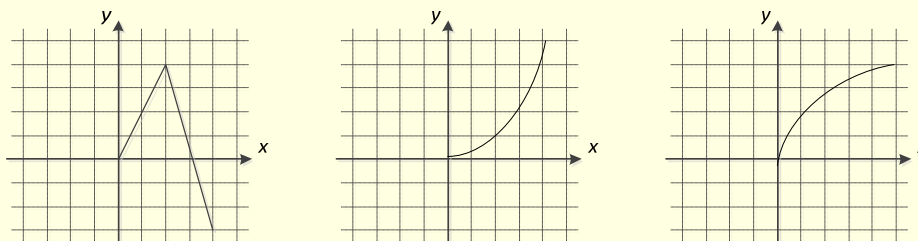
Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τους πιο κάτω ισχυρισμούς και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

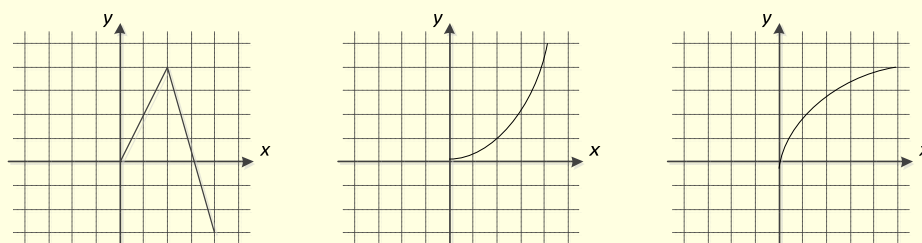
- (α) Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 3x^2$ είναι άρτια.
 (β) Αν μια άρτια συνάρτηση τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο $(\rho, 0), \rho > 0$, τότε θα τον τέμνει και στο $(-\rho, 0)$.
 (γ) Η συνάρτηση $f(x) = x + x^{-2}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$, είναι πολυωνυμική.
 (δ) Η συνάρτηση $f(x) = |x| - x, x \in \mathbb{R}$ είναι σταθερή συνάρτηση.
 (ε) Η συνάρτηση $f(x) = x^2 - (x - 1)^2 - x + 1, x \in \mathbb{R}$ είναι ταυτοτική.

2. Να συμπληρώσετε τις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις ώστε να αναπαριστούν:

- (α) Άρτια συνάρτηση



- (β) Περιττή συνάρτηση



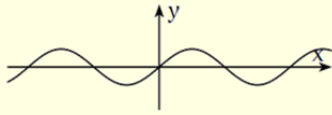
3. Να εξετάσετε αν οι πιο κάτω συναρτήσεις είναι άρτιες, περιττές ή τίποτα από τα δύο και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

- (α) $f(x) = \sqrt{x - 4}$
 (β) $g(x) = 3x^3 + x$
 (γ) $h(x) = x^6 - x^4$

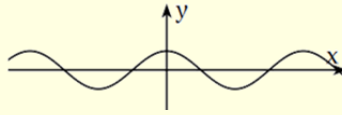
4. Να εξετάσετε αν η σταθερή συνάρτηση $f(x) = 2, x \in \mathbb{R}$ άρτια ή περιττή.

5. Πιο κάτω δίνονται οι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων. Να εξετάσετε ποιες από αυτές είναι άρτιες και ποιες είναι περιττές; (Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας).

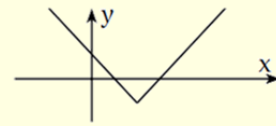
(α)



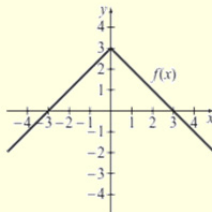
(β)



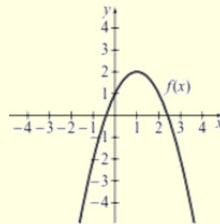
(γ)



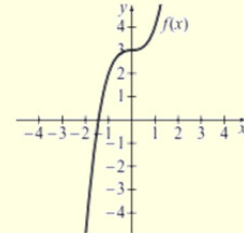
(δ)



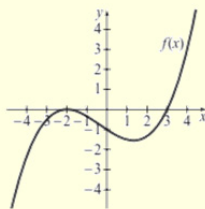
(ε)



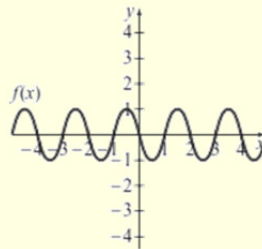
(στ)



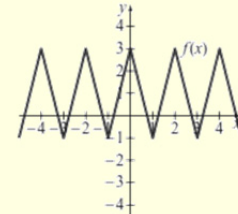
(ζ)



(η)



(θ)



6. Δίνεται ότι η συνάρτηση $g(x) = (x + 2)^2 + f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ είναι ταυτοτική. Να προσδιορίσετε την συνάρτηση $f(x)$.

7. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες είναι περιττές.

(α) $f(x) = 3x^2 + 5x^4$

(β) $f(x) = 3|x| + 1$

(γ) $f(x) = |x + 1|$

(δ) $f(x) = x^3 - 3x^5$

(ε) $f(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$

(στ) $f(x) = |x - 2| + |x + 2|$

8. Έστω η συνάρτηση f με: $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1, & x \leq 2 \\ 3x - a, & x > 2 \end{cases}$

(α) Να βρείτε το $a \in \mathbb{R}$, ώστε το διάγραμμα της συνάρτησης να περνά από το σημείο $A(3, 4)$.

(β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι θετική.

9. Να εξετάσετε αν οι πιο κάτω συναρτήσεις είναι τμηματικές και τις παραστήσετε γραφικά.

(α) $f(x) = |x - 4|, x \in \mathbb{R}$

(β) $g(x) = |x - 4| + x, x \in \mathbb{R}$

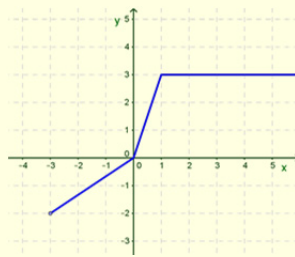
(γ) $h(x) = |x^2 + 1|, x \in \mathbb{R}$

10. Να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f: [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & -3 < x < 0 \\ 2 - x^2 & 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

11. Να βρείτε το εμβαδόν του σχήματος που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = |x| - 4$ και $g(x) = 4 - |x|$.

12. Να βρείτε τον τύπο της τμηματικής συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που έχει την πιο κάτω γραφική παράσταση.

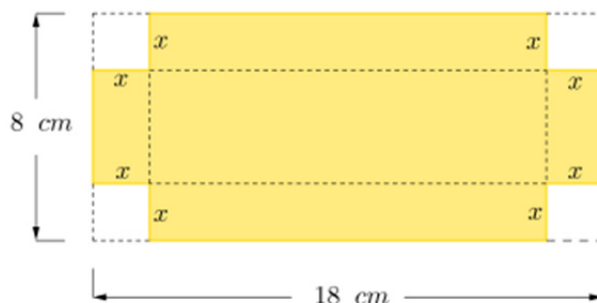


4.5 ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ-ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΠΟΥ ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΜΕ ΤΥΠΟ

Διερεύνηση

Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ανοικτό στο πάνω μέρος, από ένα χαρτόνι σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Οι διαστάσεις του χαρτονιού είναι 18 cm και 8 cm . Για να κατασκευάσουμε το κουτί αυτό, αποκόπτουμε ίσα τετράγωνα από τις τέσσερις γωνίες του χαρτονιού και διπλώνουμε προς τα πάνω τα τέσσερα μικρά ορθογώνια που σχηματίζονται κατά μήκος των διακεκομμένων ευθύγραμμων τμημάτων.

- (α) Έστω V ο όγκος του κουτιού που θα σχηματιστεί, όταν τα τετράγωνα που θα αποκόψουμε έχουν μήκος πλευράς x . Να βρείτε ένα τύπο που να εκφράζει τον όγκο V του κουτιού ως συνάρτηση του x .
- (β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του όγκου V .
- (γ) Να χρησιμοποιήσετε το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας [Geogebra](#), για να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του όγκου V του κουτιού και να δώσετε μια εκτίμηση για το σύνολο τιμών της συνάρτησης αυτής.



§4.5.1 ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Σε κάποιες περιπτώσεις, το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f δεν αναφέρεται. Σε αυτές τις περιπτώσεις, το πεδίο ορισμού της f ορίζεται ως το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών, για το οποίο οι τιμές της συνάρτησης f είναι πραγματικοί αριθμοί.

Για να βρούμε το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης που ορίζεται με τύπο της μορφής $y = f(x)$, όταν αυτό δεν αναφέρεται, ελέγχουμε:

1. Αν η f είναι πολυωνυμική (π.χ. $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ ή $f(x) = 3x + 1$), τότε το πεδίο ορισμού είναι το $\mathbb{R}$.

2. Αν η f είναι ρητή (π.χ. $f(x) = \frac{1}{x}$ ή $f(x) = \frac{2x}{x-3}$), δηλαδή εμφανίζεται μεταβλητή στον παρονομαστή, τότε εξαιρούμε όλους εκείνους τους πραγματικούς αριθμούς που μηδενίζουν τον παρονομαστή.
3. Αν στην εξίσωση εμφανίζεται ρίζα, (π.χ. $f(x) = \sqrt{x-4}$), τότε εξαιρούμε όλους εκείνους τους πραγματικούς αριθμούς που δίνουν αρνητικό υπόριζο.
4. Γενικά σε μια συνάρτηση με τύπο $y = f(x)$ προσπαθούμε να βρούμε τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής x , έτσι ώστε το $f(x)$ να είναι πραγματικός αριθμός.

Παράδειγμα 1:

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των πιο κάτω συναρτήσεων, που ορίζονται με τύπο:

$$\begin{array}{ll} (\alpha) & f(x) = x^2 - 2x \\ (\beta) & g(x) = \frac{x}{x^2 - 1} \\ (\gamma) & h(x) = \sqrt{2 - x} \\ (\delta) & k(x) = \frac{\sqrt{x + 5}}{x - 2} \end{array}$$

Λύση:

(α) Στη συνάρτηση f το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών (το $\mathbb{R}$), ως πολυωνυμική συνάρτηση.

(β) Στη συνάρτηση g το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο
 $A = \{x \mid x \neq -1, x \neq 1\} = \mathbb{R} - \{-1, +1\}$,
 ως ρητή συνάρτηση.

(γ) Στη συνάρτηση h εμφανίζεται τετραγωνική ρίζα και επομένως θα πρέπει το υπόριζο να είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός.
 Δηλαδή:

$$2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$$

Τελικά, συμπεραίνουμε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h είναι το σύνολο:

$$A = \{x \mid x \leq 2\} = (-\infty, 2]$$

(δ) Γνωρίζουμε ότι η τετραγωνική ρίζα ορίζεται μόνο για μη-αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς. Συνεπώς, θα πρέπει το υπόριζο να είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός.

Δηλαδή:

$$x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -5$$

Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι η διαίρεση με το 0 δεν ορίζεται. Συνεπώς, ο παρονομαστής $x - 2$ δεν μπορεί να είναι ίσος με 0, δηλαδή το x δεν μπορεί να ισούται με 2.

Τελικά, συμπεραίνουμε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h είναι το σύνολο:

$$A = \{x \mid x \geq -5, x \neq 2\} = [-5, 2) \cup (2, +\infty)$$

Παράδειγμα 2:

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο: $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{2x-10}}$

Λύση

Ο παρονομαστής δεν πρέπει να ισούται με μηδέν αλλά ταυτόχρονα πρέπει να ορίζεται η τετραγωνική ρίζα. Συνεπώς θα πρέπει:

$$2x - 10 > 0 \Leftrightarrow x > 5$$

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι: $A = (5, +\infty)$

§4.5.2 ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Σε ειδικές περιπτώσεις, για να βρούμε το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης που ορίζεται με τύπο της μορφής $y = f(x)$:

1. Επιλύουμε τον τύπο ως προς x .
2. Περιορίζουμε το x στο πεδίο ορισμού της f και υπολογίζουμε τις τιμές που μπορεί να πάρει το y .

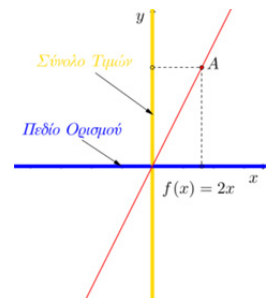
Παράδειγμα 3:

Να βρείτε το σύνολο τιμών για καθεμία από τις πιο κάτω συναρτήσεις:

(α) $f(x) = 2x, x \in \mathbb{R}$ (β) $g(x) = 2x, x \in [-2, 2]$ (γ) $h(x) = \frac{2x}{x+1}, x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

Λύση

- (α) Μετασχηματίζουμε τον τύπο ως προς x και παίρνουμε:
 $x = \frac{y}{2} \in \mathbb{R}$, άρα $y \in \mathbb{R}$. Συμπεραίνουμε ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

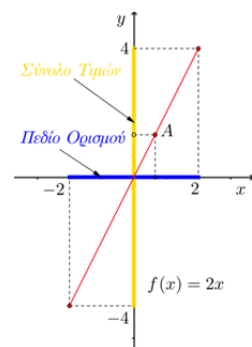


- (β) Η συνάρτηση ορίζεται από τον τύπο $y = 2x$, όπου $x \in [-2, 2]$.

Έχουμε δηλαδή ότι $x = \frac{y}{2} \in [-2, 2]$. Άρα:

$$-2 \leq \frac{y}{2} \leq 2 \Leftrightarrow -4 \leq y \leq 4$$

Τελικά, συμπεραίνουμε ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $[-4, 4]$.



- (γ) Μετασχηματίζουμε τον τύπο ως προς x και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x}{x+1} \Leftrightarrow y(x+1) = 2x \\ &\Leftrightarrow yx + y = 2x \\ &\Leftrightarrow yx - 2x = -y \\ &\Leftrightarrow x(y-2) = -y \Leftrightarrow x = \frac{-y}{y-2}, \text{ όπου } y \neq 2. \end{aligned}$$

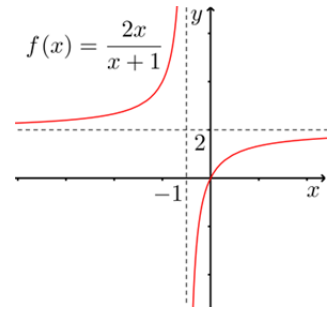
Μένει να διασφαλίσουμε ότι $x \neq -1$. Πράγματι, έχουμε:

$$\frac{-y}{y-2} \neq -1 \Leftrightarrow -y \neq -y + 2 \Leftrightarrow 0 \neq 2,$$

που προφανώς αληθεύει για όλες τις τιμές του $y \neq 2$.

Έτσι, το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο:

$$\{y \mid x \neq -1\} = \mathbb{R} - \{2\}$$



Παράδειγμα 4:

Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών για καθεμία από τις πιο κάτω συναρτήσεις:

(α) $f(x) = \frac{2x}{x+1}, x \geq 1$

(β) $g(x) = \sqrt{x+4}$

(γ) $h(x) = x^2 - 4x + 3$

(δ) $k(x) = \begin{cases} x-2, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$

Λύση

(α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι:

$$A = \{x \mid x \neq -1\} = \mathbb{R} - \{-1\}$$

Μετασχηματίζουμε τον τύπο ως προς x και παίρνουμε:

$$y = \frac{2x}{x+1} \Leftrightarrow y(x+1) = 2x \Leftrightarrow yx + y = 2x \Leftrightarrow yx - 2x = -y \Leftrightarrow x(y-2) = -y \Leftrightarrow x = \frac{-y}{y-2},$$

όπου $y \neq 2$.

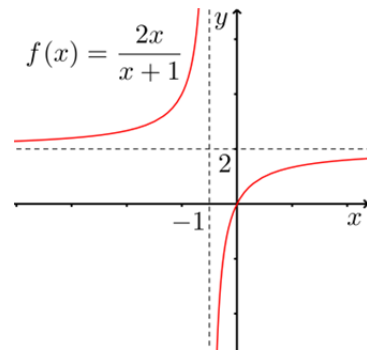
Μένει να διασφαλίσουμε ότι $x \neq -1$.

Πράγματι, έχουμε: $\frac{-y}{y-2} \neq -1 \Leftrightarrow -y \neq -y + 2 \Leftrightarrow 0 \neq 2$,

που προφανώς αληθεύει για όλες τις τιμές του $y \neq 2$.

Έτσι, το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο:

$$\{y \mid x \neq -1\} = \mathbb{R} - \{2\}$$



(β) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι:

$$A = \{x \mid x+4 \geq 0\} = [-4, +\infty)$$

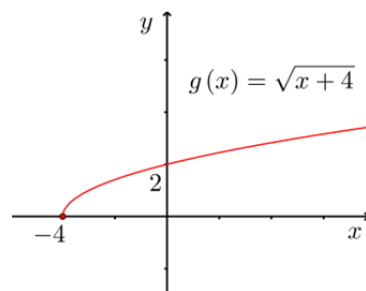
Μετασχηματίζουμε τον τύπο ως προς x και παίρνουμε:

$$y = \sqrt{x+4} \Leftrightarrow y^2 = x+4 \Leftrightarrow x = y^2 - 4$$

Μένει να διασφαλίσουμε ότι $x \geq -4$. Πράγματι,

$$\text{έχουμε: } y^2 - 4 \geq -4 \Leftrightarrow y^2 \geq 0,$$

που προφανώς αληθεύει για όλες τις πραγματικές τιμές του y . Επιπλέον, το y είναι μη αρνητικό αφού ισούται με μια τετραγωνική ρίζα.



Έτσι, το σύνολο τιμών της g είναι το σύνολο:

$$\{y \mid x \geq -4\} = [0, +\infty)$$

(γ) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h είναι:

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

Α' τρόπος: Μετασχηματίζουμε τον τύπο ως προς x και παίρνουμε:

$$y = x^2 - 4x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 - y = 0$$

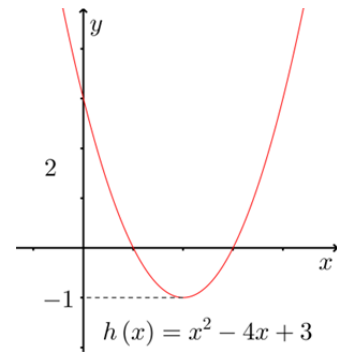
$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(3-y)}}{2} \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4+4y}}{2}$$

Μένει να διασφαλίσουμε ότι $x \in \mathbb{R}$. Πράγματι, έχουμε:

$$x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{4 \pm \sqrt{4+4y}}{2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 4+4y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -1$$

Έτσι, το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο:

$$\{y \mid x \in \mathbb{R}\} = [-1, +\infty)$$



Β' τρόπος:

Γράφουμε το τριώνυμο $y = x^2 - 4x + 3, x \in \mathbb{R}$ στη μορφή $y = (x-2)^2 - 1, x \in \mathbb{R}$.

$$(x-2)^2 \geq 0 \Rightarrow (x-2)^2 - 1 \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}$$

Άρα, $y \geq -1$ και επομένως το σύνολο τιμών είναι

$$\{y \mid x \in \mathbb{R}\} = [-1, +\infty)$$

(δ) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης k είναι:

$$D_k = \{x \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

- $x \leq 1$

Μετασχηματίζουμε τον τύπο ως προς x και παίρνουμε:

$$y = x - 2 \Leftrightarrow x = y + 2$$

Μένει να διασφαλίσουμε ότι $x \leq 1$. Πράγματι, έχουμε:

$$x \leq 1 \Leftrightarrow y + 2 \leq 1 \Leftrightarrow y \leq -1 \quad (1)$$

- $x > 1$

Μετασχηματίζουμε τον τύπο ως προς x και παίρνουμε:

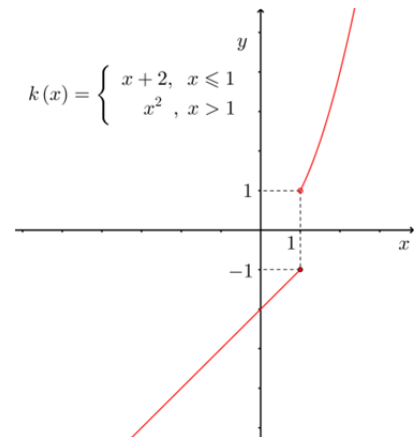
$$y = x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{y}, \text{ όπου } y \geq 0$$

Μένει να διασφαλίσουμε ότι $x > 1$. Πράγματι, έχουμε:

$$x > 1 \Leftrightarrow \sqrt{y} > 1 \Leftrightarrow y > 1 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2), έχουμε ότι το σύνολο τιμών της k είναι το σύνολο:

$$\{y \mid x \in \mathbb{R}\} = (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$$



Σχόλιο: Ο «πρώτος κλάδος» της συνάρτησης k δίνει τις τιμές $(-\infty, -1]$, ενώ ο «δεύτερος κλάδος» τις τιμές $(1, +\infty)$. Έτσι, το σύνολο τιμών της συνάρτησης k προκύπτει από την ένωση των πιο πάνω διαστημάτων.

Παράδειγμα 5:

Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης με τύπο:

$$(\alpha) \quad f(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & x \in [-1, 1] \\ 3x - 3, & x > \frac{7}{6} \end{cases}$$

$$(\beta) \quad g(x) = \sqrt{x^2 + 3}, x \in \mathbb{R}$$

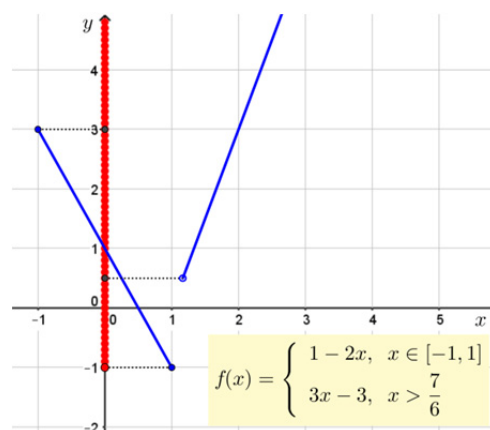
Λύση

(α) Από τον πρώτο κλάδο έχουμε:

$$\begin{aligned} y = 1 - 2x \Leftrightarrow x = \frac{1 - y}{2} &\Leftrightarrow -1 \leq \frac{1 - y}{2} \leq 1 \\ -1 \leq x \leq 1 &\Leftrightarrow -2 \leq 1 - y \leq 2 \\ &\Leftrightarrow -1 \leq y \leq 3 \end{aligned}$$

Από τον δεύτερο κλάδο έχουμε:

$$\begin{aligned} y = 3x - 3 \Leftrightarrow x = \frac{y + 3}{3} &\Leftrightarrow \frac{y + 3}{3} > \frac{7}{6} \Leftrightarrow y > \frac{1}{2} \\ x > \frac{7}{6} & \end{aligned}$$



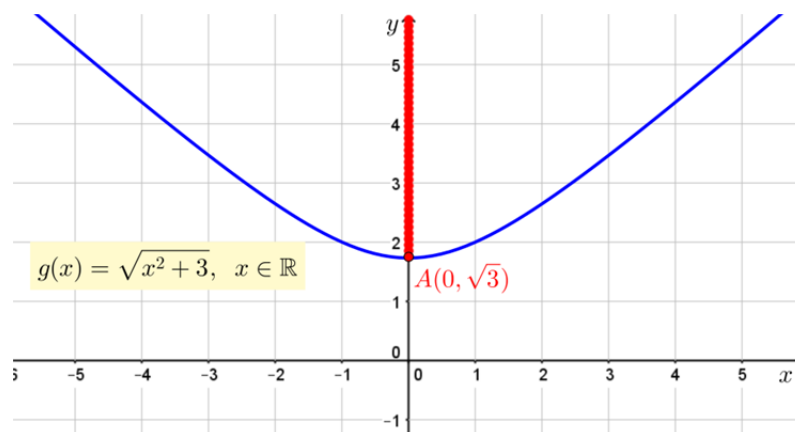
Για να βρούμε το σύνολο τιμών της συνάρτησης θα πρέπει να πάρουμε την ένωση των επί μέρους συνόλων, δηλαδή:

$$f(A) = [-1, 3] \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) = [-1, +\infty)$$

(β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $x^2 \geq 0$.

$$\text{Επομένως, } x^2 + 3 \geq 3 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 3} \geq \sqrt{3}.$$

Άρα το σύνολο τιμών της g είναι $[\sqrt{3}, +\infty)$.



Δραστηριότητες

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού καθεμιάς από τις πιο κάτω συναρτήσεις:

(α) $f(x) = x^2 - 2x + 5$ (β) $f(x) = \frac{3}{x-4}$ (γ) $f(x) = \frac{2x^2-x-1}{x^3-1}$

(δ) $f(x) = \frac{x^4-1}{x^3+1}$ (ε) $g(x) = \sqrt{x+2}$ (στ) $h(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x-1}$

(ζ) $g(x) = \frac{\sqrt{1-2x}}{\sqrt{x+2}}$ (η) $h(x) = \frac{x}{|x|+1}$ (θ) $t(x) = \sqrt{4 - |1 - 2x|}$

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο:

$$f(x) = \frac{3x-\lambda}{x^2-2x+\lambda}, \lambda \in \mathbb{R}$$

3. Να βρείτε το σύνολο τιμών των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $y = 7x - 4, x \in \mathbb{R}$

(β) $y = 2x - 1, x \in [-3, 2]$

(γ) $y = \frac{x+2}{3x-1}, x \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{3}\}$

(δ) $y = \frac{3x-1}{x-2}, x \in (2, +\infty)$

(ε) $f(x) = 3x^2 - 5x + 7, x \in \mathbb{R}$

(στ) $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$

(ζ) $f(x) = 2|x - 1| + 3, x \in \mathbb{R}$

(η) $f(x) = \begin{cases} 3x^2, & x \in [1, 2) \\ 3x - 2, & x \in [2, 6) \end{cases}$

4. Για τη συνάρτηση f ισχύει:

$$x \cdot f(x) + f(-x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

5. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f με τύπο

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 10}.$$

4.6 ΙΣΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Διερεύνηση

Να γράψετε τα γραφήματα των πιο κάτω συναρτήσεων και να τα σχολιάσετε. Να εξετάσετε κατά πόσο τα γραφήματα των συναρτήσεων f και g είναι τα ίδια, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

- ✓ $f(x) = x^2 + 3, x \in \{-1, 0, 1\}, g(x) = x^4 + 3, \{-1, 0, 1\}$
- ✓ $f(x) = x^2 + 3, x \in \{-1, 0, 1\}, g(x) = x^3 + 3, \{-1, 0, 1\}$
- ✓ $f(x) = x^2 + 3, x \in \{-1, 0, 1\}, g(x) = x^2 + 3, \{2, 3, 4\}$
- ✓ $f(x) = x^2 + 3, x \in \{-1, 0, 1\}, g(x) = x^4 + 3, \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

Ορισμός

Δύο πραγματικές συναρτήσεις $f_1: A_1 \rightarrow B_1$ και $f_2: A_2 \rightarrow B_2$, είναι **ίσες**, αν και μόνο αν έχουν:

- το ίδιο πεδίο ορισμού ($A_1 = A_2$)
- το ίδιο πεδίο τιμών ($B_1 = B_2$) και
- τις ίδιες τιμές για κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού τους ($f_1(x) = f_2(x), \forall x \in A_1$)

Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f_1, f_2 είναι ίσες, γράφουμε $f_1 = f_2$.

Όταν ζητείται να αποδείξουμε ότι δύο πραγματικές συναρτήσεις f και g είναι ίσες, τότε με βάση τον ορισμό ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

- (α) Ελέγχουμε αν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού.
- (β) Ελέγχουμε αν έχουν το ίδιο πεδίο τιμών.
- (γ) Ελέγχουμε αν για κάθε x στο πεδίο ορισμού τους ισχύει $f(x) = g(x)$, δηλαδή αν έχουν το ίδιο γράφημα.

Για παράδειγμα οι συναρτήσεις:

- ✓ $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = x^2, x \in \mathbb{N}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$ **δεν είναι ίσες** γιατί δεν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού.
- ✓ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ με τύπο $g(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$, **δεν είναι ίσες** γιατί δεν έχουν το ίδιο πεδίο τιμών (παρόλο που έχουν ίδιο πεδίο ορισμού, ίδιο σύνολο τιμών και ίδιο τύπο).
- ✓ Αν $A = \{-1, 0, 1\}$ και $B = \{0, 1\}$, οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow B$ με τύπο $f(x) = x^2, x \in A$ και $g: A \rightarrow B$ με τύπο $g(x) = x^4, x \in A$ **είναι ίσες** γιατί έχουν ίδιο πεδίο ορισμού, πεδίο τιμών και ισχύει $f(x) = g(x), \forall x \in A$.

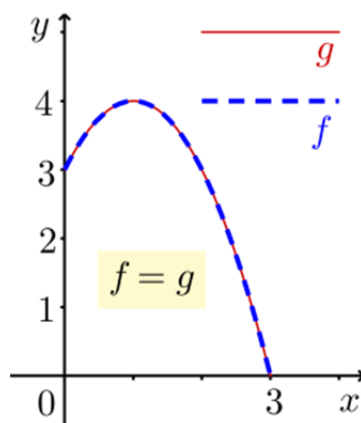
Ειδικότερα, όταν οι πραγματικές συναρτήσεις $f_1: A_1 \rightarrow B_1$ και $f_2: A_2 \rightarrow B_2$ έχουν $B_1 = B_2 = \mathbb{R}$, τότε για να είναι ίσες **αρκεί να εξετάσουμε** ότι ισχύει:

- $A_1 = A_2$ και
- $f_1(x) = f_2(x), \forall x \in A_1$

Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 2x, x \in \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \frac{2x^3+2x}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$ είναι ίσες γιατί έχουν ίδιο πεδίο ορισμού και ισχύει:

$$g(x) = \frac{2x^3 + 2x}{x^2 + 1} = \frac{2x(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = 2x = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Οι γραφικές παραστάσεις δύο ίσων συναρτήσεων συμπίπτουν. Για παράδειγμα, οι γραφικές παραστάσεις των πραγματικών συναρτήσεων f, g με τύπους: $f(x) = -x^2 + 2x + 3, x \in [0, 3]$ και $g(x) = 4 - (1 - x)^2, x \in [0, 3]$ συμπίπτουν.



Αν για δύο πραγματικές συναρτήσεις $f_1: A_1 \rightarrow \mathbb{R}$ και $f_2: A_2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $A_1 \subset A_2 \subseteq \mathbb{R}$ ισχύει $f_1(x) = f_2(x), \forall x \in A_1$, τότε:

- Η f_1 λέγεται **περιορισμός** της f_2 στο A_1
- Η f_2 λέγεται **επέκταση** της f_1 στο A_2

Ιδιότητες ισότητας συναρτήσεων

Για την ισότητα πραγματικών συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής ισχύουν οι ιδιότητες:

- (α) $f = f$ (ανακλαστική)
- (β) αν $f = g$, τότε $g = f$ (συμμετρική)
- (γ) αν $f = g$ και $g = h$, τότε $f = h$ (μεταβατική)

Παράδειγμα 1:

Να εξετάσετε κατά πόσο οι συναρτήσεις f και g , που δίνονται με τους πιο κάτω τύπους, είναι ίσες.

(α) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \frac{x^3+2x}{x^2+2}$

(β) $f: \{-1, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 3x^4 + 5$ και $g: \{-1, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x) = 3x^6 + 5$

Λύση

(α) Οι δύο συναρτήσεις $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \frac{x^3+2x}{x^2+2}$, $x \in \mathbb{R}$ έχουν ίδιο πεδίο ορισμού (το $\mathbb{R}$) και για κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού τους έχουν τις ίδιες τιμές. Πράγματι,

$$g(x) = \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 2} = \frac{x(x^2 + 2)}{x^2 + 2} = x = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

(β) Οι δύο συναρτήσεις περιγράφονται με διαφορετικό τύπο. Παρατηρούμε, όμως, ότι οι συναρτήσεις f και g έχουν:

- ίδιο πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \{-1, 0, 1\}$
- ίδιες αντίστοιχες τιμές για όλα τα στοιχεία του πεδίου ορισμού τους, δηλαδή $f(-1) = 8 = g(-1)$, $f(0) = 5 = g(0)$ και $f(1) = 8 = g(1)$.

Ισχύει $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A$.

Επομένως, οι δύο συναρτήσεις είναι ίσες.

Παράδειγμα 2:

Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει $\sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2$.

Λύση

Ορίζουμε τις συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x^2}$ και $g(x) = (\sqrt{x})^2$.

Τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g είναι $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0\} = \mathbb{R}$ και

$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = [0, +\infty)$, αντίστοιχα. Επομένως, $D_f \neq D_g$.

Άρα, οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες και επομένως η σχέση δεν ισχύει σε όλο το $\mathbb{R}$.

Είναι ίσες στο σύνολο $A = D_f \cap D_g = [0, +\infty)$.

Συνεπώς, για $x \geq 0$, ισχύει: $\sqrt{x^2} = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = (\sqrt{x})^2$.

Παράδειγμα 3:

Πότε δύο συναρτήσεις, οι οποίες έχουν τον ίδιο ακριβώς τύπο δεν είναι ίσες; Να δώσετε ένα παράδειγμα.

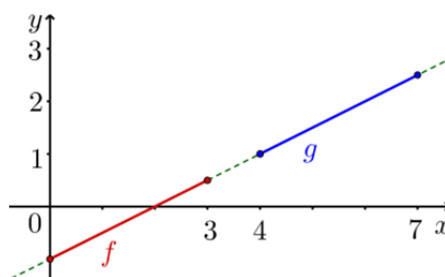
Λύση

Δύο συναρτήσεις με τον ίδιο ακριβώς τύπο δεν είναι ίσες, όταν δεν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού ή το ίδιο πεδίο τιμών.

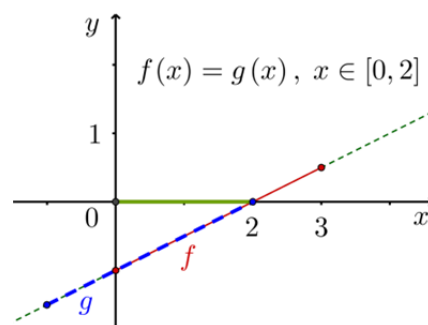
Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$, $x \in A_1 = [0,3]$ και $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$, $x \in A_2 = [4,7]$ δεν είναι ίσες, γιατί δεν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού. Επιπλέον, τα πεδία ορισμού τους είναι ξένα μεταξύ τους σύνολα ($A_1 \cap A_2 = \emptyset$) και έτσι για καμιά τιμή δεν μπορεί να ισχύει $f = g$.

Σχόλια:

- Γραφικά, αυτό μεταφράζεται ότι οι δύο συναρτήσεις «προέρχονται» από την ίδια συνάρτηση η οποία έχει ένα ευρύτερο πεδίο ορισμού, την $F(x) = \frac{1}{2}x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Ουσιαστικά οι δύο συναρτήσεις είναι εντελώς διαφορετικές, αν και έχουν τον ίδιο τύπο, όπως δείχνει και το διπλανό σχήμα.



- Οι συναρτήσεις $f: A_1 \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: A_2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$, $x \in A_1 = [0,3]$ και $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$, $x \in A_2 = [-1,2]$, είναι ίσες στο κοινό πεδίο ορισμού τους, που είναι το $A_1 \cap A_2 = [0,2]$.



Παράδειγμα 4:

Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$, είναι ίσες. Στην περίπτωση που οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, ώστε οι συναρτήσεις να είναι ίσες.

(α) $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-x+1}$, $g(x) = x + 1$

(β) $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$, $g(x) = x + 3$

(γ) $f(x) = (x-2) \cdot |x|$, $g(x) = x^2 - 2x$

(δ) $f(x) = x + 2$, $g(x) = 2x - 1$

Λύση

(α) Οι δύο συναρτήσεις έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού ($A = B = \mathbb{R}$). Παρατηρούμε ότι:

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - x + 1} = \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1} = x + 1 = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Επομένως, οι δύο συναρτήσεις είναι ίσες σε όλο το $\mathbb{R}$.

(β) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{3\}$, αφού δεν ορίζεται στο $x = 3$, ενώ η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού το $B = \mathbb{R}$ ως πολυωνυμική συνάρτηση. Επομένως, οι δύο συναρτήσεις δεν είναι ίσες, αφού έχουν διαφορετικά πεδία ορισμού.

Παρατηρούμε ότι $A \cap B = \mathbb{R} - \{3\}$ και

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = x + 3, \forall x \in \mathbb{R} - \{3\}$$

Επομένως, οι δύο συναρτήσεις είναι ίσες στο $\mathbb{R} - \{3\}$.

(γ) Οι δύο συναρτήσεις έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού ($A = B = \mathbb{R}$). Παρατηρούμε ότι:

$$f(x) = (x - 2) \cdot |x| = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \geq 0 \\ -x^2 + 2x, & x < 0 \end{cases} \text{ και } g(x) = x^2 - 2x.$$

Επομένως, η συνάρτηση f είναι ίση με την g μόνο όταν $x \geq 0$.

(δ) Οι δύο συναρτήσεις έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού ($A = B = \mathbb{R}$), αλλά δεν είναι ίσες, αφού «πολλές τιμές» f είναι διαφορετικές από τις αντίστοιχες τιμές της g . Για παράδειγμα, $f(0) \neq g(0)$, $f(1) \neq g(1)$ κτλ.

Αναζητώντας κάποια $a \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε να ισχύει $f(a) = g(a)$, έχουμε ισοδύναμα:

$$a + 2 = 2a - 1 \Leftrightarrow a = 3$$

Τελικά, $f = g$ στο μονομελές σύνολο $A \cap B = \{3\}$.

Παράδειγμα 5:

Δίνονται οι συναρτήσεις $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: [-2, 7] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $f(x) = x + 5$ και $g(x) = x + 5$.

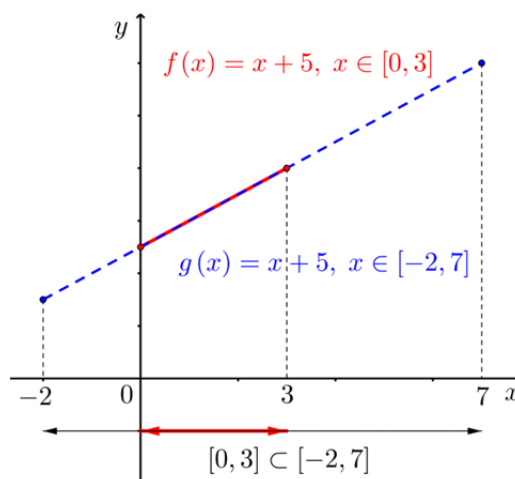
(α) Να εξετάσετε κατά πόσο οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες.

(β) Να κατασκευάσετε τις γραφικές τους παραστάσεις.

Λύση

(α) Παρατηρούμε ότι οι δύο συναρτήσεις έχουν τον ίδιο τύπο, αλλά δεν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού. Επομένως, οι συναρτήσεις f και g δεν είναι ίσες.

(β) Έχουμε ότι $[0, 3] \subset [-2, 7]$ και έτσι $f(x) = g(x)$, $\forall x \in [0, 3]$. Άρα, η f είναι ένας περιορισμός της g στο $[0, 3]$ και η g είναι μία επέκταση της f στο $[-2, 7]$. Δηλαδή, η γραφική παράσταση της f αποτελεί «μέρος» της γραφικής παράστασης της g .



Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τους πιο κάτω ισχυρισμούς, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

(α) Αν $f(x) = 2x + \frac{3}{x}$ και $g(x) = \frac{2x^2+3}{x}$, τότε $f = g$ στο $\mathbb{R} - \{0\}$.

(β) Αν $f(x) = 2|x|$ και $g(x) = 2x$, τότε $f = g$ στο $\mathbb{R}$.

(γ) Αν $f(x) = x^2$ και $g(x) = x^4$, τότε $f = g$ στο $\{-1, 0, 1\}$.

(δ) Αν $f(x) = \frac{x^2-100}{x-10}$, τότε η f είναι ένας περιορισμός της συνάρτησης g στο $\mathbb{R} - \{10\}$, όπου $g(x) = x + 10$.

(ε) Αν $f(x) = \sqrt{x^2}$ και $g(x) = x$, τότε $f = g$ στο $\mathbb{R}$.

2. Να εξετάσετε κατά πόσο οι πραγματικές συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$, είναι ίσες. Στις περιπτώσεις που ισχύει $f \neq g$, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο είναι $f = g$.

(α) $f(x) = \frac{3x^3+9x}{x^2+3}$, $g(x) = 3x$

(β) $f(x) = \sqrt{(x-2)^2}$, $g(x) = x - 2$

(γ) $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x+3}$, $g(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$

3. Να εξετάσετε κατά πόσο οι συναρτήσεις $f: \{-2, 0, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \{-2, 0, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 - 4x + 10$ και $g(x) = 10$ είναι ίσες.

4. Να εξετάσετε κατά πόσο οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = \frac{x^2-1}{|x|-1}$ και $g(x) = |x| + 1$ είναι ίσες.

5. Να βρείτε, σε κάθε περίπτωση, ίσες πραγματικές συναρτήσεις με την συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = \frac{|x|}{x}$ και πεδίο ορισμού το σύνολο:

(α) $A = (0, +\infty)$

(β) $A = (-10, -1]$

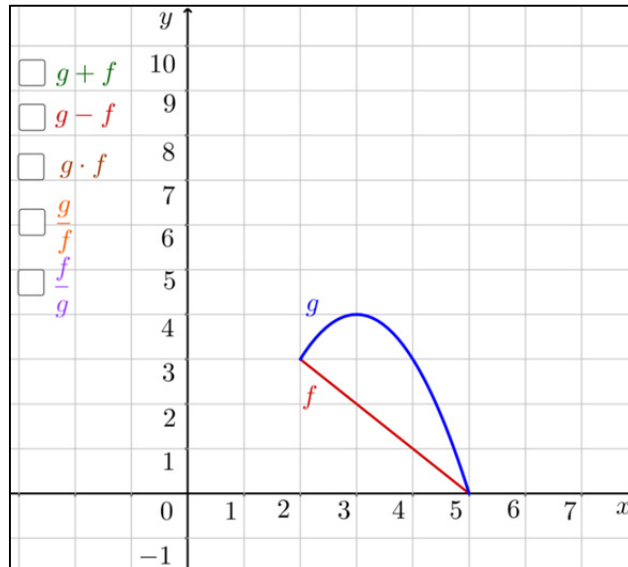
6. Δίνονται οι συναρτήσεις $f_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_1(x) = (-1)^x \cdot 4 + (-1)^{x+1} \cdot 5$ και $f_2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_2(x) = \begin{cases} -1, & x \text{ άρτιος} \\ +1, & x \text{ περιττός} \end{cases}$. Να αποδείξετε ότι $f_1 = f_2$.

7. Να αναφέρετε μια συνάρτηση $g: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, η οποία να είναι ίση με τη συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{2x-6}{|x-3|}$ στο ευρύτερο πεδίο ορισμού της.

4.7 ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Διερεύνηση 1

Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: A \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $A = [2,5]$.



(α) Να αναφέρετε το πεδίο ορισμού των δύο συναρτήσεων.

(β) Να υπολογίσετε τις τιμές:

- $f(2) + g(2)$
- $g(3) - f(3)$
- $g(4) \cdot f(4)$
- $\frac{g(4)}{f(4)}$
- $\frac{f(2)}{g(2)}$

(γ) Να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις των πιο κάτω συναρτήσεων, οι οποίες δημιουργούνται από τις f και g .

$$h = g + f, p = g - f, q = g \cdot f, r = \frac{g}{f}, s = \frac{f}{g}$$

(δ) Να αναφέρετε κατά πόσο το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων διαφέρει από το πεδίο ορισμού των δύο αρχικών συναρτήσεων f και g .

(ε) Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «[Blyk_En04_NeesSynartiseis1.ggb](#)» και να ελέγξετε την ορθότητα των απαντήσεών σας, επιλέγοντας το κατάλληλο κουμπί.

Διερεύνηση 2:

Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων $f: A_1 \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: A_2 \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $A_1 = [1,4]$ και $A_2 = [2,5]$.



- (α) Να αναφέρετε κατά πόσο μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές $f(1) + g(1)$, $f(2) + g(2)$, $f(3) + g(3)$, $f(4) + g(4)$ και $f(5) - g(5)$, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας.
- (β) Να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων, οι οποίες δημιουργούνται από τις f και g .
- $$h = g + f, \quad p = g - f, \quad q = g \cdot f, \quad r = \frac{g}{f}, \quad s = \frac{f}{g}$$
- (γ) Να αναφέρετε κατά πόσο το πεδίο ορισμού των πιο πάνω συναρτήσεων διαφέρει από το πεδίο ορισμού των δύο αρχικών συναρτήσεων f και g .
- (δ) Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο «[Blyk_En04_NeesSynartiseis2.ggb](#)» και να ελέγξετε την ορθότητα των απαντήσεών σας, επιλέγοντας το κατάλληλο κουμπί.
- (ε) Να βρείτε τον τύπο της κάθε συνάρτησης, αν γνωρίζετε ότι η f είναι γραμμική εξίσωση και g έχει τύπο δευτεροβάθμιου τριωνύμου.

Ορισμοί:

Αν $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις με $A \cap B \neq \emptyset$, τότε ορίζουμε:

- **άθροισμα** των συναρτήσεων f και g τη συνάρτηση $f + g$ ως:
 $f + g: A \cap B \rightarrow \mathbb{R}$ με $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $x \in A \cap B$
- **διαφορά** των συναρτήσεων f και g τη συνάρτηση $f - g$ ως:
 $f - g: A \cap B \rightarrow \mathbb{R}$ με $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$, $x \in A \cap B$
- **γινόμενο** των συναρτήσεων f και g τη συνάρτηση $f \cdot g$ ως:
 $f \cdot g: A \cap B \rightarrow \mathbb{R}$ με $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, $x \in A \cap B$
- **πηλίκο** των συναρτήσεων f και g τη συνάρτηση $\frac{f}{g}$ ως:
 $\frac{f}{g}: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ με $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $x \in \Gamma$, όπου $\Gamma = \{x \in A \cap B \text{ με } g(x) \neq 0\}$

Παρατηρήσεις:

(α) Γενικά, αν έχουμε δύο πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, είναι γνωστό ότι:

- τα A και B είναι τα αντίστοιχα πεδία ορισμού τους και είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}$
- το $f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός, $\forall x \in A$
- το $g(x)$ είναι πραγματικός αριθμός, $\forall x \in B$

Έτσι, το $f(x) + g(x)$ ορίζεται μόνο όταν το x ανήκει συγχρόνως και στα δύο σύνολα A και B . Δηλαδή, το $f(x) + g(x)$ ορίζεται μόνο όταν $x \in A \cap B$ και ισχύει, φυσικά, ότι το σύνολο $A \cap B$ είναι μη κενό ($A \cap B \neq \emptyset$).

(β) Ο πολλαπλασιασμός αριθμού με συνάρτηση ορίζει συνάρτηση, την $(a \cdot f): A \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x)$. Ο αριθμός θεωρείται συνάρτηση μηδενικού βαθμού.

(γ) Αν θεωρήσουμε $\underbrace{f \cdot f \cdot f \cdots f}_{n-\text{φορές}} = f^n$ με την βοήθεια της πράξης του πολλαπλασιασμού, τότε ορίζουμε την συνάρτηση της δύναμης συνάρτησης $f^n: A \rightarrow \mathbb{R}$, με $f^n(x) = [f(x)]^n$.

Παράδειγμα 1:

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x) = x^2 - 9$ και $g(x) = x + 3$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f + g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ και $\frac{g}{f}$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού των δύο συναρτήσεων f και g είναι το $\mathbb{R}$. Η συνάρτηση $f + g$ ορίζεται στο $\mathbb{R}$. Άρα, έχουμε:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - 9 + x + 3 = x^2 + x - 6, \text{ με } x \in \mathbb{R}.$$

Επίσης η συνάρτηση $f \cdot g$ ορίζεται στο $\mathbb{R}$. Άρα έχουμε,

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^2 - 9) \cdot (x + 3) = (x - 3)(x + 3)^2, \text{ με } x \in \mathbb{R}.$$

Για τη συνάρτηση $\frac{f}{g}$ πρέπει $\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0\}$. Συνεπώς, $x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$. Άρα το πεδίο ορισμού της είναι $x \in \mathbb{R} - \{-3\}$. Έτσι, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x^2 - 9)}{(x + 3)} = x - 3, x \in \mathbb{R} - \{-3\}$

Παρατήρηση: Το αποτέλεσμα της διαίρεσης $\frac{f}{g}$ μας δίνει την συνάρτηση $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x - 3$, η οποία είναι πολυώνυμο με πεδίο ορισμού είναι το $\mathbb{R}$. Ωστόσο, δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το $\mathbb{R}$, γιατί υπάρχει ο περιορισμός στη συνάρτηση g :

$$g(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$$

Για τη συνάρτηση $\frac{g}{f}$, το πεδίο ορισμού είναι το $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$. Συνεπώς, $x^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 3$. Είναι:

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{(x+3)}{(x^2-9)} = \frac{1}{x-3}, \quad x \neq \pm 3$$

Παράδειγμα 2:

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-5}$ με πεδίο ορισμού $A = [5, +\infty)$ και $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ με πεδίο ορισμού $B = [-1, 1]$. Να βρείτε το άθροισμα των συναρτήσεων f και g .

Λύση:

Το άθροισμα των συναρτήσεων **δεν ορίζεται** διότι $A \cap B = \emptyset$.

Παράδειγμα 3:

Αν $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$ με $A = \mathbb{R} - \{3\}$, να ορίσετε την συνάρτηση $g = \frac{1}{f}$.

Λύση:

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{1}{f}$ είναι $A - \{x \mid f(x) = 0\}$.

Υπολογίζουμε τις τιμές του x που μηδενίζουν τη συνάρτηση f :

$$f(x) = \frac{x+2}{x-3} = 0 \Rightarrow x+2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

Έτσι, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι $B = \mathbb{R} - \{3, -2\}$ και ο τύπος της είναι:

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\frac{x+2}{x-3}} = \frac{x-3}{x+2}$$

Παράδειγμα 4:

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x) = 3x + 1$, $x \in [0, 3)$ και $g(x) = 2x - 4$, $x \in (1, 5]$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f - g$, $\frac{f}{g}$, $\frac{g}{f}$, f^2

Λύση:

Τα πεδία ορισμού των δύο συναρτήσεων f και g είναι $A = [0, 3)$ και $B = (1, 5]$, αντίστοιχα. Τα κοινά στοιχεία των δύο συνόλων ανήκουν στο σύνολο $A \cap B = (1, 3)$.

Έτσι:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (3x + 1) - (2x - 4) = x + 5, \quad x \in (1, 3)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x+1}{2x-4}, \quad x \in (1, 3) \quad \text{και} \quad 2x - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$$

Επομένως,

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{3x+1}{2x-4}, x \in (1,3), x \neq 2 \text{ ή } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{3x+1}{2x-4}, x \in (1,2) \cup (2,3).$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{2x-4}{3x+1}, x \in (1,3), x \neq -\frac{1}{3}$$

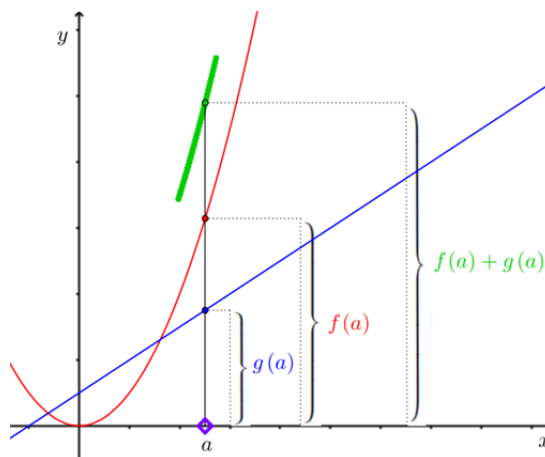
Παρατηρούμε ότι $-\frac{1}{3} \notin (1,3)$. Έτσι, η συνάρτηση ορίζεται σε όλο το $(1,3)$, δηλαδή:

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{2x-4}{3x+1}, x \in (1,3)$$

Τέλος,

$$f^2(x) = f(x) \cdot f(x) = (3x+1)(3x+1), x \in [0,3)$$

Γραφικά, η συνάρτηση $f + g$ αποτελείται από τα σημεία $(a, f(a) + g(a))$ για όλα τα $a \in A \cap B$.



Παράδειγμα 5:

Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = \sqrt{1-x}$.

(α) Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f + g$ και $f \cdot g$.

(β) Να ορίσετε τις συναρτήσεις $\frac{f}{g}$ και $\frac{g}{f}$.

Λύση

(α) Τα πεδία ορισμού των δύο συναρτήσεων f και g είναι $A = [0, +\infty)$ και $B = (-\infty, 1]$, αντίστοιχα.

Τα κοινά στοιχεία των δύο συνόλων ανήκουν στο σύνολο $A \cap B = [0,1]$. Έτσι:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}, x \in [0,1]$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x} = \sqrt{x(1-x)}, x \in [0,1]$$

- (β) Για τις συναρτήσεις $\frac{f}{g}$ και $\frac{g}{f}$ παίρνουμε ως πεδίο ορισμού το κοινό πεδίο ορισμού τους, δηλαδή $A \cap B = [0,1]$, εκτός από πιθανές τιμές οι οποίες μηδενίζουν τον παρονομαστή.

Συγκεκριμένα, για την $\frac{f}{g}$ πρέπει:

$$x \in [0,1], g(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \in [0,1], x \neq 1$$

Επομένως, η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ ορίζεται στο σύνολο $[0,1)$ και έχει τύπο:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}, x \in [0,1)$$

Ομοίως, για τη συνάρτηση $\frac{g}{f}$ έχουμε:

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}, x \in (0,1]$$

Παράδειγμα 6:

Να βρείτε το άθροισμα των συναρτήσεων f, g , όταν:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [2,4] \\ 5, & x \in (4,7] \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} x^2-1, & x \in [1,5] \\ 2x+3, & x \in (5,6] \end{cases}$$

Λύση

Όταν οι συναρτήσεις είναι τμηματικές, εξετάζουμε αν ορίζεται το άθροισμα για κάθε συνδυασμό των επί μέρους κλάδων των δύο συναρτήσεων.

$$\text{Αν } x \in [2,4] \cap [1,5] = [2,4], \text{ τότε } f(x) + g(x) = x+1 + x^2-1 = x^2 + x.$$

$$\text{Αν } x \in [2,4] \cap (5,6] = \emptyset, \text{ τότε } f(x) + g(x) \text{ δεν ορίζεται.}$$

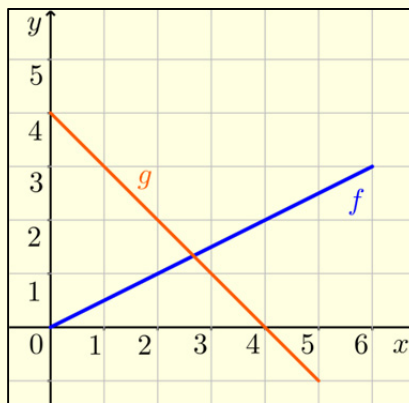
$$\text{Αν } x \in (4,5] \cap [1,5] = (4,5], \text{ τότε } f(x) + g(x) = 5 + x^2-1 = x^2 + 4.$$

$$\text{Αν } x \in (4,7] \cap (5,6] = (5,6], \text{ τότε } f(x) + g(x) = 5 + 2x+3 = 2x+8.$$

Δραστηριότητες

1. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τους πιο κάτω ισχυρισμούς, αιτιολογώντας την απάντησή σας.
 - (α) Οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού τα σύνολα $\mathbb{R}$ και $\mathbb{R} - \{0\}$, αντίστοιχα. Τότε, το πεδίο ορισμού της $f + g$ είναι το $\mathbb{R}$.
 - (β) Οι συναρτήσεις $f - g$ και $f \cdot g$ έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού.
 - (γ) Για τις συναρτήσεις $f(x) = x^2$, $x \in [-2, 2]$ και $g(x) = x^4$, $x \in [1, 2]$ ισχύει $(f + g)(0) = 0$.
 - (δ) Για τις συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{f}{g}$ είναι το σύνολο $\mathbb{R} - \{10\}$. Τότε, $g(10) = 0$.
 - (ε) Η συνάρτηση $f + g$ ορίζεται, όταν $f(x) = x - 2$, $x \in [-2, 2]$ και $g(x) = -x + 2$, $x \in [-1, 1]$.
2. Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $f + g$ και $f - g$, όταν $f(x) = 2x - 5$ και $g(x) = x + 3$.
3. Να εξετάσετε κατά πόσο ορίζεται το άθροισμα των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = \sqrt{-1 - x}$.
4. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x) = \frac{4x}{x^2 - 25}$ και $g(x) = 1 - \frac{7}{x+2}$.
Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$ (Να δώσετε το αποτέλεσμα στην πιο απλή του μορφή).
5. Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $f + g$ και $\frac{g}{f}$, όταν $f(x) = 2 - \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ και $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$.
6. Δίνονται $f(x) = \sqrt{x-5}$ με $A = [5, +\infty]$ και $g(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$ με $B = (0, +\infty)$. Να ορίσετε το γινόμενό τους $f \cdot g$.
7. Να δώσετε ένα παράδειγμα δύο πραγματικών συναρτήσεων f και g για τις οποίες δεν ορίζεται το άθροισμά τους.

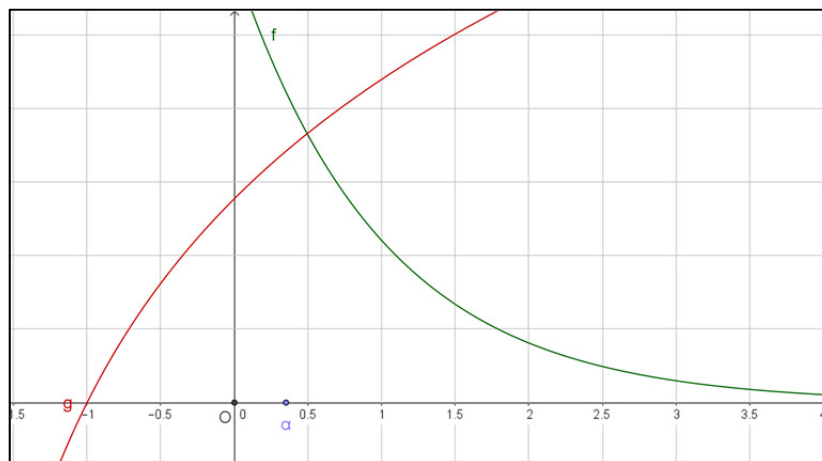
8. Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g .
- (α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των δύο συναρτήσεων.
 - (β) Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τις τιμές $(f + g)(3)$ και $(f - g)(5)$.
 - (γ) Να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f + g, f - g$ και $2f - 3g$.
 - (δ) Να δώσετε τον τύπο των συναρτήσεων f, g και $f + g$, αν είναι γνωστό ότι οι f και g έχουν γραμμικές εξισώσεις.



4.8 ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Διερεύνηση 1

Στο πιο κάτω σχήμα παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f, g και ένα σημείο $(a, 0)$ στον άξονα των τετμημένων.



- (α) Να σημειώσετε τα σημεία $A(a, g(a))$ και $B(0, g(a))$
- (β) Αν $\beta = g(a)$, να κατασκευάσετε το σημείο $\Gamma(\beta, 0)$, επεξηγώντας τον τρόπο με τον οποίο εργαστήκατε.
- (γ) Να σημειώσετε τα σημεία $\Delta(\beta, f(\beta))$ και $E(a, f(\beta))$.
- (δ) Να εκφράσετε την τεταγμένη του σημείου E συναρτήσει των g, f .
- (ε) Να επαναλάβετε τα βήματα (α)-(δ), τοποθετώντας το σημείο $(a, 0)$ σε άλλες τέσσερις τουλάχιστον θέσεις.
- (στ) Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο [«Blyk_En04_Mianeasynartisi.ggb»](#) και να επιβεβαιώσετε τις απαντήσεις σας σχετικά με την κατασκευή των σημείων A ως E . Στη συνέχεια να μετακινήσετε το σημείο $(a, 0)$ σε διάφορες θέσεις και να δείτε την «αποτύπωση του ίχνους» της «νέας συνάρτησης».
- (ζ) Σε ποια, κατά την γνώμη σας, «νέα» συνάρτηση ανήκουν όλα τα σημεία E σε κάθε περίπτωση;

Δύο παιδιά A και B παίζουν ένα μαθηματικό παιχνίδι. Σκέφτηκαν τους πιο κάτω κανόνες:

A : «Διπλασιάζει έναν αριθμό και τον αυξάνει κατά 1»

B : «Υψώνει έναν αριθμό στο τετράγωνο και τον μειώνει κατά 1»

Στη συνέχεια επιλέγουν έναν πραγματικό αριθμό και ο κάθε μαθητής εφαρμόζει τον δικό του κανόνα για να υπολογίσει το αποτέλεσμα. Επέλεξαν και οι δύο μαθητές τον αριθμό 3.

(α) Να υπολογίσετε το αποτέλεσμα που προκύπτει από την εφαρμογή του κανόνα και των δύο μαθητών.

Στη συνέχεια ο μαθητής A πήρε το αποτέλεσμα που βρήκε ο B και ο μαθητής B το αποτέλεσμα του A και εφάρμοσαν ο καθένας εκ νέου τον κανόνα του στον «νέο» αριθμό.

(β) Να υπολογίσετε τον τελικό αριθμό που έχει το κάθε παιδί.

Στο παιδί A δίνεται ένας άγνωστος αριθμός x και εφαρμόζει τον κανόνα του. Το αποτέλεσμα που βρίσκει, το δίνει στο παιδί B , όπου εφαρμόζει και αυτό τον δικό του κανόνα. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται με τον άγνωστο αριθμό x να δίνεται πρώτα στον B .

(γ) Να διερευνήσετε κατά πόσο οι απαντήσεις που προκύπτουν από τις δύο εφαρμογές της διαδικασίας αυτής είναι ίδιες.

Στους πιο κάτω πίνακες τιμών παρουσιάζονται οι αντίστοιχες τιμές δύο συναρτήσεων $f: A \rightarrow B$ και $g: \Gamma \rightarrow \Delta$.

Να προτείνετε μία συνάρτηση h που να αντιστοιχίζει όσο το δυνατόν περισσότερα στοιχεία του συνόλου A στο σύνολο Δ , αναφέροντας τον τύπο της, το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

A	B
x	$g(x) = \frac{1}{5}x$
0	0
5	1
10	2
15	3
20	4

Γ	Δ
x	$f(x) = 7 - 3x$
0	7
1	4
2	1
3	-2
5	-8

Ορισμός:

Αν $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση $g \circ f: A' \rightarrow \mathbb{R}$, με $A' = \{x \in A \mid f(x) \in B\} \neq \emptyset$, όπου κάθε $x \rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x))$, την οποία και ονομάζουμε **σύνθεση της f με την g** .

Παρατηρήσεις:

- (α) Η σύνθεση $g \circ f$ **δεν ορίζεται**, όταν το σύνολο A' είναι **κενό**.
 (β) Η σύνθεση $g \circ f$ **ορίζεται για όλα τα $x \in A$** , όταν $f(A) \subseteq B$.

Παράδειγμα 1:

Να εξετάσετε κατά πόσο ορίζεται η σύνθεση $g \circ f$ των συναρτήσεων:

- (α) $f(x) = 2x - 3$ και $g(x) = x^2$
 (β) $f(x) = 2x - 3, x \in [0,4]$ και $g(x) = x^2, x \in [-1,3]$

Λύση

- (α) Η $f(x) = 2x - 3$ και $g(x) = x^2$ έχουν πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$ και $B = \mathbb{R}$, αντίστοιχα. Θα εξετάσουμε κατά πόσο το σύνολο A' δεν είναι το κενό, γιατί η σύνθεση $g \circ f$ ορίζεται στο σύνολο A' .

Έχουμε $A' = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$ και έτσι η σύνθεση $g \circ f$ έχει τύπο:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x - 3) = (2x - 3)^2, x \in \mathbb{R}$$

- (β) Η $f(x) = 2x - 3$ και $g(x) = x^2$ έχουν πεδίο ορισμού το $A = [0,4]$ και $B = [-1,3]$, αντίστοιχα.

Έχουμε: $A' = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } f(x) \in \mathbb{R}\} = \{x \in [0,4] \text{ και } 2x - 3 \in [-1,3]\}$.

Η εύρεση του πεδίου ορισμού της $g \circ f$, όταν τα πεδία ορισμού των f και g είναι διαστήματα, ανάγεται στην επίλυση ανισοτήτων. Επομένως, έχουμε τις ανισώσεις:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ -1 \leq 2x - 3 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 2 \leq 2x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 1 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$$

Ο τύπος της σύνθεσης είναι ο ίδιος όπως και στο (α) αλλά με διαφορετικό πεδίο ορισμού, δηλαδή:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x - 3) = (2x - 3)^2, x \in [1,3]$$

Σχόλιο: Να σημειώσουμε ότι το πεδίο ορισμού της σύνθεσης $g \circ f$ είναι πάντοτε υποσύνολο του πεδίου ορισμού της f . Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, το πεδίο ορισμού της σύνθεσης $g \circ f$ είναι γνήσιο υποσύνολο του πεδίου ορισμού της f . Υπάρχουν, δηλαδή, στοιχεία του πεδίου ορισμού της f , όπως για παράδειγμα το $x = 0$, το οποίο δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της $g \circ f$. Αυτό σημαίνει ότι το στοιχείο $(g \circ f)(0)$ δεν ορίζεται. Αν οριζόταν, θα έπρεπε το $f(0) = -3$ να ανήκει στο πεδίο ορισμού της g , κάτι το οποίο δεν ισχύει, γιατί $-3 \notin [-1,3]$.

Παράδειγμα 2:

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-4}$ και $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

(α) Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$.

(β) Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τις τιμές $(f \circ g)\left(\frac{1}{3}\right)$, $(f \circ g)(1)$ και $(g \circ f)(4)$.

Λύση

(α) Για να ορίζεται η συνάρτηση f , πρέπει

$$x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4,$$

δηλαδή το πεδίο ορισμού της είναι το $A = [4, +\infty)$.

Για να ορίζεται η συνάρτηση g , πρέπει

$$x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0,$$

δηλαδή το πεδίο ορισμού της είναι το $B = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Η σύνθεση $f \circ g$ ορίζεται για $x \neq 0$ με $g(x) \geq 4$. Έχουμε ισοδύναμα:

$$x \neq 0, \frac{1}{x^2} \geq 4 \Leftrightarrow x \neq 0, 4x^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \neq 0, -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$$

Τις ανισότητες, μαζί με τον περιορισμό, μπορούμε να τα ερμηνεύσουμε ως ένωση δύο διαστημάτων $\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)$ που είναι και το πεδίο ορισμού της $f \circ g$.

Ο τύπος της $f \circ g$ είναι:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x) - 4} = \sqrt{\frac{1}{x^2} - 4} = \sqrt{\frac{1 - 4x^2}{x^2}}$$

Η σύνθεση $g \circ f$ ορίζεται για $x \geq 4$ με $f(x) \neq 0$. Έχουμε ισοδύναμα:

$$x \geq 4, \sqrt{x-4} \neq 0 \Leftrightarrow x \geq 4, x \neq 4 \Leftrightarrow x > 4$$

Επομένως, για κάθε $x > 4$ ορίζουμε:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x-4}) = \frac{1}{(\sqrt{x-4})^2} = \frac{1}{x-4}, x > 4$$

(β) Το $(f \circ g)\left(\frac{1}{3}\right)$, μπορεί να υπολογισθεί, γιατί το $\frac{1}{3} \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)$, που είναι το πεδίο ορισμού της $f \circ g$.

Έτσι, έχουμε:

$$(f \circ g)\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(g\left(\frac{1}{3}\right)\right) = f(9) = \sqrt{5}$$

Το $(f \circ g)(1)$ δεν μπορεί να υπολογισθεί, γιατί το $1 \notin \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)$

Να παρατηρήσουμε εδώ ότι παρόλο που το $g(1) = 1$, ορίζεται το $f(g(1)) = f(1)$ δεν ορίζεται.

Το $(g \circ f)(4)$ δεν ορίζεται, γιατί το $4 \notin (4, \infty)$ που είναι το πεδίο ορισμού της $g \circ f$.

Παράδειγμα 3:

Να εξετάσετε κατά πόσο ορίζεται η σύνθεση $g \circ f$ για τις συναρτήσεις με τύπους $f(x) = \sqrt{x} + 4 \mid [0, +\infty)$ και $g(x) = \sqrt{1-x} \mid (-\infty, 1]$.

Λύση

Για να ορίζεται η σύνθεση $g \circ f$, πρέπει το σύνολο $A' = \{x \in [0, +\infty), f(x) \in (-\infty, 1]\}$ να μην είναι το κενό. Θα βρούμε το σύνολο $A' = \{(x \geq 0) \wedge (\sqrt{x} + 4 \leq 1)\}$. Βρίσκουμε ότι:

$$\sqrt{x} + 4 \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq -3,$$

που είναι αδύνατη.

Έτσι, $A' = \emptyset$ και συνεπώς η σύνθεση $g \circ f$ δεν ορίζεται.

Παράδειγμα 4:

Δίνεται η συνάρτηση $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(2x - 3)$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 2x - 3, x \in \mathbb{R}$. Ζητούμε να βρούμε το πεδίο ορισμού της σύνθεσης των συναρτήσεων f και g .

Έχουμε:

$$A' = \{x \in \mathbb{R} \wedge (2x - 3) \in [-1, 1]\}$$

Λύνουμε τη διπλή ανίσωση και παίρνουμε:

$$(2x - 3) \in [-1, 1] \Leftrightarrow -1 \leq 2x - 3 \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq 2x \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$$

Άρα, το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ είναι το $D(f \circ g) = [1, 2]$.

Παράδειγμα 5:

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g \circ f$ δεν ορίζεται, όταν $f(x) = x + 3, x \in [0, 3]$ και $g(x) = \sqrt{2-x}$. Στη συνέχεια, να εξετάσετε κατά πόσο ορίζεται η $f \circ g$.

Λύση

Είναι:

$$f(x) = x + 3, x \in A = [0, 3] \text{ και } g(x) = \sqrt{2-x}, x \in B = (-\infty, 2]$$

Για να ορίζεται η σύνθεση $g \circ f$, θα πρέπει το σύνολο $A' = \{x \in A, f(x) \in B\}$ να μην είναι το κενό, δηλαδή, $A' = \{x \in A, f(x) \in B\} = \{x \in [0, 3] \text{ και } x + 3 \in (-\infty, 2]\}$.

Στο σύνολο A' έχουμε τις ανισότητες $0 \leq x \leq 3$ και $x + 3 \leq 2 \Leftrightarrow x \leq -1$. Παρατηρούμε ότι οι δύο ανισότητες $0 \leq x \leq 3$ και $x \leq -1$ δεν συναληθεύουν για καμία τιμή του x και έτσι το $A' = \emptyset$, δηλαδή δεν ορίζεται η σύνθεση $g \circ f$.

Για να ορίζεται η σύνθεση $f \circ g$ θα πρέπει το σύνολο $A' = \{x \in B, g(x) \in A\}$ να μην είναι το κενό. Δηλαδή θα πρέπει να συναληθεύουν οι ανισώσεις $x \leq 2$ και $0 \leq \sqrt{2-x} \leq 3$.

Έχουμε:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq 2 \\ 0 \leq 2-x \leq 9 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \leq 2 \\ -9 \leq x-2 \leq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \leq 2 \\ -7 \leq x \leq 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow -7 \leq x \leq 2$$

Επομένως, για $-7 \leq x \leq 2$ ορίζεται η σύνθεση $f \circ g$ με τύπο:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{2-x}) = \sqrt{2-x} + 3, -7 \leq x \leq 2$$

Παράδειγμα 6:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$. Να ορίσετε την συνάρτηση $f \circ f$.

Λύση

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ ορίζεται, όταν $x \in \mathbb{R} - \{1\}$. Για να ορίζεται η $f \circ f$ πρέπει $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ και $f(x) \in \mathbb{R} - \{1\}$. Δηλαδή, θα πρέπει να ισχύει:

$$x \neq 1 \text{ και } \frac{2x+1}{x-1} \neq 1 \Leftrightarrow 2x+1 \neq x-1 \Leftrightarrow x \neq -2$$

Επομένως, η σύνθεση $f \circ f$ ορίζεται όταν $x \neq 1$ και $x \neq -2$ με τύπο:

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{2 \cdot \left(\frac{2x+1}{x-1}\right) + 1}{\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) - 1} = \frac{\frac{4x+2+x-1}{x-1}}{\frac{2x+1-x+1}{x-1}} = \frac{5x+1}{x+2}, x \in \mathbb{R} - \{-2, 1\}$$

Παράδειγμα 7:

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g , για τις οποίες ισχύει $f(2x+3) = 6x+11$ και $g(x) = 5x+a, a \in \mathbb{R}$.

(α) Να υπολογίσετε τον τύπο της f .

(β) Να υπολογίσετε το $a \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $f \circ g = g \circ f$.

(γ) Να βρείτε τη συνάρτηση h , για την οποία ισχύει $g \circ h = f$.

Λύση

(α) Αν $t \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχει ακριβώς ένα $x \in \mathbb{R}$, ώστε $2x+3 = t$. Λύνοντας ως προς x , έχουμε $x = \frac{t-3}{2}$ και ο τύπος της f γίνεται:

$$f(t) = 6\left(\frac{t-3}{2}\right) + 11 \Leftrightarrow f(t) = 3(t-3) + 11 \Leftrightarrow f(t) = 3t+2, t \in \mathbb{R}$$

Άρα, ο τύπος της f είναι $f(x) = 3x+2, x \in \mathbb{R}$.

- (β) Οι συναρτήσεις f, g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι και οι συνθέσεις $f \circ g, g \circ f$ έχουν ως πεδίο ορισμού επίσης το $\mathbb{R}$.

Για να ισχύει $f \circ g = g \circ f$ πρέπει και αρκεί να ισχύει:

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Δηλαδή:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= (g \circ f)(x) \Leftrightarrow f(g(x)) = g(f(x)) \\&\Leftrightarrow f(5x + a) = g(3x + 2) \\&\Leftrightarrow 3(5x + a) + 2 = 5(3x + 2) + a \\&\Leftrightarrow 15x + 3a + 2 = 15x + 10 + a \\&\Leftrightarrow 2a = 8 \\&\Leftrightarrow a = 4\end{aligned}$$

- (γ) Η ισότητα $g \circ h = f$ ισχύει, αν και μόνο αν οι συναρτήσεις $g \circ h, f$ ορίζονται στο $\mathbb{R}$ και $(g \circ h)(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Επομένως,

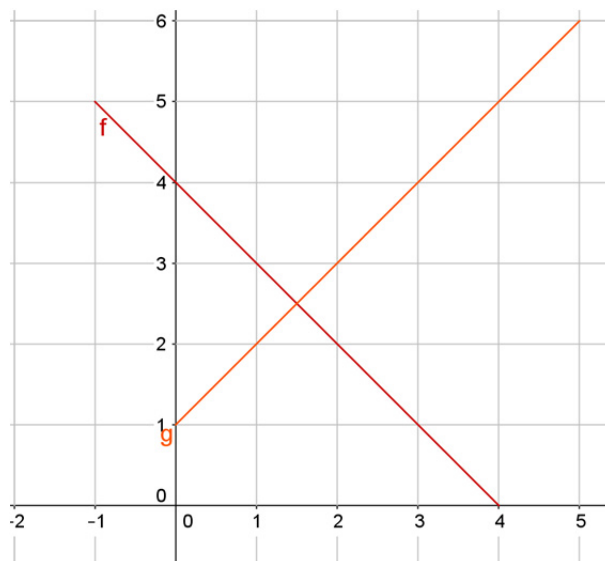
$$(g \circ h)(x) = f(x) \Leftrightarrow g(h(x)) = f(x) \Leftrightarrow 5h(x) + 4 = 3x + 2 \Leftrightarrow h(x) = \frac{3x - 2}{5}$$

Επαληθεύουμε ότι η συνάρτηση h είναι ορθή:

$$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g\left(\frac{3x - 2}{5}\right) = 5\left(\frac{3x - 2}{5}\right) + 4 = 3x + 2 = f(x)$$

Παράδειγμα 8:

Στο πιο κάτω σχήμα παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g . Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τις τιμές των $(f \circ g)(2)$, $(f \circ g)(4)$, $(g \circ f)(2)$ και $(g \circ f)(-1)$, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας.



Λύση

- ✓ Για $x = 2$, έχουμε $g(2) = 3$. Υπολογίζουμε την τιμή της f για $x = 3$ και έχουμε $f(3) = 1$. Επομένως,

$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(3) = 1$$

- ✓ Για $x = 4$, έχουμε $g(4) = 5$. Για $x = 5$ όμως η τιμή της f δεν ορίζεται και επομένως δεν ορίζεται ούτε το $(f \circ g)(4)$.

- ✓ Για $x = 2$, έχουμε $f(2) = 2$ και $g(2) = 2$. Επομένως,

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(2) = 3$$

- ✓ Για $x = -1$, έχουμε $f(-1) = 5$. Για $x = 5$ η τιμή της g είναι $g(5) = 6$. Επομένως,

$$(g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(5) = 6$$

Παράδειγμα 9:

Να βρείτε συνάρτηση f , έτσι ώστε να ισχύει

$$(f \circ g)(x) = 2x^2 + 4x - 1,$$

αν η συνάρτηση g έχει τύπο $g(x) = x - 1$.

Λύση

Από τα δεδομένα προκύπτει:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) = 2x^2 + 4x - 1 &\Leftrightarrow f(g(x)) = 2x^2 + 4x - 1 \\ &\Leftrightarrow f(x - 1) = 2x^2 + 4x - 1\end{aligned}\tag{1}$$

Θέτουμε $x - 1 = \omega \Leftrightarrow x = \omega + 1$. Αντικαθιστούμε στην (1) και παίρνουμε:

$$f(\omega) = 2(\omega - 1)^2 + 4(\omega - 1) - 1 \Leftrightarrow f(\omega) = 2\omega^2 - 3$$

Επειδή θέλουμε η ανεξάρτητη μεταβλητή να είναι η x , βρίσκουμε τελικά ότι:

$$f(x) = 2x^2 - 3$$

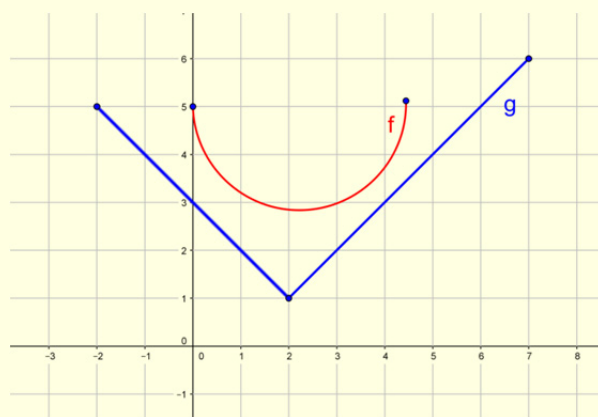
Δραστηριότητες

1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = 3x - 4$.
(α) Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$.
(β) Να εξετάσετε κατά πόσο $f \circ g = g \circ f$.
2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2x - 1, x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$. Να ορίσετε τη συνάρτηση $g \circ f$.
3. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$ και $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f \circ f$ και $g \circ g$.
4. Δίνεται η συνάρτηση $f: [1,6) \rightarrow \mathbb{R}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x^2 - 3)$.
5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x + 4, x \in [1,6)$. Να υπολογίσετε το πεδίο ορισμού και τον τύπο των πιο κάτω συναρτήσεων, αιτιολογώντας την απάντησή σας:
(α) $g(x) = f(x + 1)$
(β) $h(x) = f(2x)$
(γ) $F(x) = f(f(x))$
6. Να ορίσετε πλήρως τις συναρτήσεις $\varphi \circ \sigma$ και $\sigma \circ \varphi$, όταν δίνονται οι συναρτήσεις:
 $\varphi(x) = x^2 - 3$ και $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$.
7. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f \circ g, g \circ f$, όταν $f(x) = x^2 - 8x + 13$ και $g(x) = \sqrt{x - 6}$.
8. Αν $f(x) = 2x - 1$ και $(f \circ g)(x) = x^2 - 2x + 3$, να ορίσετε τη συνάρτηση g .
9. Δίνονται οι συναρτήσεις $(f \circ g)(x) = x^2 - 4$ και $f(x) = 3x + 2$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g .
10. (α) Αν $f(x) = x + 5$ και $g(x) = |x|$, να υπολογίσετε την τιμή $(g \circ f)(-6)$.
(β) Αν $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = 3x^2$, να υπολογίσετε τις τιμές $(g \circ f)\left(\frac{\pi}{4}\right)$ και $(f \circ g)(0)$.

11. Να ορίσετε τη σύνθεση των συναρτήσεων που ζητείται για τις πιο κάτω συναρτήσεις:
- (α) $f(x) = \sqrt{x-1}$, $x \geq 1$, $g(x) = x^2$, $x \in [-1,1]$. Να ορίσετε την $f \circ g$.
- (β) $f(x) = \sqrt{x} + 4$, $x \geq 4$, $g(x) = \sqrt{1-x}$, $x \leq 1$. Να ορίσετε την $g \circ f$.
- (γ) $f(x) = x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Να ορίσετε την $f \circ g$.

12. Να αποδείξετε ότι δεν ορίζεται η σύνθεση $g \circ f$ των συναρτήσεων με τύπους:
 $f(x) = \sqrt{-x}$, $x \leq 0$ και $g(x) = 2x^2 + 3$, $x \in \mathbb{R}$

13. Στην πιο κάτω γραφική παράσταση δίνονται δύο συναρτήσεις f, g . Με τη χρήση της γραφικής παράστασης, να υπολογίσετε τις τιμές $(g \circ f)(0)$ και $(f \circ g)(4)$.

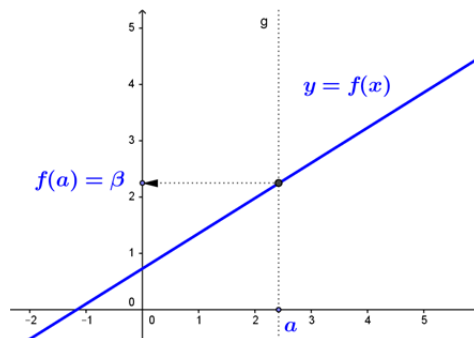
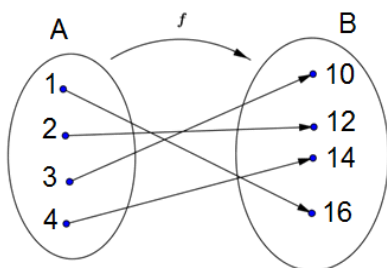


14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 5x - 4$, $x \in [1,6]$. Να ορίσετε πλήρως τις συναρτήσεις $f \circ f$ και $f \circ f \circ f$.
15. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{1-x}$ και $g(x) = 3x^2 + 2$. Να εξετάσετε κατά πόσο ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$, $g \circ f$ και $f \circ f$.
16. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 4}$ και $g(x) = x + \frac{1}{x}$.
 Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τον τύπο και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h = f \circ g$.
17. Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = \frac{1}{2}(x-1)$, $x \in [3,6]$ και $f(x) = 2x + 3$, $x \in [0,1]$.
 Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ και να αποδείξετε ότι δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στην πράξη της σύνθεσης συνάρτησης.
18. Να αποδείξετε ότι για τις συναρτήσεις $f(x) = 2x + 3$ και $g(x) = 4x + 9$ ισχύει ότι $f \circ g = g \circ f$.

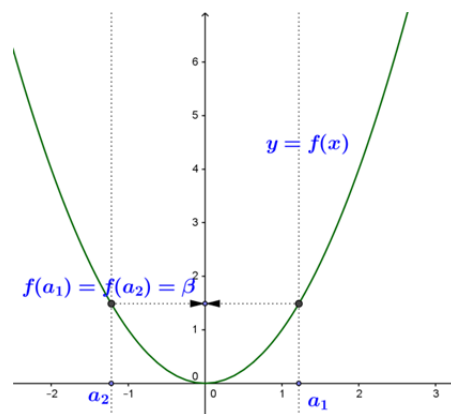
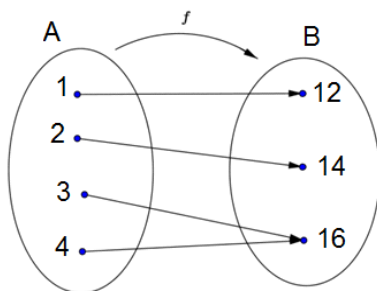
4.9 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ 1-1 - ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙ

Διερεύνηση

(α) Να παρατηρήσετε τι κοινό παρουσιάζουν οι δύο πιο κάτω συναρτήσεις.



(β) Να παρατηρήσετε τι κοινό παρουσιάζουν οι δύο πιο κάτω συναρτήσεις.



(γ) Να σχολιάσετε τα δύο είδη διαφορετικών συναρτήσεων.

Ορισμός:

Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ είναι **ένα προς ένα** ($1-1$), όταν αντιστοιχίζει διαφορετικά στοιχεία του πεδίου ορισμού A σε διαφορετικά στοιχεία του πεδίου τιμών B .

Δηλαδή, $\forall x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$,

ή ισοδύναμα,

$\forall x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Παρατηρήσεις:

- Όταν μια συνάρτηση f **δεν είναι** $1-1$, τότε υπάρχουν δύο διαφορετικά στοιχεία του πεδίου ορισμού με την ίδια εικόνα, δηλαδή $\exists x_1, x_2 \in A: x_1 \neq x_2$ με $f(x_1) = f(x_2)$
- Όταν μια συνάρτηση f **είναι** $1-1$, τότε θα πρέπει να ισχύει ότι, «για κάθε $y \in B$, υπάρχει **το πολύ ένα** $x \in A$, ώστε $y = f(x)$ »,
- Αν υπάρχει ένα $y \in B$, που να είναι εικόνα τουλάχιστον δύο στοιχείων του πεδίου ορισμού, τότε η συνάρτηση f **δεν είναι** $1-1$.

Παράδειγμα 1:

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = 4x + 3, x \in \mathbb{R}$ είναι $1-1$.

Λύση1^{ος} τρόπος

Αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$, τότε:

$$4x_1 \neq 4x_2 \Rightarrow 4x_1 + 3 \neq 4x_2 + 3 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Επομένως, διαφορετικά πρότυπα αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές.

2^{ος} τρόπος

Αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$, τότε:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 4x_1 + 3 = 4x_2 + 3 \Rightarrow 4x_1 = 4x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Παράδειγμα 2:

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2$:

(α) δεν είναι $1-1$ στο $\mathbb{R}$

(β) είναι $1-1$ στο $(0, +\infty)$

Λύση

(α) 1^{ος} τρόπος (Μέθοδος αντιπαραδείγματος)

Αρκεί να βρούμε δύο αριθμούς $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, όπου $x_1 \neq x_2$, για τους οποίους $f(x_1) = f(x_2)$.

Για τους αριθμούς $x_1 = 2$ και $x_2 = -2$, ισχύει $f(2) = f(-2) = 4$. Δηλαδή, για άνισα πρότυπα αντιστοιχίζονται ίσες εικόνες.

Συνεπώς, **δεν** είναι ένα προς ένα συνάρτηση.

2^{ος} τρόπος

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε:

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 \\ &\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \vee x_1 = -x_2 \end{aligned}$$

Συνεπώς, **δεν** είναι ένα προς ένα συνάρτηση.

(β) Έστω $x_1, x_2 > 0$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε:

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 \\ &\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_2 \vee x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Η περίπτωση $x_1 = -x_2$ απορρίπτεται, γιατί $x_1 + x_2 > 0$.

Άρα, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ και η f είναι 1-1.

Παράδειγμα 3:

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$ είναι 1-1.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$, με $x_1 \neq x_2$, έχουμε $\frac{1}{x_1} \neq \frac{1}{x_2}$.

Άρα, η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα στο A .

Παράδειγμα 4:

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = (x - 2)^2 + 1, x \in \mathbb{R}$ δεν είναι 1-1.

Λύση

Θα δείξουμε ότι υπάρχουν διαφορετικά στοιχεία του πεδίου ορισμού, τα οποία αντιστοιχίζονται στο ίδιο στοιχείο του συνόλου τιμών.

Δηλαδή, ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε να ισχύει: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

Για τη συγκεκριμένη συνάρτηση, έχουμε $1 \neq 3$ και $f(1) = 2 = f(3)$, που μας εξασφαλίζει ότι η συνάρτησή μας δεν είναι 1-1.

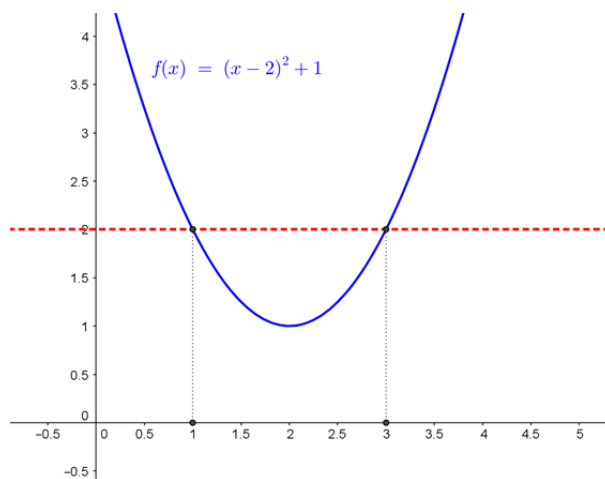
Παρατηρήσεις:

- ✓ Όταν εξετάζουμε αν μία συνάρτηση είναι 1-1 και πάρουμε ένα τυχαίο στοιχείο y του συνόλου τιμών της, πρέπει η εξίσωση $f(x) = y$ να έχει ακριβώς μία μόνο λύση συναρτήσει του y . Εδώ, έχουμε την ίδια διαδικασία που ακολουθούμε στην εύρεση του συνόλου τιμών. Έτσι, αν για κάποιο y η εξίσωση $f(x) = y$ μας δίνει δύο (τουλάχιστον) λύσεις, τότε ισχύει $f(x_1) = y$ και $f(x_2) = y$. Οπότε, έχουμε $f(x_1) = f(x_2)$ με $x_1 \neq x_2$. Έτσι, η συνάρτηση δεν είναι 1-1. Στο προηγούμενο μας παράδειγμα, η εξίσωση $(x-2)^2 + 1 = y$ μας δίνει δύο λύσεις, όταν το $y > 1$. Επομένως, η f δεν είναι 1-1. Συγκεκριμένα,

$$(x-2)^2 + 1 = y \Leftrightarrow (x-2)^2 = y-1 \Leftrightarrow x-2 = \pm\sqrt{y-1} \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{y-1}$$

Δηλαδή, $x_1 = 2 + \sqrt{y-1}$ και $x_2 = 2 - \sqrt{y-1}$, με $f(x_1) = f(x_2)$.

- ✓ Γραφικά, είναι αρκετό μία ευθεία παράλληλη προς τον άξονα των τετμημένων να τέμνει το πολύ σε ένα σημείο τη γραφική παράσταση της f . Στην πιο κάτω γραφική παράσταση η συνάρτηση f δεν είναι 1-1 συνάρτηση, γιατί η ευθεία $y = 2$ τέμνει την καμπύλη σε δύο σημεία.



- ✓ Δεν είναι ορθό να ισχυριστούμε ότι για να είναι μία συνάρτηση 1-1, πρέπει για κάθε x_1, x_2 του πεδίου ορισμού της να ισχύει $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$, αφού αυτή η πρόταση είναι πάντα αληθής.
- ✓ Αν δύο συναρτήσεις $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε δεν είναι πάντοτε 1-1 το άθροισμα ή το γινόμενο τους. Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις $f(x) = x + 3$ και $g(x) = 2 - x, x \in \mathbb{R}$ είναι 1-1, αλλά το άθροισμά τους $(f+g)(x) = 5, x \in \mathbb{R}$ και το γινόμενό τους $(f \cdot g)(x) = (x+3)(2-x)$ δεν είναι 1-1, γιατί:
 $(f+g)(1) = 5 = (f+g)(3)$ και $(f \cdot g)(-1) = 6 = (f \cdot g)(0)$

Ορισμός:

Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ είναι **επί** όταν $f(A) = B$

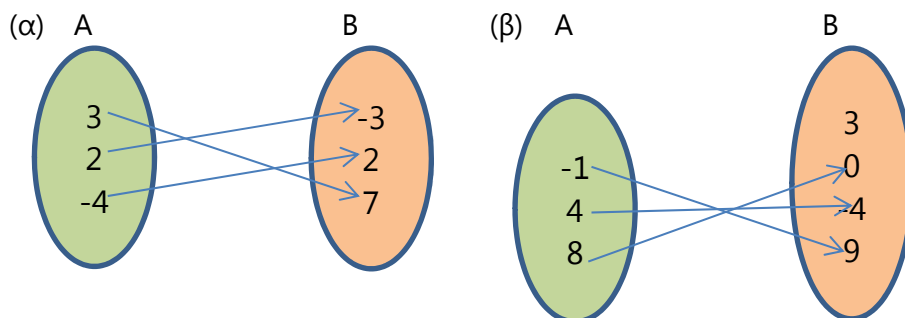
Παρατηρήσεις:

- Στις επί συναρτήσεις το πεδίο τιμών και το σύνολο τιμών είναι ίσα.
- Όταν μια συνάρτηση **είναι επί**, τότε θα πρέπει να ισχύει ότι, «για κάθε $y \in B$, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x \in A$, ώστε $f(x) = y$ », ή συμβολικά:

$$\forall y \in B, \exists x \in A: f(x) = y$$
- Όταν μια συνάρτηση **δεν είναι επί** ισχύει $f(A) \neq B$ και επειδή $f(A) \subseteq B$ τότε $f(A) \subset B$. Συνεπώς, όταν μια συνάρτηση δεν είναι επί, θα υπάρχει στοιχείο $y \in B$ που δεν είναι εικόνα οποιουδήποτε στοιχείου $x \in A$ (ή $\exists y \in B: y \neq f(x), \forall x \in A$).

Παράδειγμα 5:

Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω συναρτήσεις που ορίζονται με βελοδιαγράμματα είναι συναρτήσεις επί.

**Λύση:**

- (α) Παρατηρούμε ότι $f(A) = \{-3, 2, 7\} = B$ και επομένως η συνάρτηση είναι επί.
 (β) Παρατηρούμε ότι $f(A) = \{0, 4, 9\} \neq \{0, 4, 9, 3\} = B$ και επομένως η συνάρτηση δεν είναι επί. Υπάρχει ένα $y \in B$ το 3 που δεν είναι εικόνα ενός στοιχείου $x \in A$.

Παράδειγμα 6:

Να εξετάσετε κατά πόσο η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2$ είναι επί.

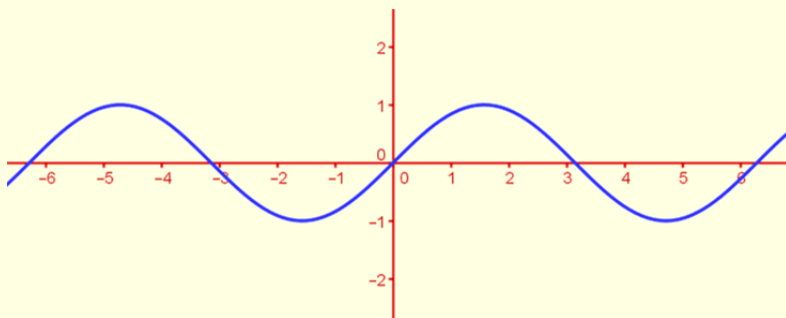
Λύση:

Για να εξετάσουμε αν μια συνάρτηση είναι επί πρέπει να βρούμε το σύνολο τιμών της και να ελέγξουμε αν συμπίπτει με το $\mathbb{R}$. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $[0, +\infty)$ και επομένως η συνάρτηση δεν είναι επί.

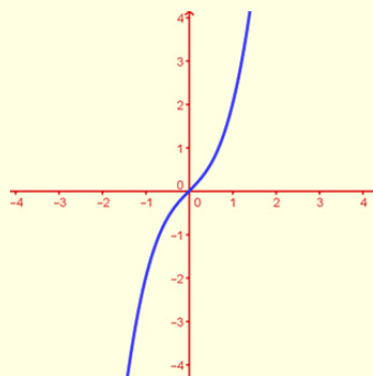
Σημείωση: Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ με τύπο $f(x) = x^2$, είναι επί γιατί το πεδίο τιμών της συμπίπτει με το σύνολο τιμών της που είναι το $[0, +\infty)$.

Δραστηριότητες

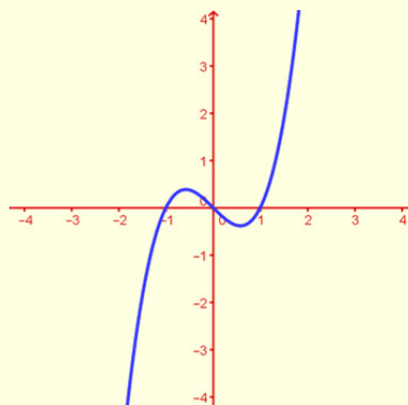
- Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τους πιο κάτω ισχυρισμούς, αιτιολογώντας την απάντησή σας.
 - Για να είναι μία συνάρτηση $1-1$, πρέπει για κάθε x_1, x_2 του πεδίου ορισμού να ισχύει $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$.
 - Η συνάρτηση $f(x) = x^2, x \in (0,3]$ είναι $1-1$.
 - Η συνάρτηση $f(x) = x^2, x \in (-3,3]$ είναι $1-1$.
 - Αν οι συναρτήσεις f και g είναι $1-1$, τότε και η συνάρτηση $f + g$ είναι $1-1$.
 - Η σταθερή συνάρτηση $f(x) = 5, x \in \mathbb{R}$ είναι $1-1$.
 - Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3$ είναι επί.
 - Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, 0]$ με τύπο $f(x) = -x^2$ είναι επί.
- Να δώσετε παραδείγματα συναρτήσεων $1-1$ και παραδείγματα συναρτήσεων που να μην είναι $1-1$, οι οποίες να αναπαριστώνται με:
 - βελοειδές διάγραμμα
 - γραφική παράσταση
 - τύπο
- Να εξετάσετε αν οι πιο κάτω συναρτήσεις είναι $1-1$, αιτιολογώντας την απάντησή σας.
 - $f(x) = 3x - 2, x \in \mathbb{R}$
 - $g(x) = x^2 + 2, x \in \mathbb{R}$
 - $h(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$
 - $\kappa(x) = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$
- Αν οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το A είναι $1-1$, να δείξετε ότι δεν συμβαίνει το ίδιο και για τις συναρτήσεις $f + g$ και $f \cdot g$.
- Να εξετάσετε αν οι πιο κάτω συναρτήσεις στις οποίες δίνεται η γραφική τους παράσταση είναι $1-1$, αιτιολογώντας την απάντησή σας.
 - $f(x) = \eta\mu x, x \in \mathbb{R}$



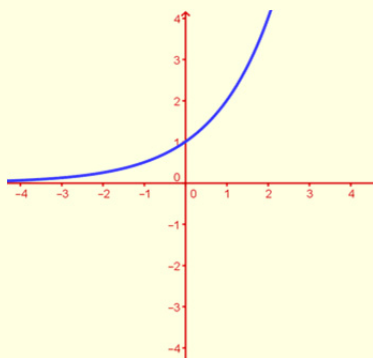
(β) $f(x) = x^3 + x, x \in \mathbb{R}$



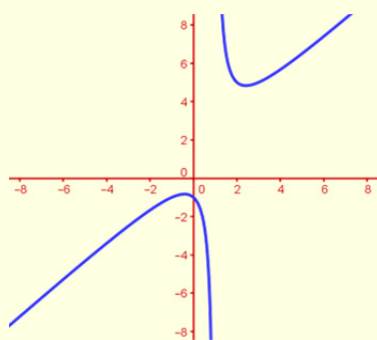
(γ) $f(x) = x^3 - x, x \in \mathbb{R}$



(δ) $f(x) = 2^x$



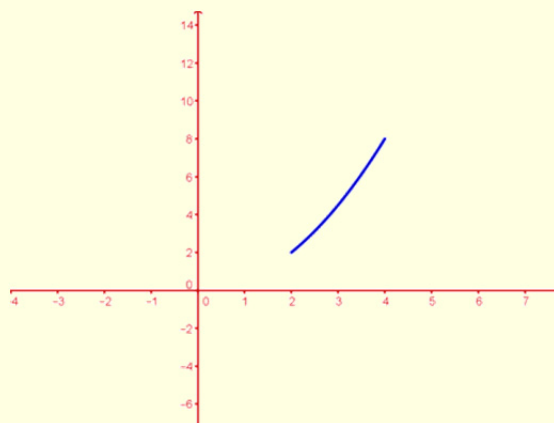
(ε) $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$



6. Δίνεται η γραφική παράσταση μέρους μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[-4,7]$. Να σχεδιάσετε το μέρος της γραφικής παράστασης που λείπει, έτσι ώστε να προκύψει συνάρτηση που να

(α) είναι 1 – 1

(β) μην είναι 1 – 1



4.10 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Διερεύνηση 1

Δίνονται τα γραφήματα:

$$G_1 = \left\{ \left(-1, \frac{1}{2}\right), (0,1), (2,4), (3,8) \right\} \text{ και } G_2 = \left\{ \left(\frac{1}{2}, -1\right), (1,0), (4,2), (8,3) \right\}$$

- (α) Τι παρατηρείτε;
- (β) Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των γραφημάτων και να βρείτε το είδος της συμμετρίας που παρουσιάζουν.

Διερεύνηση 2

Δίνεται το γράφημα:

$$G = \{(-2,4), (-1,1), (0,0), (1,1), (2,4), (3,9)\}$$

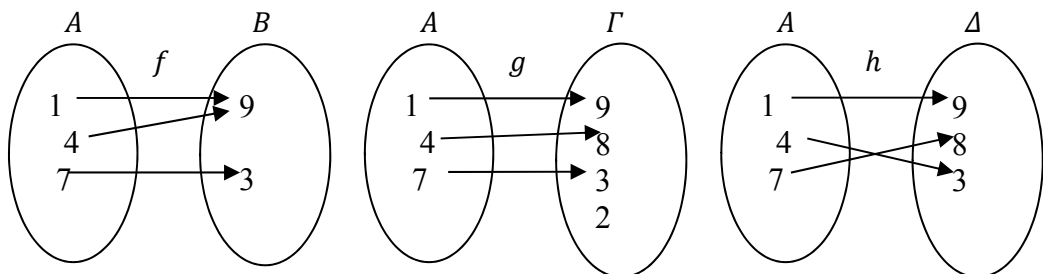
- (α) Να ελέγξετε κατά πόσο παριστάνει συνάρτηση και να το παραστήσετε γραφικά.
- (β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση του γραφήματος G_1 που αποτελείται από τα ζεύγη $\{(\beta, \alpha): (\alpha, \beta) \in G\}$ και να δείξετε ότι δεν αποτελεί συνάρτηση.
- (γ) Να βρείτε ποια ιδιότητα πρέπει να ικανοποιεί το γράφημα G , έτσι ώστε το γράφημα G_1 να είναι συνάρτηση.

Διερεύνηση 3

Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow B$, $g: A \rightarrow \Gamma$ και $h: A \rightarrow \Delta$, οι οποίες αναπαρίστανται με τα πιο κάτω βελοδιαγράμματα.

Να εξετάσετε κατά πόσο ορίζονται οι πιο κάτω συναρτήσεις αιτιολογώντας την απάντησή σας.

$$f_1: B \rightarrow A, \quad g_1: \Gamma \rightarrow A \text{ και } h_1: \Delta \rightarrow A.$$



Ορισμός:

Έστω $f: A \rightarrow B$ μια συνάρτηση. Ονομάζουμε **αντίστροφη** συνάρτηση της f τη συνάρτηση $g: B \rightarrow A$, για την οποία ισχύει $f(a) = \beta \Leftrightarrow g(\beta) = a, \forall a \in A$ και $\forall \beta \in B$.

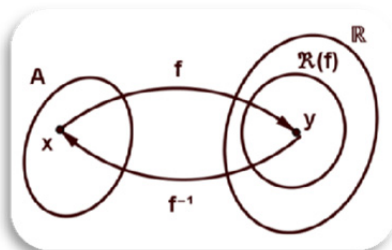
Η αντίστροφη συνάρτηση g συμβολίζεται με f^{-1} .

Όταν μία συνάρτηση f έχει αντίστροφη συνάρτηση, λέμε ότι είναι **αντιστρέψιμη**.

Από τον ορισμό προκύπτει άμεσα ότι, για να είναι μία συνάρτηση αντιστρέψιμη πρέπει να είναι 1-1 και επί.

Παρατηρήσεις:

- (α) Αν η αντίστροφη συνάρτηση υπάρχει τότε είναι μοναδική.
- (β) Κάθε ένα προς ένα συνάρτηση με $f: A \rightarrow f(A)$, είναι πάντα επί και επομένως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}: f(A) \rightarrow A$.
- (γ) Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης είναι το σύνολο τιμών της f .
- (δ) Η αντίστροφη συνάρτηση είναι και αυτή ένα προς ένα και επί συνάρτηση.
- (ε) Για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της συνάρτησης f ισχύει: $(f^{-1})^{-1} = f$
- (στ) Η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} δεν έχει καμιά σχέση με την αλγεβρικά αντίστροφη συνάρτηση $\frac{1}{f}$.

**Πόρισμα 1**

Για κάθε συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ με τύπο $y = f(x)$ που αντιστρέφεται, ισχύει:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x, \forall x \in A \text{ και } (f \circ f^{-1})(y) = y, \forall y \in B.$$

Πόρισμα 2

Δύο συναρτήσεις $f: A \rightarrow B$ και $g: B \rightarrow A$ είναι αντίστροφες, όταν $(f \circ g)(x) = x, \forall x \in B$ και $(g \circ f)(x) = x, \forall x \in A$.

Παράδειγμα 1:

Να εξετάσετε κατά πόσο οι πραγματικές συναρτήσεις $f(x) = 5x + 10, x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \frac{1}{5}x - 2, x \in \mathbb{R}$ είναι αντίστροφες.

Λύση:

$$\text{Είναι: } (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 5\left(\frac{1}{5}x - 2\right) + 10 = x - 10 + 10 = x$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{5}(5x + 10) - 2 = x + 2 - 2 = x$$

Συνεπώς, οι συναρτήσεις f και g είναι αντίστροφες.

Τρόπος εύρεσης της αντίστροφης πραγματικής συνάρτησης

- Ελέγχουμε ότι είναι ένα προς ένα.
- Ελέγχουμε ότι είναι επί.
- Λύνουμε τον τύπο της f ως προς x και εναλλάσσουμε τα x και y .

Παράδειγμα 2:

Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 5x$.

Λύση

- Το πεδίο ορισμού της f είναι $A = \mathbb{R}$ και το πεδίο τιμών της $B = \mathbb{R}$
- Η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα, γιατί:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 5x_1 = 5x_2 \Rightarrow x_1 = x_2, \text{ για κάθε } x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

- Το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A) = \mathbb{R}$ και επομένως η συνάρτηση f είναι επί, γιατί $f(A) = B$.

Αφού η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα και επί αντιστρέφεται

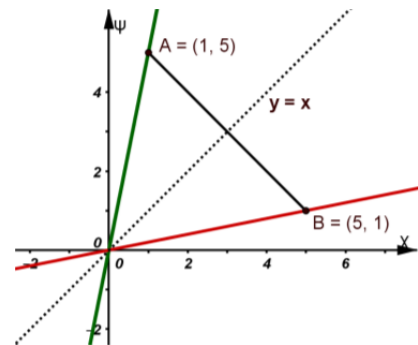
Θα βρούμε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης:

$$y = 5x \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}y = f^{-1}(y)$$

Εναλλάσσουμε τα x και y στο τελευταίο τύπο και παίρνουμε:

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x, \text{ με πεδίο ορισμού το } \mathbb{R}$$

Δίπλα φαίνονται οι γραφικές τους παραστάσεις που είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$. Τα σημεία A και B είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $y = x$.



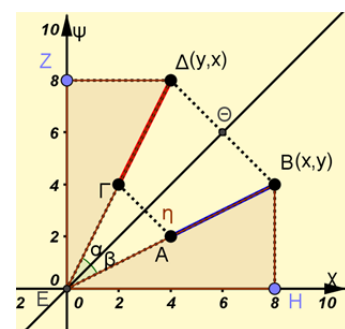
Από τον ορισμό της αντίστροφης f^{-1} μίας συνάρτησης f , προκύπτει ότι αν το σημείο $A(a, \beta)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της f , τότε το σημείο $A'(\beta, a)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} .

Πρόταση

Η γραφική παράσταση της f και της αντίστροφής της f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

Απόδειξη

Θεωρούμε δύο σημεία Γ, Δ της συνάρτησης f και δύο σημεία A, B της f^{-1} , τα οποία είναι ανάστροφα ζεύγη, αντίστοιχα των Γ, Δ . Θεωρούμε την ευθεία $y = x$ που περνά από τα σημεία E και Θ .



Κάθε σημείο (x, y) της f , για παράδειγμα το B , αντιστοιχίζεται στο ανάστροφο ζεύγος (y, x) της $f^{-1}(x)$, για παράδειγμα το Δ . Έτσι, τα τρίγωνα ΔZE και BEH είναι ίσα (είναι ορθογώνια με τις κάθετες πλευρές ίσες).

Άρα, οι γωνίες α και β θα είναι ίσες (σαν διαφορά ίσων γωνιών). Επειδή το τρίγωνο ΔEB είναι ισοσκελές ($\Delta E = BE$) και η $E\theta$ είναι διχοτόμος του, θα είναι διάμεσος και ύψος του. Συνεπώς, $\Delta\theta = \theta B$.

Η τελευταία ισότητα δηλώνει ότι τα σημεία Δ και B είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $E\theta$. ($y = x$)

Ισχύει το ίδιο για όλα τα σημεία του τμήματος $\Gamma\Delta$ και AB και κατ' επέκταση της συνάρτησης f και f^{-1} .

Παράδειγμα 3:

Να εξετάσετε κατά πόσο υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση των πιο κάτω συναρτήσεων και να την βρείτε στην περίπτωση που υπάρχει.

(α) $f: [1,5] \rightarrow [4,16]$ με τύπο $f(x) = 3x + 1$.

(β) $g: [1,5] \rightarrow [4,20]$ με τύπο $g(x) = 3x + 1$

Λύση

(α)

- Το πεδίο ορισμού της f είναι $A = [1,5]$ και το πεδίο τιμών της είναι $B = [4,16]$
- Η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα, γιατί:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1 + 1 = 3x_2 + 1 \Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2, \text{ για κάθε } x_1, x_2 \in [1,5]$$

- Το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A) = [4,16]$ γιατί
 $1 \leq x \leq 5 \Rightarrow 3 \leq 3x \leq 15 \Rightarrow 4 \leq 3x + 1 \leq 16 \Rightarrow 4 \leq y \leq 16$.
- Η συνάρτηση f είναι επί, γιατί $f(A) = B$.

Αφού η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα και επί, τότε υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση. $f^{-1}: [4,16] \rightarrow [1,5]$

Θα βρούμε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης:

$$y = 3x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{y-1}{3} = f^{-1}(y)$$

Εναλλάσσουμε τα x και y στο τελευταίο τύπο και παίρνουμε:

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}, \text{ με πεδίο ορισμού το } [4,16]$$

(β)

- Το πεδίο ορισμού της g είναι $A = [1,5]$ και το πεδίο τιμών της είναι $B = [4,20]$
Η συνάρτηση g δεν είναι επί, γιατί $g(A) = [4,16] \neq [4,20] = B$ και επομένως δεν υπάρχει η αντίστροφη της.

Παράδειγμα 4:

Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της συνάρτησης $f: A \rightarrow f(A)$, με τύπο $f(x) = 2 - \sqrt{4 - x}$, όπου A το πεδίο ορισμού της.

Λύση

- Αφού η συνάρτηση είναι της μορφής $f: A \rightarrow f(A)$, τότε είναι επί.
Αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι 1-1.
- Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
Πρέπει να ισχύει $4 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 4$.
Συνεπώς, το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = (-\infty, 4]$.
- Εξετάζουμε κατά πόσο η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα.
Έστω $x_1, x_2 \in (-\infty, 4]$, για τα οποία ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Έχουμε:
$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2 - \sqrt{4 - x_1} = 2 - \sqrt{4 - x_2} \Rightarrow 4 - x_1 = 4 - x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Συνεπώς, η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα
- Η συνάρτηση f είναι επί, γιατί το πεδίο τιμών της είναι το ίδιο με το σύνολο τιμών της, δηλαδή το $f(A)$.
Αφού η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα και επί, τότε υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}: B \rightarrow A$.
- Θα βρούμε το σύνολο τιμών $f(A)$. Θέτουμε $f(x) = y$ και έχουμε:
$$y = 2 - \sqrt{4 - x} \Leftrightarrow 2 - y = \sqrt{4 - x}$$

Πρώτος περιορισμός για τις τιμές του y : $2 - y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 2$

$$(2 - y)^2 = 4 - x \Leftrightarrow x = 4 - (2 - y)^2 \quad (\text{υψώνουμε στο τετράγωνο})$$
$$\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x \leq 4 \\ x = 4 - (2 - y)^2 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 - (2 - y)^2 \leq 4 \Rightarrow (2 - y)^2 \geq 0$$

Δεύτερος περιορισμός για τις τιμές του y : $y \in \mathbb{R}$

Από τον πρώτο και τον δεύτερο περιορισμό παίρνουμε $y \leq 2$. Συνεπώς, το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης είναι το σύνολο $B = (-\infty, 2]$.

- Θα βρούμε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης.

$$y = 2 - \sqrt{4 - x} \Leftrightarrow 2 - y = \sqrt{4 - x} \Leftrightarrow x = 4 - (2 - y)^2 = f^{-1}(y)$$

Εναλλάσσουμε τις μεταβλητές x, y με τις y, x , αντίστοιχα και ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης είναι:

$$f^{-1}(x) = 4 - (2 - x)^2$$

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η αντίστροφη της (σχήμα με κόκκινο χρώμα). Είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.



Παράδειγμα 5:

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f: A \rightarrow f(A)$, με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1, & x \in [0, +\infty) \\ 3x - 1, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

όπου A το πεδίο ορισμού της αντιστρέφεται. Ακολουθώντας, να υπολογίσετε την αντίστροφή της.

Λύση

- Αφού η συνάρτηση είναι της μορφής $f: A \rightarrow f(A)$, τότε είναι επί. Αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι 1-1.

- Αποδεικνύουμε ότι αντιστρέφεται η τμηματική συνάρτηση f .

$$\text{Αν } x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow 3x_1 - 1 < 3x_2 - 1 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

$$\text{Αν } 0 < x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1^2 + 1 < 2x_2^2 + 1 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

$$\text{Αν } x_1 < 0 < x_2 \Rightarrow 3x_1 - 1 < 2x_2^2 + 1 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Συνεπώς, σε όλες τις περιπτώσεις για διάφορα πρότυπα παίρνουμε διάφορες εικόνες και άρα η f είναι 1-1.

- Αφού η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα και επί, τότε υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}: B \rightarrow A$.
- Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f , δηλαδή το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

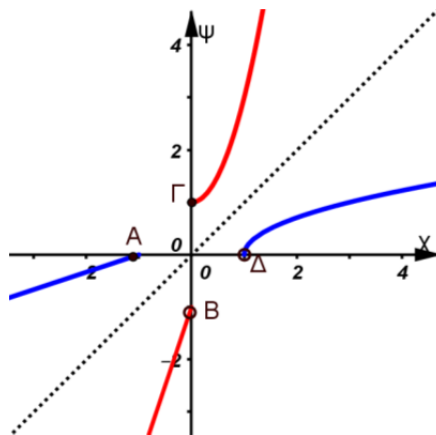
$$\text{Θέτουμε } f(x) = y \text{ και } y = 2x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{y-1}{2} \Leftrightarrow x = +\sqrt{\frac{y-1}{2}}, \text{ αφού } x \geq 0.$$

$$\text{Οι περιορισμοί για τις τιμές } y \text{ είναι: } y - 1 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 1$$

$$\text{Αν } x < 0 \text{ και } y = 3x - 1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{3}. \text{ Τότε, } y + 1 \leq 0 \Leftrightarrow y \leq -1$$

$$\text{Η αντίστροφη συνάρτηση είναι η τμηματική: } f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{x-1}{2}}, & x \in [1, +\infty) \\ \frac{x+1}{3}, & x \in (-\infty, -1] \end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και της αντίστροφης της φαίνονται πιο κάτω.



Παράδειγμα 6:

Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της $f: A \rightarrow f(A)$, με τύπο $f(x) = \sqrt[3]{x}$, όπου A το πεδίο ορισμού της και να σχεδιάσετε και τις δύο στο ίδιο σύστημα αξόνων.

Λύση

Αφού η συνάρτηση είναι της μορφής $f: A \rightarrow f(A)$, τότε είναι επί. Αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι 1-1.

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = [0, +\infty)$.

Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{x}$ είναι 1-1 στο A , αφού για δύο μη-αρνητικές τιμές x_1, x_2 ισχύει:

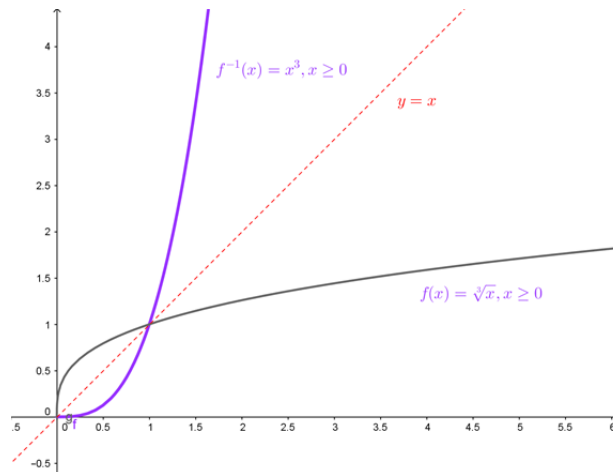
$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \sqrt[3]{x_1} \neq \sqrt[3]{x_2}$$

Συνεπώς, η κυβική συνάρτηση αντιστρέφεται, γιατί είναι 1-1 και επί.

Υπολογίζουμε τον τύπο της ως ακολούθως:

Θέτουμε όπου $f(x) = y$ και έχουμε $y = \sqrt[3]{x} \Leftrightarrow x = y^3 = f^{-1}(y)$ με $y \geq 0$.

Εναλλάσσουμε τα x και y και βρίσκουμε $f^{-1}(x) = x^3, x \geq 0$



Παράδειγμα 7:

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = x^3$.

(α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

(β) Να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f .

Λύση

(α) Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 και επί.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Ισοδύναμα, έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3 \\ &\Leftrightarrow x_1^3 - x_2^3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x_1 - x_2 = 0) \vee (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 0) \\ &\Leftrightarrow (x_1 = x_2) \vee \left(\left(x_1 + \frac{x_2}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 = 0 \right) \end{aligned}$$

Η παράσταση $\left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2$ είναι αυστηρά θετική όταν $(x_1 \neq 0) \vee (x_2 \neq 0)$.
Συνεπώς,

$$(x_1 = x_2) \vee (x_1 = x_2 = 0) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Έτσι, συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1.

Η συνάρτηση f είναι επί, γιατί $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

Έτσι, η συνάρτηση f είναι 1-1 και επί στο $\mathbb{R}$, άρα αντιστρέφεται.

(β) Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $\mathbb{R}$.

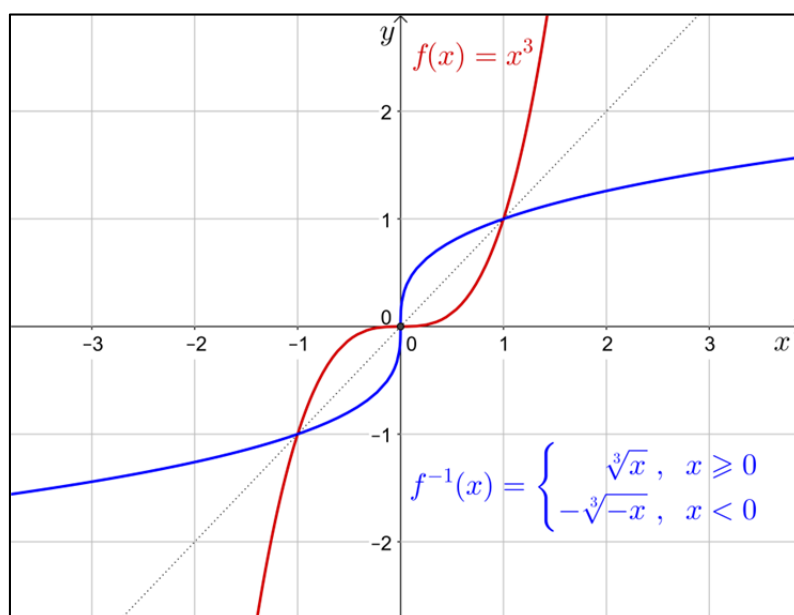
Θέτουμε $f(x) = y$ και έχουμε:

$$y = x^3 \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y}, & \text{αν } y \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-y}, & \text{αν } y < 0 \end{cases}$$

Επομένως, η αντίστροφη συνάρτηση είναι η τμηματική συνάρτηση:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & x \in [0, +\infty) \\ -\sqrt[3]{-x}, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

Πιο κάτω, παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} .



Δραστηριότητες

1. Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ με τύπο $f(x) = x^2$ και να παραστήσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις f και f^{-1} .
2. Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = [-2, 1]$, να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:
(α) $f(x^2 - 3)$
(β) $f\left(\frac{1}{x}\right)$
3. Να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση των πιο κάτω συναρτήσεων της μορφής $f: A \rightarrow f(A)$, όπου A το πεδίο ορισμού. Στις περιπτώσεις που ορίζεται, να την προσδιορίσετε.
(α) $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}, A = \mathbb{R} - \{-3\}$
(β) $f(x) = \sqrt{x+2}$
(γ) $f(x) = \frac{x+2}{x-3}, A = (3, \infty)$
(δ) $f(x) = \frac{1}{x-2}, A = \mathbb{R} - \{2\}$
(ε) $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$
(στ) $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x < 1 \\ x^2-2x+4, & x \geq 1 \end{cases}$
4. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f: [1, +\infty) \rightarrow (0, 1]$ με $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ αντιστρέφεται και να υπολογίσετε την τιμή $f^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$.

Δραστηριότητες Ενότητας

1. Να εξετάσετε κατά πόσο οι παρακάτω τύποι ορίζουν συναρτήσεις με ανεξάρτητη μεταβλητή το x .

(α) $y = 3x, x \in \mathbb{R}$

(β) $y = x^3, x \in \mathbb{R}$

(γ) $y = \frac{1}{x-1}, x \neq 1$

(δ) $y^2 = 4 - x^2, x \in [-2, 2]$

(ε) $y^2 = 2x, x \geq 0$

(στ) $x + y = 3, x \in \mathbb{R}$

2. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τους πιο κάτω ισχυρισμούς, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Αν $f: A \rightarrow B$ είναι συνάρτηση, τότε προκύπτει ότι:

(α) Η f έχει πεδίο ορισμού το A .

(β) Η f έχει σύνολο τιμών το B .

(γ) Αν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε ισχύει πάντα $x_1 = x_2$.

(δ) Αν $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 = x_2$, τότε ισχύει πάντα $f(x_1) = f(x_2)$.

(ε) Αν $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$, τότε ισχύει πάντα $f(x_1) \neq f(x_2)$.

3. Στον πιο κάτω πίνακα παρουσιάζεται η ποσότητα στερεών αποβλήτων που συλλέχθηκε για ανακύκλωση κατά τις χρονιές 2004 – 2007 στην Κύπρο.

Χρονιά	Ποσότητα που ανακυκλώθηκε (σε τόνους)
2004	58140
2005	64000
2006	71690
2007	74560

- (α) Να κατασκευάσετε βελοειδές διάγραμμα για τον πιο πάνω πίνακα.
(β) Να εξετάσετε κατά πόσο το διάγραμμα ορίζει συνάρτηση f .
(γ) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού και ποιο το σύνολο τιμών της f ;
(δ) Να βρείτε το γράφημα της συνάρτησης f .
(ε) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(2004)$ και $f(2006)$.
4. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων με τύπο:

(α) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

(β) $f(x) = \frac{1}{x^4 - 2x^3 + x^2}$

(γ) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

5. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων με τύπο:

(α) $f(x) = x^2$

(β) $f(x) = \sqrt{x+4}$

(γ) $f(x) = \frac{x-1}{3}$

(δ) $f(x) = \frac{4}{x-4}$

(ε) $f(x) = \sqrt{9-2x}$

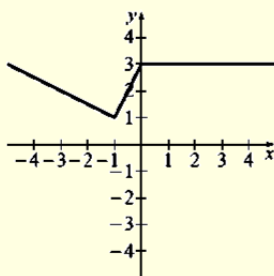
6. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sqrt{x-3}$.

(α) Να βρείτε ποιοι από τους αριθμούς $-9, 0, 1, 6, 12$ ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f .

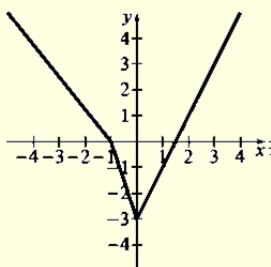
(β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

7. Στα παρακάτω διαγράμματα παρουσιάζονται οι γραφικές παραστάσεις τριών συναρτήσεων. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης σε κάθε περίπτωση.

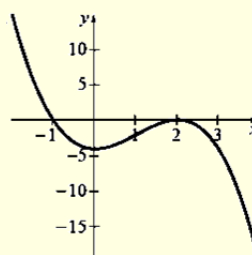
(α)



(β)



(γ)



8. Δίνεται η συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ με $f(x) = 2x + 3$ και σύνολο τιμών $f(A) = \{-1, 2, 3, 6\}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

9. Δίνεται η συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ με $f(x) = 3x - 5$ και πεδίο ορισμού $A = \{-1, 2, 3, 6\}$. Να βρείτε το σύνολο τιμών $f(A)$ της f .

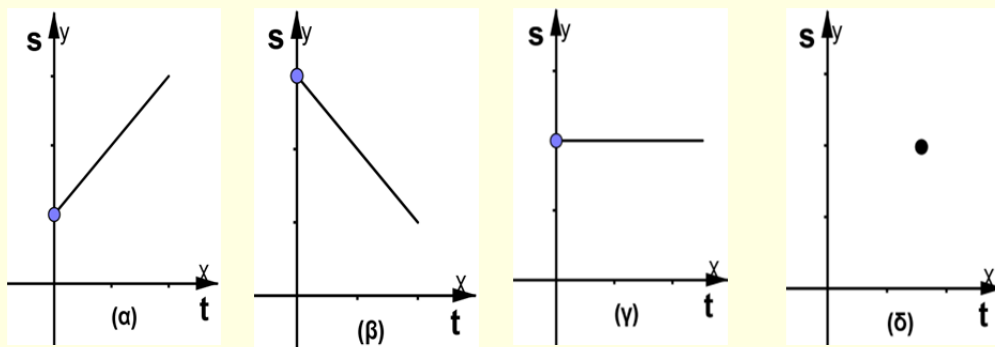
10. Δίνονται οι συναρτήσεις:

(α) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = -3x + 1$,

(β) $g: [3, 7) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = 2x + 1$.

Να βρείτε το σύνολο τιμών των f και g .

11. Να επιλέξετε τη γραφική παράσταση που ταιριάζει καλύτερα στη πρόταση «Ο Χρίστος παραμένει σε σταθερή απόσταση από το άγαλμα».



12. Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της $y = |x|$. Να εξηγήσετε πώς η γραφική παράσταση της ανισότητας $|x| < 2$ ισοδυναμεί με την $-2 < x < 2$.

13. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των συναρτήσεων που ορίζονται από τα πιο κάτω παραδείγματα.

- (α) Μια εταιρεία μεταφέρει δέματα με μέγιστο βάρος 50 kg . Η χρέωση y σε ευρώ για τη μεταφορά δέματος $x \text{ kg}$, δίνεται από τον τύπο $y = 1,5(x - 1) + 9$.
- (β) Ο φόρος προστιθέμενης αξίας y σε ευρώ είναι το 18% της αξίας του προϊόντος με αξία x ευρώ, δηλαδή $y = 0,18x$.
- (γ) Ένα όχημα ταξιδεύει με σταθερή ταχύτητα 80 km/h και είναι εφοδιασμένο με καύσιμα για να διανύσει μέχρι 240 km . Η απόσταση d που καλύπτει το όχημα, είναι συνάρτηση του χρόνου t σε ώρες, δηλαδή $d = 80t$.

14. Να βρείτε το σύνολο τιμών των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $y = \frac{x-2}{3-x}, x \in (-\infty, 2)$

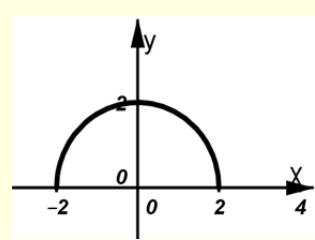
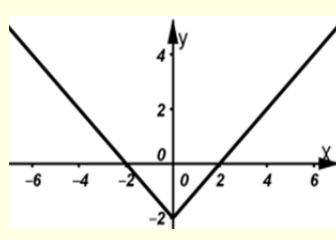
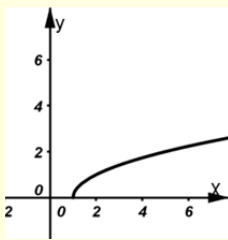
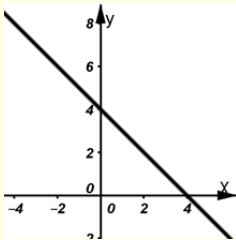
(β) $y = \frac{x^2}{2-4x}$

(γ) $y = \sqrt{\frac{1}{x}} + 4$

15. Μια φωτογραφία με σχήμα ορθογωνίου έχει διαστάσεις 8 cm και 12 cm . Η φωτογραφία μεγεθύνεται με αύξηση μήκους και πλάτους με το ίδιο ποσοστό. Ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις της φωτογραφίας, ώστε το εμβαδόν της να διπλασιαστεί;

16. Οι παρακάτω γραφικές παραστάσεις αναπαριστούν συναρτήσεις που αντιστοιχίζονται σε ένα από τους πιο κάτω τύπους.

(α) $f(x) = 4 - x$ (β) $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ (γ) $h(x) = x^3 - x$ (δ) $t(x) = |x| - 2$ (ε) $y = \sqrt{x - 1}$
Να κάνετε την αντιστοίχιση.



17. Να λύσετε την ανίσωση $2x < |x - 3|$, κατασκευάζοντας τις δύο γραφικές παραστάσεις στο ίδιο σύστημα αξόνων και να δικαιολογήσετε την σκέψη σας.

18. Να εξετάσετε κατά πόσο η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 1, & x \leq -1 \\ -x^2 + 3x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$ είναι περιττή.

19. Δίνονται οι συναρτήσεις:

(α) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = -3x + 1$,

(β) $g: [3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = 4x + 1$.

Να βρείτε το σύνολο τιμών τους και τις συναρτήσεις $f + g$, $f - g$ και $f \cdot g$.

20. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x) = \frac{x}{x+3}$ και $g(x) = 2x - 1$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο των συναρτήσεων $f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$ (Να γίνουν όλες τις δυνατές πράξεις).

21. Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω συναρτήσεις είναι πολλαπλού τύπου (τμηματικές) και να τις παραστήσετε γραφικά.

(α) $f(x) = |x + 2|$, $x \in \mathbb{R}$

(β) $g(x) = |x + 2| - x$, $x \in \mathbb{R}$

(γ) $h(x) = |x^2|$, $x \in \mathbb{R}$

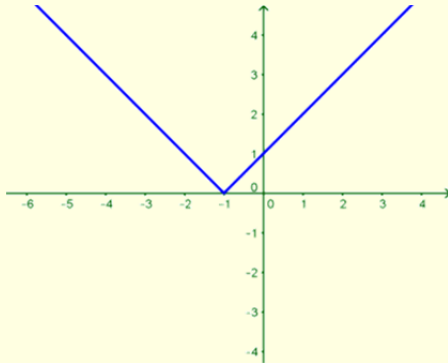
22. Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω συναρτήσεις είναι τμηματικές και τις παραστήσετε γραφικά.

(α) $f(x) = |x| + |x - 1|$, $x \in \mathbb{R}$

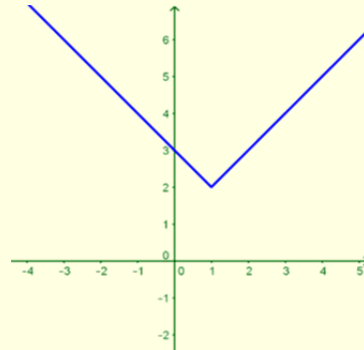
(β) $g(x) = |x| + |-x|$, $x \in \mathbb{R}$

23. Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων που απεικονίζονται στις πιο κάτω γραφικές παραστάσεις.

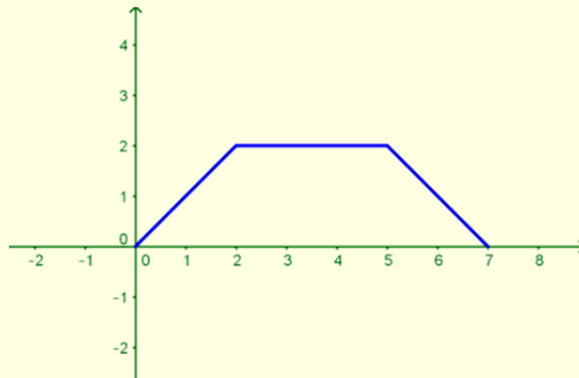
(α)



(β)



24. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης που απεικονίζεται στη πιο κάτω γραφική παράσταση.



25. Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}, A, B \subseteq \mathbb{R}$ είναι ίσες. Σε περίπτωση που δεν είναι ίσες, να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο είναι ίσες.

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 8x}{x^2 + 4x}, \quad g(x) = \frac{x^8 - 4x^6}{x^7 + 2x^6}$$

26. Να εξετάσετε κατά πόσο υπάρχει υποσύνολο του $\mathbb{R}$, στο οποίο οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}, A, B \subseteq \mathbb{R}$, να είναι ίσες:

(α) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}, g(x) = x - 2$

(β) $f(x) = x^2 + x + 1, g(x) = 2x + 7$

(γ) $f(x) = \sqrt{x - 3}, g(x) = \sqrt{3 - x}$

(δ) $f(x) = x^3 - 4x + 10, g(x) = 10$

27. Να εξετάσετε κατά πόσο οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}, A, B \subseteq \mathbb{R}$, με $f(x) = x - 4$ και $g(x) = |x - 4|$ είναι ίσες.
28. Να εξετάσετε κατά πόσο ισχύει η ισότητα $\sqrt{x^2 - 16} = \sqrt{x - 4} \cdot \sqrt{x + 4}$.
29. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ και $g(x) = \sqrt{x - 1}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού τους και ακολουθώντας να ορίσετε τη συνάρτηση $g \circ f$.
30. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = 3x - 4$ και $g(x) = ax + 3, a \in \mathbb{R}$.
(α) Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$.
(β) Να υπολογίσετε την τιμή του a , ώστε $f \circ g = g \circ f$.
31. Αν $f(x) = (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 - \eta\mu 2x - 1$ και $g(0) = 1$, να υπολογίσετε την τιμή $(g \circ f)(2)$.
32. Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω συναρτήσεις είναι $1 - 1$ και επί, αιτιολογώντας την απάντησή σας.
(α) $f(x) = 2x - 5, x \in \mathbb{R}$
(β) $g(x) = x^2 - 4, x \in \mathbb{R}$
(γ) $h(x) = x^3 + 1, x \in \mathbb{R}$
33. Να εξετάσετε κατά πόσο ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της $f: A \rightarrow f(A)$ με τύπο $f(x) = x^2 + 4x - 5$, όπου $A = (-2, +\infty)$.
Αν ορίζεται, να βρείτε τον τύπο της και το πεδίο ορισμού της.
34. Αν $f(x) = x^2 + 2, x \geq 0$, να υπολογίσετε τις τιμές $f(7)$ και $f^{-1}(f(7))$. Τι παρατηρείτε;
35. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x-1}{x-5}$ με $x < 3$.
(α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.
(β) Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} .

Δραστηριότητες Εμπλουτισμού

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-7x+12}}{x^3-x}$.
2. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, η οποία εκφράζεται με την πρόταση:
«Ο φυσικός αριθμός x αντιστοιχίζεται στο υπόλοιπο της διαίρεσης $x \div 3$ »
 - (α) Να δείξετε ότι η φ είναι συνάρτηση.
 - (β) Να βρείτε το σύνολο των τιμών της.
 - (γ) Να υπολογίσετε τις τιμές $\varphi(34), \varphi(71), \varphi(2016)$.
 - (δ) Να εξετάσετε κατά πόσο η συνάρτηση φ είναι $1-1$.
 - (ε) Αν $\beta, \gamma \in \mathbb{N}$ με $\beta < \gamma$ και $\varphi(\beta) = \varphi(\gamma)$, να δείξετε ότι $\varphi(\beta - \gamma) = 0$.
3. Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:
 - (α) $f(x) = \frac{3x+7}{x^2+3x+2}$
 - (β) $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{3-x}}$
 - (γ) $f: [-1,2] \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = 1 - \sqrt{4-x^2}$
4. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f(xy) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$ και $f(5) = 2$, να υπολογίσετε το $f(625)$.
5. Να κάνετε τη γραφική της συνάρτησης $g(x) = 2|x-2| - 3|x-3|, x \in \mathbb{R}$ και από τη γραφική της παράσταση:
 - (α) να βρείτε το σύνολο των τιμών της
 - (β) να λύσετε την εξίσωση $g(x) = -4$
6. Να κάνετε τη γραφική της συνάρτησης $h(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 2 \\ \frac{6}{x}, & x > 2 \end{cases}$ και από τη γραφική της παράσταση της να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή της συνάρτησης h .
7. Δίνεται η συνάρτηση $f^*: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
$$f(xy) = y \cdot f(x) + x \cdot f(y), \quad \forall x, y > 0$$
Να δείξετε ότι:
 - (α) $f(1) = 0$
 - (β) $f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \cdot f(x), \forall x > 0$
 - (γ) $f(x^n) = nx^{n-1}f(x), \forall n \in \mathbb{N} \text{ και } x > 0$.

8. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{|x+|x||-|x-|x||}{2}$ είναι ταυτοτική.
9. Να ορίσετε τη συνάρτηση $f + g$, όταν:
- $$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 2 \\ 2, & x > 2 \end{cases} \text{ και } g(x) = \begin{cases} 3x+4, & x \leq 3 \\ x+1, & x > 3 \end{cases}$$
10. Να υπολογίσετε την τιμή του a , ώστε για τις συναρτήσεις $f(x) = 6x + 8$ και $g(x) = 5x + a$, να ισχύει $f \circ g = g \circ f$.
11. Να δείξετε ότι μία άρτια συνάρτηση δεν μπορεί να έχει αντίστροφη.
12. Να ελέγξετε κατά πόσο ορίζονται οι αντίστροφες συναρτήσεις των πιο κάτω συναρτήσεων και να τις βρείτε στις περιπτώσεις που ορίζονται:
- (α) $f: A \rightarrow f(A)$ με τύπο $f(x) = x^2 + 3$, $A = [-1, 4]$.
- (β) $g: A \rightarrow g(A)$ με τύπο $g(x) = (x + 3)^2 + 3$, $A = [-1, 4]$
- (γ) $h: A \rightarrow h(A)$ με τύπο $h(x) = 4 + \sqrt{x - 2}$, $A = [2, +\infty)$.

