

## Ενότητα 6: Ακολουθίες

## Α. Ακολουθίες

**A1.** Να γράψετε τους 4 πρώτους όρους των ακολουθιών  $(a_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , με τύπο:

**(α)**  $a_n = -2n + 1$     **(β)**  $a_n = (-1)^n |2 - n|$     **(γ)**  $a_1 = 3, a_{n+1} = a_n^2 - 1$

**A2.** Να εξετάσετε ως προς η μονοτονία τις πιο κάτω ακολουθίες:

**(α)**  $a_n = \frac{2}{n+3}$     **(β)**  $a_n = (-5)^n$     **(γ)**  $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n^2 + 2$

**A3.** Να βρείτε ένα αναδρομικό τύπο για την ακολουθία  $(a_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , με γενικό όρο  $a_n = 3n + 2$ .

**A4.** Να βρείτε τον γενικό όρο της ακολουθίας  $(a_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , η οποία ορίζεται από τον αναδρομικό τύπο  $a_{n+1} = a_n + 3$ ,  $a_1 = 1$ .

**A5.** Να εξετάσετε αν οι πιο κάτω ακολουθίες είναι κάτω φραγμένες, άνω φραγμένες ή φραγμένες:

**(α)**  $a_n = 2^{-n}$     **(β)**  $a_n = \frac{2n}{n+1}$     **(γ)**  $a_n = \frac{\sin(n)}{n}$

**A6.** Να βρείτε το όριο των πιο κάτω ακολουθιών και να εξετάσετε αν είναι συγκλίνουσες:

**(α)**  $a_n = \frac{2n^2 - 3n}{1 + n^2}$     **(β)**  $a_n = \frac{n\sqrt{n}}{n+2}$     **(γ)**  $a_n = \sqrt{\frac{4n^2}{n+2}}$

**A7.** Δίνεται η ακολουθία με γενικό όρο  $a_n = 3 - \frac{1}{3^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**(α)** Να εξετάσετε την ακολουθία ως προς τη μονοτονία.

**(β)** Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι φραγμένη και να βρείτε το ελάχιστο άνω φράγμα και το μέγιστο κάτω φράγμα της.

**(γ)** Να εξετάσετε αν η ακολουθία είναι συγκλίνουσα. Στην περίπτωση που συγκλίνει, να βρείτε το όριο της.

## Β. Ειδικές Ακολουθίες (Αριθμητική – Γεωμετρική Πρόοδος)

**B1.** Ο γενικός τύπος μιας ακολουθίας είναι  $a_n = 12 - 4n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**(α)** Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος.

**(β)** Να βρείτε έναν αναγωγικό τύπο της.

**(γ)** Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου.

**B2.** Οι αριθμοί  $x - 2$ ,  $x + 2$  και  $2x - 1$  είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

**(α)** Να υπολογίσετε την τιμή του  $x$ .

**(β)** Αν ο  $x - 2$  είναι ο δεύτερος όρος της προόδου, να υπολογίσετε τον δέκατο όρο της.

**B3.** Ένας αυτοεργοδοτούμενος χρωστά στον φόρο εισοδήματός 2940€ και θα πληρώσει το ποσό σε μηνιαίες δόσεις. Τον πρώτο μήνα θα πληρώσει 80€ και κάθε επόμενο μήνα θα πληρώνει 20€ περισσότερα, μέχρι να ξοφλήσει. Να βρείτε σε πόσους μήνες θα ξοφλήσει το χρέος του.

**B4.** Αριθμητικής Πρόοδου ο πρώτος όρος είναι 3 και ο δέκατος - έκτος όρος της είναι τριπλάσιος του πέμπτου όρου της.

(α) Να σχηματίσετε την πρόοδο.

(β) Να βρείτε το πλήθος των  $n$  πρώτων όρων της που έχουν άθροισμα 168.

**B5.** Μια ακολουθία έχει άθροισμα  $n$  πρώτων όρων  $S_n = 3n^2 + 2n$ . Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος και να την σχηματίσετε.

**B6.** Ο γενικός όρος μίας ακολουθίας είναι  $a_n = \ln \sqrt{\frac{3}{e^{n-5}}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

(α) Να δείξετε ότι η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά  $\delta = -\frac{1}{2}$ .

(β) Να βρείτε ποιος όρος της αριθμητικής προόδου  $(a_n)$  είναι ίσος με  $\frac{1}{2}(1 + \ln 3)$ .

(γ) Να δείξετε ότι το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου  $(a_n)$  ισούται με  $10 \left( -\frac{11}{2} + \ln 3 \right)$ .

**B7.** Γεωμετρικής προόδου το άθροισμα του πρώτου και του τρίτου όρου είναι  $-78$ , ενώ το άθροισμα του δεύτερου και του τέταρτου όρου είναι 52.

(α) Να σχηματίσετε την πρόοδο.

(β) Να βρείτε το άθροισμα των απείρων θετικών όρων της.

**B8.** Οι αριθμοί  $\eta\mu x, \eta\mu y, \sigma\upsilon\nu y$  και  $\sigma\upsilon\nu x$  είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. Να δείξετε ότι  $\eta\mu(x + y) = 1$ .

**B9.** Μια ακολουθία έχει άθροισμα  $n$  πρώτων όρων  $S_n = 4^n - 3$ . Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε τον πρώτο όρο και τον λόγο της.

**B10.** Δίνεται η ακολουθία κύκλων  $K_1, K_2, K_3, \dots$  ως εξής: Ο πρώτος κύκλος  $K_1$  έχει ακτίνα  $1m$  και διαδοχικά κάθε επόμενος κύκλος έχει ακτίνα ίση με το μισό της ακτίνας του προηγούμενου κύκλου.

Να βρείτε :

(α) Την ακτίνα και την περίμετρο του κύκλου  $K_7$ .

(β) Το άθροισμα των εμβαδών των όλων των κύκλων,  $E_1 + E_2 + E_3 + \dots$ .