

Όγκος στερεού από περιστροφή

Όγκος στερεού από περιστροφή επίπεδου χωρίου γύρω από τον άξονα των τετμημένων.

A.

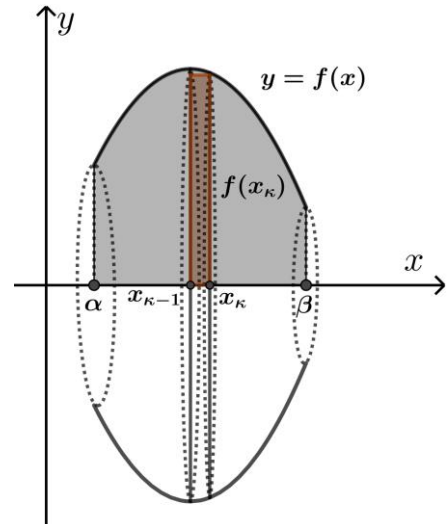
Έστω R το σκιασμένο χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x) \geq 0$, $x \in [\alpha, \beta]$ και τον άξονα των τετμημένων.

Θέλουμε να υπολογίσουμε τον όγκο του στερεού που σχηματίζεται από την πλήρη στροφή του χωρίου R γύρω από τον άξονα των τετμημένων.

Όπως και στον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος, θεωρούμε τη διαμέριση του διαστήματος $[\alpha, \beta]$:

$$\alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = \beta$$

όπου κάθε υποδιάστημα $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ έχει πλάτος Δx .



Θεωρώντας το τυχαίο υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$, τότε το (κόκκινο) στοιχειώδες ορθογώνιο με διαστάσεις $\Delta x = x_k - x_{k-1}$ και $f(x_k)$ (ή $f(\xi_k)$, $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$) κατά την περιστροφή του γύρω από τον άξονα των τετμημένων παράγει κύλινδρο με ακτίνα βάσης $\rho = f(x_k)$ και ύψος $v = \Delta x$. Άρα ο στοιχειώδης αυτός κύλινδρος έχει όγκο που δίνεται από τον τύπο $V_k = \pi \rho^2 v = \pi f^2(x_k) \Delta x$.

Επομένως, το άθροισμα όλων των n στοιχειωδών κυλίνδρων που δημιουργούνται από όλα τα στοιχειώδη ορθογώνια δίνεται από τη σχέση:

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n V_k = \sum_{k=1}^n \pi f^2(x_k) \Delta x$$

Αν στην ισότητα (1) πάρουμε όριο με $n \rightarrow +\infty$, τότε το πιο πάνω άθροισμα τείνει να ισούται με τον όγκο του παραγόμενου στερεού από την πλήρη στροφή του χωρίου R γύρω από τον άξονα των τετμημένων. Με άλλα λόγια, αν V είναι ο ζητούμενος όγκος, τότε έχουμε:

$$V = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n V_k \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \pi f^2(x_k) \Delta x \right) = \pi \int_{\alpha}^{\beta} f^2(x) dx$$

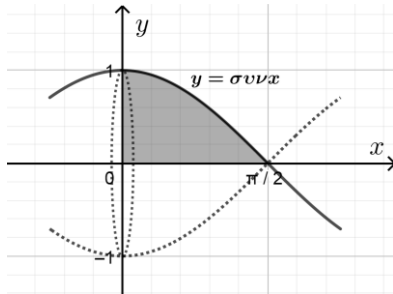
Όλα τα πιο πάνω ερμηνεύουν τον τύπο που δίνεται στο σχολικό βιβλίο στη σελ.125.

Παρατήρηση: Ο πιο πάνω τύπος ισχύει και στην περίπτωση που ισχύει $f(x) \leq 0$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$.

Παράδειγμα 1

Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τετμημένων του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = \sin x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και τους άξονες συντεταγμένων.

Λύση



Σύμφωνα με τον τύπο της προηγούμενης σελίδας, για τον ζητούμενο όγκο έχουμε:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\alpha}^{\beta} f^2(x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin 2x}{2} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \left[x + \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \left[\left(\frac{\pi}{2} + 0 \right) - 0 \right] = \frac{\pi^2}{4} \text{ κ.μ.} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2

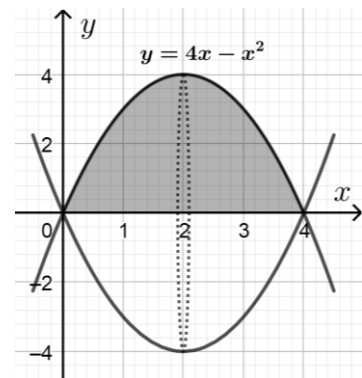
Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τετμημένων του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = 4x - x^2$ και τον άξονα των τετμημένων στο διάστημα $[0, 4]$.

Λύση

Η καμπύλη $y = 4x - x^2$ είναι μία παραβολή που τέμνει τον άξονα x στα σημεία $(0, 0)$ και $(4, 0)$ στρέφοντας τα κοίλα προς τα κάτω.

Για τον ζητούμενο όγκο έχουμε:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\alpha}^{\beta} f^2(x) dx = \pi \int_0^4 (4x - x^2)^2 dx \\ &= \pi \int_0^4 (16x^2 - 8x^3 + x^4) dx \\ &= \pi \left[\frac{16x^3}{3} - 2x^4 + \frac{x^5}{5} \right]_0^4 = \frac{512\pi}{15} \text{ κ.μ.} \end{aligned}$$

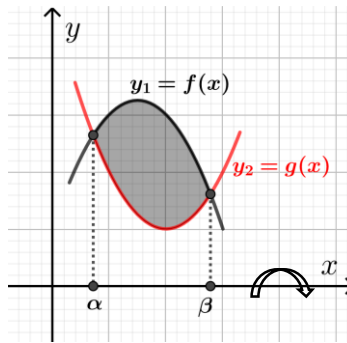


B.

Έστω R το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y_1 = f(x)$ και $y_2 = g(x)$ με $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$.

Ο όγκος του στερεού που σχηματίζεται από την πλήρη στροφή του χωρίου R γύρω από τον άξονα των τετμημένων δίνεται από τον τύπο:

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} (y_1^2 - y_2^2) dx = \pi \int_{\alpha}^{\beta} (f^2(x) - g^2(x)) dx$$



Παράδειγμα 3

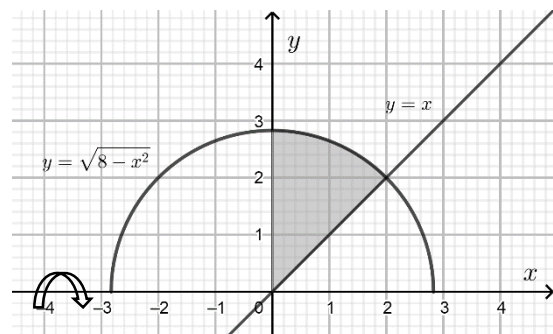
Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τετμημένων του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = \sqrt{8 - x^2}$, τον άξονα των τεταγμένων και την ευθεία $y = x$.

Λύση

Η καμπύλη $y = \sqrt{8 - x^2}$ προκύπτει από την εξίσωση $x^2 + y^2 = 8$ αν την επιλύσουμε ως προς y με $y \geq 0$, άρα αποτελεί το άνω ημικύκλιο του κύκλου $x^2 + y^2 = 8$.

Βρίσκουμε τις τετμημένες των σημείων τομής της καμπύλης και της ευθείας:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} y &= x \\ y &= \sqrt{8 - x^2} \end{aligned} \right\} &\Rightarrow x = \sqrt{8 - x^2} \\ \Rightarrow x^2 &= 8 - x^2 \Rightarrow x^2 = 4 \\ \Rightarrow x &= 2, \text{ αφού } x = y \geq 0 \end{aligned}$$



Για τον ζητούμενο όγκο έχουμε:

$$V = \pi \int_0^2 (y_1^2 - y_2^2) dx = \pi \int_0^2 (8 - x^2 - x^2) dx = \pi \left[8x - \frac{2x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{32\pi}{3} \text{ κ.μ.}$$

Παράδειγμα 4

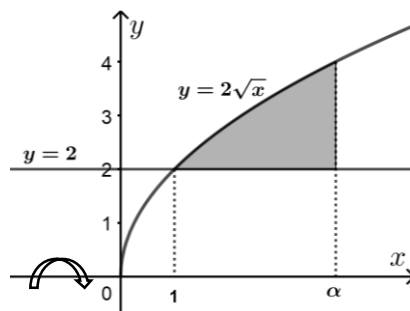
Το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $y = 2\sqrt{x}$ και τις ευθείες $y = 2$ και $x = \alpha$, $\alpha > 1$, στέφεται πλήρως γύρω από τον άξονα των τετμημένων. Αν ο όγκος του παραγόμενου στερεού είναι ίσος με 18π κ.μ., να βρείτε την τιμή του α .

Λύση

Η καμπύλη $y = 2\sqrt{x}$ είναι το τμήμα της παραβολής $y^2 = 4x$ που αντιστοιχεί για $y \geq 0$.

Η ευθεία $y = 2$ τέμνει την καμπύλη $y = 2\sqrt{x}$ όταν:

$$2\sqrt{x} = 2 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$$



Για τον ζητούμενο όγκο έχουμε:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^{\alpha} (y_1^2 - y_2^2) dx = \pi \int_1^{\alpha} ((2\sqrt{x})^2 - 2^2) dx = \pi \int_1^{\alpha} (4x - 4) dx \\ &= \pi [2x^2 - 4x]_1^{\alpha} = \pi [(2\alpha^2 - 4\alpha) - (2 - 4)] \\ &= \pi (2\alpha^2 - 4\alpha + 2) \text{ κ.μ.} \end{aligned}$$

Αφού δίνεται ότι ο πιο πάνω όγκος είναι ίσος με 18π κ.μ., τότε έχουμε:

$$2\alpha^2 - 4\alpha + 2 = 18 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha - 8 = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 4)(\alpha + 2) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 4 \text{ ή } \alpha = -2$$

Επειδή είναι δεδομένο ότι $\alpha > 1$, η δεκτή λύση είναι η $\alpha = 4$.

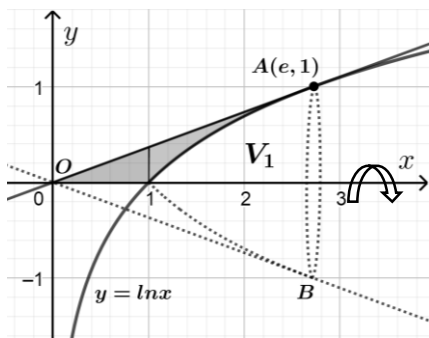
Παράδειγμα 5

Το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \ln x$, την εφαπτομένη της στο σημείο της με τετμημένη $x = e$ και τον άξονα των τετμημένων, στρέφεται πλήρως γύρω από τον άξονα των τετμημένων. Να υπολογίσετε τον όγκο του παραγόμενου στερεού.

Λύση

α' τρόπος:

Παρατηρώντας το πιο κάτω σχήμα, ο όγκος V_1 δημιουργείται από την περιστροφή του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = \ln x$ και τον άξονα των τετμημένων στο διάστημα $[1, e]$ γύρω από τον άξονα των τετμημένων. Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε:



$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_1^e (\ln x)^2 dx = \pi \left[x(\ln x)^2 \right]_1^e - \int_1^e x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \pi \left(e - 2 \int_1^e \ln x dx \right) \\ &= \pi \left(e - \left[2x \ln x \right]_1^e - 2 \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx \right) \\ &= \pi(e - 2e + [2x]_1^e) \\ &= \pi(e - 2e + 2e - 2) \\ &= \pi(e - 2) \text{ κ.μ.} \end{aligned}$$

Το τμήμα OA κατά την περιστροφή παράγει τον όγκο του κώνου OAB με ακτίνα βάσης $\rho = y_A = 1$ και ύψος $v = x_A = e$. Άρα ο κώνος έχει όγκο:

$$V_2 = \frac{\pi \rho^2 v}{3} = \frac{\pi \cdot 1^2 \cdot e}{3} = \frac{\pi e}{3} \text{ κ.μ.}$$

Επομένως, ο ζητούμενος όγκος είναι ίσος με:

$$V = V_2 - V_1 = \frac{\pi e}{3} - \pi(e - 2) = \frac{\pi}{3}(6 - 2e) \text{ κ.μ.}$$

β' τρόπος (πιο περίπλοκος):

Εύκολα βρίσκουμε ότι η εφαπτομένη στο A έχει εξίσωση $y = \frac{x}{e}$.

Άρα για τον ζητούμενο όγκο έχουμε:

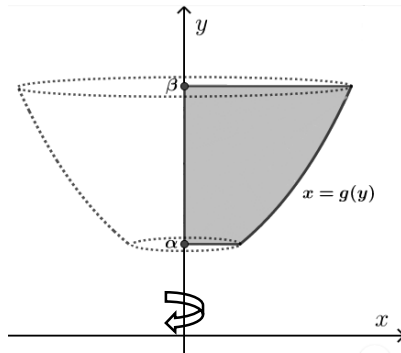
$$V = \pi \int_0^1 \left(\frac{x}{e} \right)^2 dx + \pi \int_1^e \left[\left(\frac{x}{e} \right)^2 - (\ln x)^2 \right] dx = \dots$$

Όγκος στερεού από περιστροφή επίπεδου χωρίου γύρω από τον άξονα των τεταγμένων.

A.

Έστω R το σκιασμένο χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$, $x \geq 0$, τον άξονα των τεταγμένων και τις ευθείες $y = \alpha$ και $y = \beta$.

Επιλύοντας τον τύπο $y = f(x)$ ως προς x , δηλαδή $x = g(y)$, $y \in [\alpha, \beta]$, τότε ο όγκος του στερεού που σχηματίζεται από την πλήρη στροφή του χωρίου R γύρω από τον άξονα των τεταγμένων, δίνεται από τον τύπο:



$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} g^2(y) dy$$

Παρατήρηση: Ο πιο πάνω τύπος ισχύει και στην περίπτωση που ισχύει $x = g(y)$, $x \leq 0$.

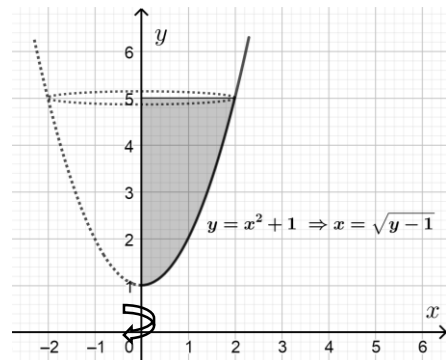
Παράδειγμα 6

Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τεταγμένων του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = x^2 + 1$, $x \geq 0$, τον άξονα των τεταγμένων και την ευθεία $y = 5$.

Λύση

Είναι $y = x^2 + 1$, $x \geq 0 \Rightarrow x = g(y) = \sqrt{y - 1}$, άρα για τον ζητούμενο όγκο έχουμε:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\alpha}^{\beta} g^2(y) dy = \pi \int_1^5 (y - 1) dy \\ &= \pi \left[\frac{y^2}{2} - y \right]_1^5 = \pi \left[\left(\frac{25}{2} - 5 \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \right] = 8\pi \text{ κ.μ.} \end{aligned}$$



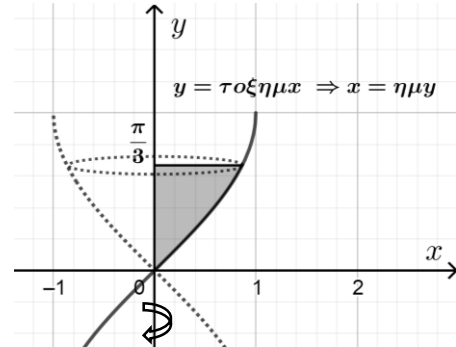
Παράδειγμα 7

Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τεταγμένων του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = \text{τοξημ}x$, $x \geq 0$, τον άξονα των τεταγμένων και την ευθεία $y = \frac{\pi}{3}$.

Λύση

Είναι $y = \text{τοξημ}x$, $x \geq 0 \Rightarrow x = g(y) = \eta\mu y$, άρα για τον ζητούμενο όγκο έχουμε:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\alpha}^{\beta} g^2(y) dy = \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \eta\mu^2 y dy = \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2y}{2} dy \\ &= \frac{\pi}{2} \left[y - \frac{\eta\mu 2y}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{2} \left[\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) - 0 \right] \\ &= \frac{\pi}{12} (4\pi - 3\sqrt{3}) \text{ κ.μ.} \end{aligned}$$

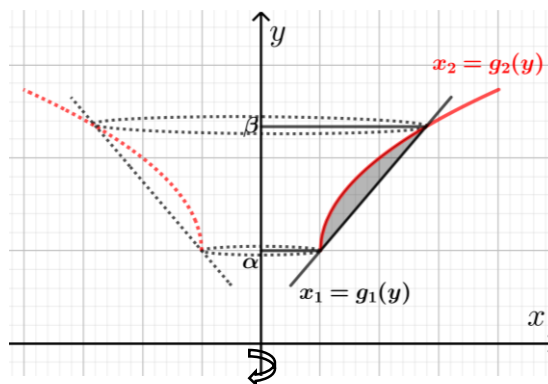


B.

Έστω R το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες με εξισώσεις $x_1 = g_1(y)$, $x_2 = g_2(y)$ και τις ευθείες $y = \alpha$ και $y = \beta$.

Ο όγκος του στερεού που σχηματίζεται από την πλήρη στροφή του χωρίου R γύρω από τον άξονα των τεταγμένων, δίνεται από τον τύπο:

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} (x_1^2 - x_2^2) dy = \pi \int_{\alpha}^{\beta} (g_1^2(y) - g_2^2(y)) dy$$



Παράδειγμα 8

Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τεταγμένων του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = \frac{3}{x}$, $x > 0$ και την ευθεία $y = 4 - x$.

Λύση

Βρίσκουμε τα σημεία τομής της καμπύλης και της ευθείας:

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{3}{x} \\ y = 4 - x \end{array} \right\} \Rightarrow 4 - x = \frac{3}{x} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(x - 1) = 0$$

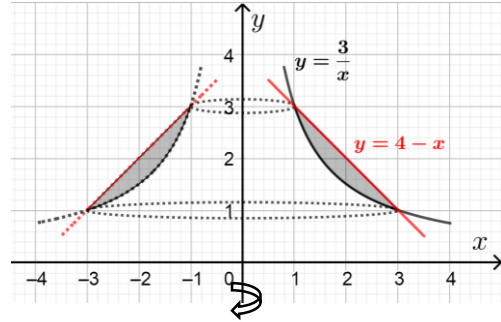
$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ ή } x = 1$$

Για $x = 3 \Rightarrow y = 1$ και για $x = 1 \Rightarrow y = 3$.

Είναι $y = 4 - x \Rightarrow x_1 = 4 - y$ και $y = \frac{3}{x} \Rightarrow x_2 = \frac{3}{y}$.

Για τον ζητούμενο όγκο έχουμε:

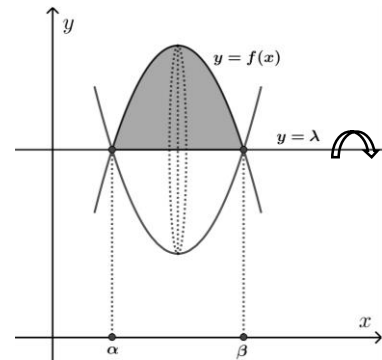
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\alpha}^{\beta} (x_1^2 - x_2^2) dy = \pi \int_1^3 \left((4 - y)^2 - \left(\frac{3}{y} \right)^2 \right) dy = \pi \int_1^3 \left(16 - 8y + y^2 - \frac{9}{y^2} \right) dy \\ &= \pi \left[16y - 4y^2 + \frac{y^3}{3} + \frac{9}{y} \right]_1^3 \\ &= \pi \left[(48 - 36 + 9 + 3) - \left(16 - 4 + \frac{1}{3} + 9 \right) \right] \\ &= \frac{8\pi}{3} \text{ κ.μ.} \end{aligned}$$



Όγκος στερεού από περιστροφή επίπεδου χωρίου γύρω από ευθεία $y = \lambda$.

Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Έστω R το σκιασμένο χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη με εξίσωση $y = f(x)$ και την ευθεία $y = \lambda$.

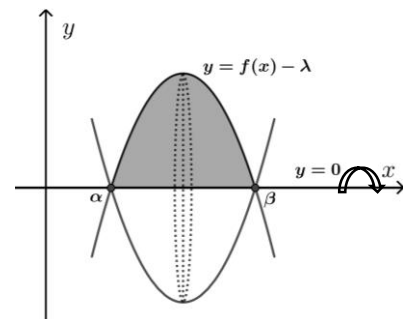
Θέλουμε να υπολογίσουμε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή του χωρίου R γύρω από την ευθεία $y = \lambda$ (Σχήμα 1).



Σχήμα 1

Αν μετατοπίσουμε την πιο πάνω καμπύλη f και την ευθεία $y = \lambda$ κατά λ μονάδες κατακόρυφα προς τα κάτω, τότε η προκύπτει η συνάρτηση $g(x) = f(x) - \lambda$ και ο νέος άξονας περιστροφής είναι η ευθεία $y = 0$, δηλαδή ο άξονας των τετμημένων (Σχήμα 2).

Τότε, ο όγκος του στερεού που παράγεται στο σχήμα 1 είναι ισοδύναμος με τον όγκο του στερεού που παράγεται στο σχήμα 2. Επομένως, κατά τα γνωστά, για τον ζητούμενο όγκο V ισχύει:



Σχήμα 2

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} g(x)^2 dx = \pi \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - \lambda)^2 dx$$

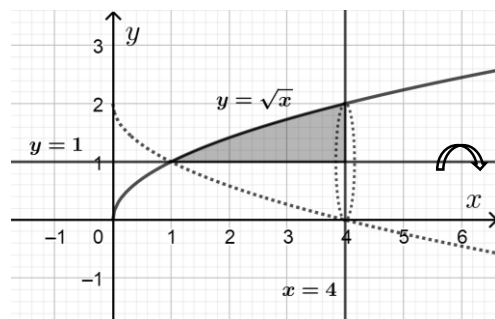
Παράδειγμα 9

Το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ και τις ευθείες $y = 1$, $x = 4$ περιστρέφεται πλήρως γύρω από την ευθεία $y = 1$. Να υπολογίσετε τον όγκο του παραγόμενου στερεού.

Λύση

Για τον ζητούμενο όγκο έχουμε:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - \lambda)^2 dx = \pi \int_1^4 (\sqrt{x} - 1)^2 dx \\ &= \pi \int_1^4 (x - 2\sqrt{x} + 1) dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} - 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + x \right]_1^4 \\ &= \pi \left[\frac{x^2}{2} - 4\frac{\sqrt{x^3}}{3} + x \right]_1^4 = \pi \left[\left(8 - \frac{32}{3} + 4 \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3} + 1 \right) \right] = \frac{7\pi}{6} \text{ κ.μ.} \end{aligned}$$



Παράδειγμα 10

Το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $y = \frac{3}{x}$, $x > 0$ και τις ευθείες $y = x - 2$, $y = 3$ περιστρέφεται πλήρως γύρω από την ευθεία $y = 3$. Να υπολογίσετε τον όγκο του παραγόμενου στερεού.

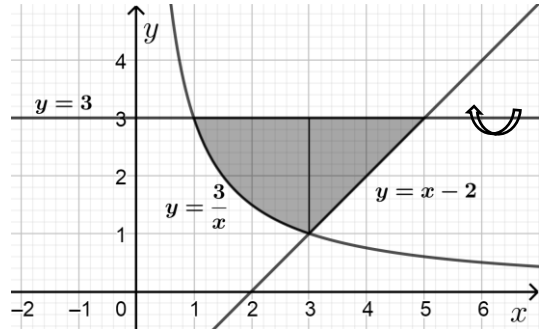
Λύση

Βρίσκουμε το σημείο τομής της καμπύλης και της ευθείας:

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{3}{x} \\ y = x - 2 \end{array} \right\} \Rightarrow x - 2 = \frac{3}{x} \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ ή } x = -1$$

Επειδή δίνεται ότι $x > 0$, δεκτή λύση είναι η $x = 3$, άρα το σημείο τομής είναι το $(3, 1)$.

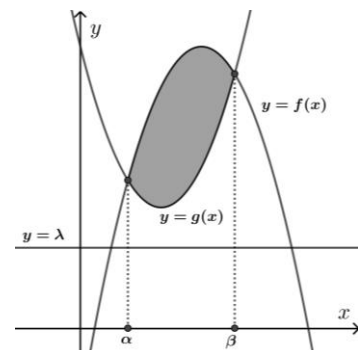


Για τον ζητούμενο όγκο έχουμε:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^3 \left(3 - \frac{3}{x}\right)^2 dx + \pi \int_3^5 (3 - (x - 2))^2 dx \\ &= \pi \int_1^3 \left(9 - \frac{18}{x} + \frac{9}{x^2}\right) dx + \pi \int_3^5 (25 - 10x + x^2) dx \\ &= \pi \left[9x - 18 \ln x - \frac{9}{x}\right]_1^3 + \pi \left[25x - 5x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_3^5 \\ &= \pi[(27 - 18 \ln 3 - 3) - (9 - 0 - 9)] + \pi \left[\left(125 - 125 + \frac{125}{3}\right) - (75 - 45 + 9)\right] \\ &= \pi \left(\frac{80}{3} - 18 \ln 3\right) \text{ κ.μ.} \end{aligned}$$

Αν οι γραφικές παραστάσεις των συνεχών συναρτήσεων $y = f(x)$ και $y = g(x)$ τέμνονται σε δύο σημεία με τετμημένες $x = \alpha$ και $x = \beta$ και επιπλέον είναι $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$, τότε το χωρίο που περικλείεται από τις δύο καμπύλες όταν περιστραφεί πλήρως γύρω από την ευθεία $y = \lambda$ παράγει στερεό όγκου:

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - \lambda)^2 dx - \pi \int_{\alpha}^{\beta} (g(x) - \lambda)^2 dx$$



Παράδειγμα 11

Το χωρίο που περικλείεται από τις παραβολές $y = \frac{x^2}{2} + 4$ και $y = x^2 + 2$ περιστρέφεται κατά 2π γύρω από την ευθεία $y = 1$. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται.

Λύση

Βρίσκουμε τα σημεία τομής των δύο καμπύλων:

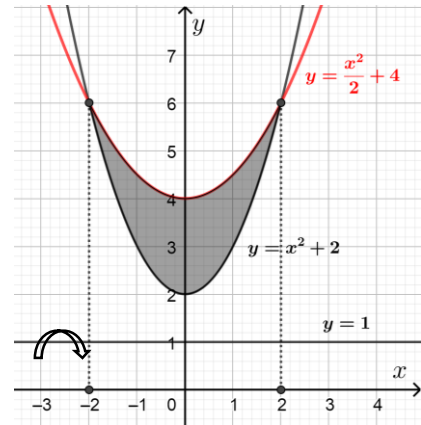
$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{x^2}{2} + 4 \\ y = x^2 + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{2} + 4 = x^2 + 2 \Rightarrow x^2 + 8 = 2x^2 + 4$$

$$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = -2 \text{ ή } x = 2$$

Άρα τα σημεία τομής είναι τα $(-2, 6)$ και $(2, 6)$.

Λόγω συμμετρίας, για τον ζητούμενο όγκο έχουμε:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} + 4 - 1 \right)^2 dx - 2\pi \int_0^2 (x^2 + 2 - 1)^2 dx \\ &= 2\pi \int_0^2 \left(\frac{x^4}{4} + 3x^2 + 9 \right) dx - 2\pi \int_0^2 (x^4 + 2x^2 + 1) dx \\ &= 2\pi \left[\frac{x^5}{20} + x^3 + 9x \right]_0^2 - 2\pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x \right]_0^2 \\ &= 2\pi \left[\left(\frac{32}{20} + 8 + 18 \right) - 0 \right] - 2\pi \left[\left(\frac{32}{5} + \frac{16}{3} + 2 \right) - 0 \right] \\ &= \frac{416\pi}{15} \text{ κ.μ.} \end{aligned}$$

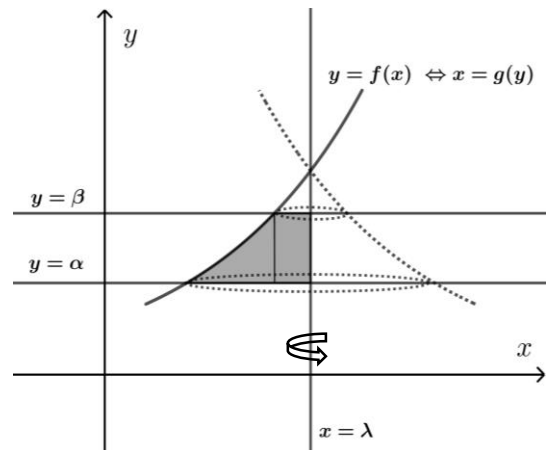


Όγκος στερεού από περιστροφή επίπεδου χωρίου γύρω από ευθεία $x = \lambda$.

Έστω $y = f(x)$, $x \geq 0$ μία συνεχής συνάρτηση.

Αν το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$, την ευθεία $x = \lambda$ και τις ευθείες $y = \alpha$, $y = \beta$ περιστραφεί πλήρως γύρω από την ευθεία $x = \lambda$, τότε ο όγκος V του παραγόμενου στερεού δίνεται από τον τύπο:

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} (\lambda - g(y))^2 dy$$



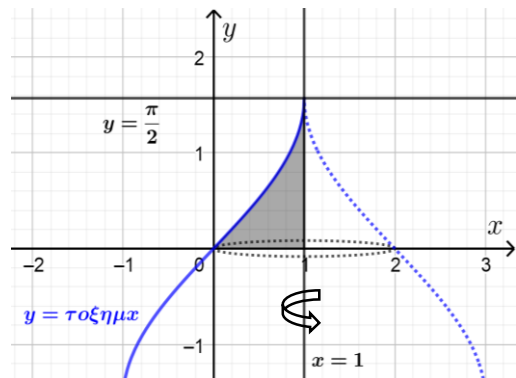
Παράδειγμα 12

Το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $y = \text{τοξημ}x$ και τις ευθείες $y = 0$, $x = 1$ περιστρέφεται κατά 2π γύρω από την ευθεία $x = 1$. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται.

Λύση

Είναι $y = \text{τοξημ}x \Leftrightarrow x = \eta\mu y$, και για $x = 1$ είναι $y = \frac{\pi}{2}$, άρα για τον ζητούμενο όγκο έχουμε:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\alpha}^{\beta} (1 - g(y))^2 dy = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \eta\mu y)^2 dy \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\eta\mu y + \eta^2 y^2) dy \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - 2\eta\mu y + \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2y}{2}\right) dy \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2} - 2\eta\mu y - \frac{\sigma\upsilon\nu 2y}{2}\right) dy \\ &= \pi \left[\frac{3y}{2} + 2\sigma\upsilon\nu y - \frac{\eta\mu 2y}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi \left[\left(\frac{3\pi}{4} + 0 - 0 \right) - (0 + 2 - 0) \right] \\ &= \frac{\pi}{4} (3\pi - 8) \text{ κ.μ.} \end{aligned}$$



Άσκηση 24 (Σελ.140 σχολικού βιβλίου Β Τεύχος)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - x^2$. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται κατά την πλήρη στροφή του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα των τετμημένων γύρω από:

(α) τον άξονα των τεταγμένων

(β) από την ευθεία $x = -2$

Λύση

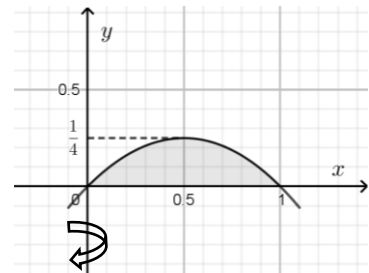
Θα χρειαστεί να λύσουμε την $y = x - x^2$ ως προς x . Έχουμε:

$$x^2 - x + y = 0 \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{1-4y}}{2} \quad \text{ή} \quad x = \frac{1-\sqrt{1-4y}}{2}, \quad y \leq \frac{1}{4}$$

Η $\frac{1+\sqrt{1-4y}}{2}$ αφορά τον κλάδο της παραβολής για $x \geq \frac{1}{2}$, ενώ η $\frac{1-\sqrt{1-4y}}{2}$ αφορά τον κλάδο της παραβολής για $x \leq \frac{1}{2}$.

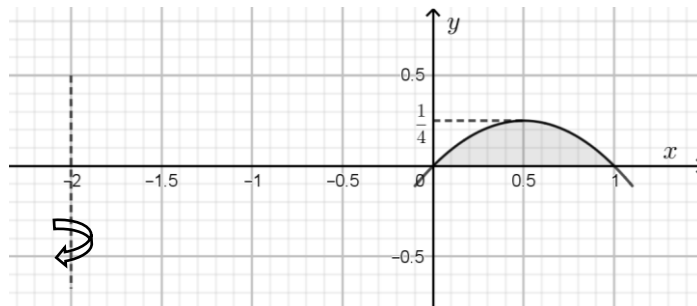
(α) Άρα για τον όγκο περιστροφής γύρω από τον άξονα των τεταγμένων, έχουμε:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{1}{4}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{1-4y}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{1-4y}}{2} \right)^2 \right) dy \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^{\frac{1}{4}} 4\sqrt{1-4y} dy = \pi \left[-\frac{\sqrt{(1-4y)^3}}{6} \right]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{\pi}{6} \text{ κ. μ.} \end{aligned}$$



(β) Με όμοιο τρόπο έχουμε:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{1}{4}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{1-4y}}{2} + 2 \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{1-4y}}{2} + 2 \right)^2 \right) dy \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^{\frac{1}{4}} 20\sqrt{1-4y} dy = 5\pi \left[-\frac{\sqrt{(1-4y)^3}}{6} \right]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{5\pi}{6} \text{ κ. μ.} \end{aligned}$$



Ασκήσεις

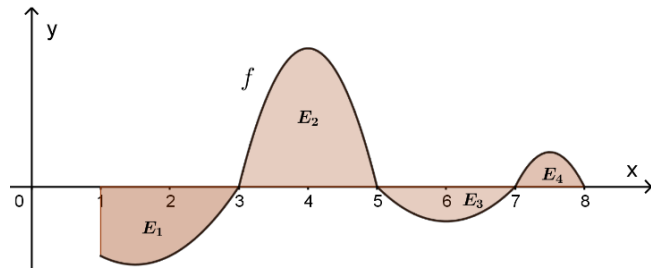
1. Στο διπλανό σχήμα τα σκιασμένα χωρία έχουν εμβαδά $E_1 = \frac{5}{3}$, $E_2 = 3$, $E_3 = \frac{2}{3}$ και E_4 .

Να υπολογίσετε:

(α) τα ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int_1^5 f(x)dx \text{ και } I_2 = \int_7^1 f(x)dx$$

(β) το εμβαδόν του χωρίου E_4 αν $\int_1^8 f(x)dx = \frac{7}{6}$



2. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα των τετμημένων του χωρίου που περικλείεται από:

(α) την καμπύλη $y^2 = 9x$ και την ευθεία $y = x + 2$

(β) τις καμπύλες $y = \sqrt{12 - x^2}$, $y = \sqrt{x}$ και τον άξονα των τεταγμένων

3. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα των τεταγμένων του χωρίου που περικλείεται από:

(α) την καμπύλη $y = \tan x$, την ευθεία $y = \frac{\pi}{3}$ και τον άξονα των τεταγμένων

(β) τις καμπύλες $y = \frac{1}{x}$, $x > 0$, $x = \sqrt{y}$, $y \geq 0$ και τις ευθείες $x = 0$, $y = 2$

(γ) την καμπύλη $y^2 = 4x$, την εφαπτομένη της στο $A(1, 2)$ και τον άξονα των τεταγμένων

4. Δίνεται η καμπύλη $y = \sqrt{x}$ και το σημείο της $A(\alpha, \sqrt{\alpha})$, $\alpha > 0$.

Το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη, την κάθετή της στο A και τον άξονα των τετμημένων περιστρέφεται πλήρως γύρω από τον άξονα των τετμημένων δημιουργώντας στερεό όγκου $\frac{2\pi}{3}$ κυβικές μονάδες. Να βρείτε την τιμή του α .

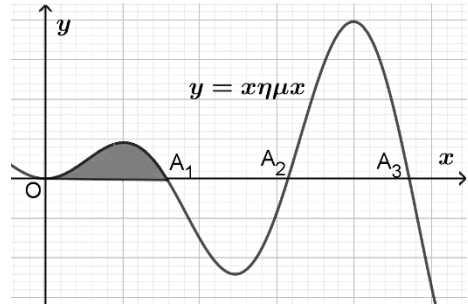
5. (α) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = \varepsilon\varphi\theta$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$$

(β) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα των τετμημένων του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = \frac{x}{1+x^2}$, τον άξονα των τετμημένων και την ευθεία $x = 1$.

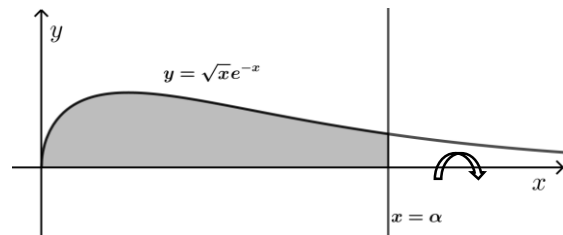
6. Το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες $y = \ln x$ και $y = \ln \frac{1}{x}$ περιστρέφεται πλήρως γύρω από τον άξονα των τεταγμένων. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται.

7. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης με εξίσωση. Η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία O, A_1, A_2, A_3 , κ.ο.κ. Το σκιασμένο μέρος που περικλείεται από την καμπύλη και το τμήμα OA_1 του άξονα των τετμημένων περιστρέφεται πλήρως γύρω από τον άξονα των τετμημένων. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται.



8. Δίνεται η καμπύλη $(C): y = x^3$ και σημείο $B(\kappa, 0)$ με $\kappa > 0$. Από το σημείο B φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $y'y$ η οποία τέμνει την καμπύλη στο σημείο A .
- (α) Να δείξετε ότι η καμπύλη (C) χωρίζει το $\triangle OAB$ (O η αρχή) σε δύο ισεμβαδικά χωρία.
- (β) Έστω T το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη (C) , την ευθεία AB και τον άξονα των τετμημένων. Το χωρίο T όταν περιστραφεί πλήρως γύρω από τον άξονα των τετμημένων δημιουργεί στερεό με όγκο V_x , ενώ όταν περιστραφεί πλήρως γύρω από τον άξονα των τεταγμένων δημιουργεί στερεό με όγκο V_y . Αν $\frac{V_x}{V_y} = \frac{10}{7}$, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A .

9. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της καμπύλης $y = \sqrt{x}e^{-x}$, $x \geq 0$. Το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη τον άξονα των τετμημένων και την ευθεία $x = \alpha$, $\alpha > 0$, περιστρέφεται κατά 2π γύρω από τον άξονα των τετμημένων.



- (α) Να δείξετε ότι ο όγκος του παραγόμενου στερεού δίνεται από τη σχέση:

$$V(\alpha) = \frac{1}{4}(-2\alpha e^{-2\alpha} - e^{-2\alpha} + 1)$$

- (β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} V(\alpha)$.

10. Δίνονται η παραβολή $(c): y = 4 - x^2$ και η ευθεία $(\varepsilon): y = x + 2$.

- (α) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των (c) και (ε) .
- (β) Αν το πιο πάνω χωρίο περιστραφεί πλήρως γύρω από την ευθεία $y = 5$, να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται.

11. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται, όταν το χωρίο που περικλείεται από τις $y = x^2 + 2$ και $y = x + 2$ περιστραφεί πλήρως γύρω από την ευθεία $y = 1$.

12. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = x^2$ και $y = x^3$:

- (α) γύρω από τον άξονα των τετμημένων
(β) γύρω από την ευθεία $x = 1$