

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ_ΕΝΟΤΗΤΑ 9: ΣΥΝΟΛΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (Δ' ΤΕΥΧΟΣ)

ΕΝΟΤΗΤΑ 9

ΣΥΝΟΛΑ

Οι μαθητές μας, μπορούν να διαβάσουν από το πιο πάνω σχολικό εγχειρίδιο και να λύσουν πρώτα τα ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ και τις δραστηριότητες που αντιστοιχούν στις παραγράφους (9.1, 9.2, 9.3), βασιζόμενοι στα λυμένα παραδείγματα του βιβλίου. Συνοπτική περιγραφή της ύλης υπάρχει στον Οδηγό Παγκυπρίων Εξετάσεων 2020, που αναρτήθηκε. Πολύ χρήσιμη αναφορά για το θεωρητικό πλαίσιο με κατάλληλα παραδείγματα είναι το Αναλυτικό Πρόγραμμα με σχετική αναφορά στους Δείκτες Επιτυχίας Επάρκειας (ΔΕΕ). Σχετικές ασκήσεις μπορούν να βρουν και στα θέματα Παγκυπρίων Εξετάσεων προηγούμενων ετών, τα οποία βρίσκονται αναρτημένα στην ιστοσελίδα της Υπηρεσίας Εξετάσεων.

- Από το σχολικό εγχειρίδιο, τεύχος Δ', **Ενότητα 9 – ΣΥΝΟΛΑ** το οποίο βρίσκεται και αναρτημένο στην ηλεκτρονική διεύθυνση

<http://mathm.schools.ac.cy/index.php/el/yliko/didaktiko-yliko>

9.1 Επανάληψη στα σύνολα

9.2 Ιδιότητες πράξεων συνόλων

9.3 Αρχή Εγκλεισμού – Αποκλεισμού

Ακολουθούν ενδεικτικά παραδείγματα και Ασκήσεις

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ_ΕΝΟΤΗΤΑ 9: ΣΥΝΟΛΑ

ΣΥΝΟΛΑ

Παράδειγμα 1:

Να δώσετε παραδείγματα συνόλων με διαφορετικές αναπαραστάσεις

Λύση:

- ✓ Ένα σύνολο μπορούμε να το ορίσουμε με **καταγραφή των στοιχείων** του, π.χ. $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, ή
- ✓ με την **περιγραφή της χαρακτηριστικής ιδιότητας** των στοιχείων του, π.χ. $A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ άρτιος}\}$, ή ακόμη
- ✓ ως **αποτέλεσμα πράξεων σε σύνολα**. Για παράδειγμα αν $A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ άρτιος}\}$ και $B = \{y \in \mathbb{R} : 1 < y < 8\}$ το σύνολο που προκύπτει από τα κοινά στοιχεία των A, B είναι ένα άλλο σύνολο το $\Gamma = \{2, 4, 6\}$, που είναι η γνωστή μας τομή των δύο συνόλων.
- ✓ Σε ένα σύνολο **δεν επαναλαμβάνουμε** στοιχεία του, π.χ. γράφουμε $\{1, 2, 3\}$ και όχι $\{1, 1, 2, 2, 2, 3\}$ και **δεν ενδιαφέρει η διάταξη** των στοιχείων του, δηλαδή το σύνολο $\{3, 1, 2\}$ είναι ακριβώς το ίδιο με το $\{1, 2, 3\}$.

Παράδειγμα 2:

- (α) Ποιος είναι ο πληθικός αριθμός του κενού συνόλου;
(β) Πότε χαρακτηρίζεται ένα σύνολο πεπερασμένο και πότε άπειρο;

Λύση:

- (α) Το κενό σύνολο δεν περιέχει στοιχεία. Επομένως για το κενό σύνολο έχουμε $n(\emptyset) = 0$
- (β) Αν για ένα σύνολο A ισχύει: $n(A) = \kappa$, $\kappa \in \mathbb{N}$ το σύνολο A χαρακτηρίζεται ως **πεπερασμένο**, ενώ αντίθετα, για ένα σύνολο B με $n(B) = \infty$, το σύνολο B χαρακτηρίζεται ως **άπειρο σύνολο**.

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ_ΕΝΟΤΗΤΑ 9: ΣΥΝΟΛΑ

Παράδειγμα 3:

Δίνονται τα σύνολα $A = \{3, 6, 9, 12, \dots, 96, 99\}$, $B = \{0\}$ και $\Gamma = \emptyset$

Να βρείτε το πληθικό αριθμό των πιο πάνω συνόλων και να ορίσετε ένα σύνολο Δ το οποίο να είναι άπειρο σύνολο.

Λύση:

Παρατηρούμε ότι το σύνολο A έχει 33 στοιχεία, γιατί $3 \cdot 33 = 99$ και επομένως $n(A) = 33$. Το σύνολο B είναι μονομελές, έχει ένα στοιχείο τον αριθμό 0 και το σύνολο Γ είναι το κενό σύνολο και συνεπώς $n(B) = 1$ και $n(\Gamma) = 0$, αντίστοιχα.

Ένα άπειρο σύνολο είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, ή το σύνολο $\Delta = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$.

Προσδιορισμός Συνόλου

Ένα σύνολο μπορεί να προσδιοριστεί όταν είμαστε στη θέση να δηλώνουμε όλα τα στοιχεία του, οπότε και τα καταγράφουμε μεταξύ δύο αγκίστρων.

Για παράδειγμα το σύνολο $\{5, 10, 15\}$ είναι πλήρως προσδιορισμένο, καθώς και τα γνωστά μας αριθμοσύνολα:

Φυσικοί Αριθμοί: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Ακέραιοι Αριθμοί: $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$.

Ένα σύνολο μπορεί επίσης να προσδιοριστεί, όταν μία ιδιότητα P αναφέρεται στα στοιχεία ενός συγκεκριμένου συνόλου. Συμβολικά θα γράφαμε για ένα σύνολο Σ του οποίου όλα τα στοιχεία έχουν την κοινή ιδιότητα P στο σύνολο:

$\{x \in \Sigma \text{ και } x \text{ έχει την ιδιότητα } P\}$ και διαβάζεται: «το σύνολο με στοιχεία x που έχουν την ιδιότητα P ». Για παράδειγμα, όταν αναφερόμαστε με περιγραφή, στο σύνολο:

«οι φυσικοί αριθμοί που είναι μικρότεροι του 6» θα μπορούσαμε να το αναπαραστήσουμε και συμβολικά: $\{x \in \mathbb{N} : x < 6\}$.

Επίσης τα σύνολα:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 = 25\} = \{-5, 5\}, \text{ ή } B = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 = -25\} = \{ \}.$$

Όπως φαίνεται από το τελευταίο παράδειγμα, το σύνολο B δεν έχει καθόλου στοιχεία. Είναι δηλαδή το κενό σύνολο που συμβολίζεται επίσης και με $\emptyset$, ή $\{ \}$.

Για παράδειγμα το σύνολο $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 = 5\} = \{ \}$, είναι επίσης κενό.

Παράδειγμα 4 :

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ_ΕΝΟΤΗΤΑ 9: ΣΥΝΟΛΑ

Να γράψετε με αναγραφή τα στοιχεία των πιο κάτω συνόλων

$$(\alpha) A = \{x \in \mathbb{Z}: |x| = 8\}$$

$$(\beta) B = \{x \in \mathbb{Z}: x^2 = 8\}$$

$$(\gamma) \Gamma = \{x \in \mathbb{Z}: |x| = x\}$$

$$(\delta) \Delta = \{x \in \mathbb{Z}: \text{το } x \text{ είναι τετράγωνο ακέραιου} < 120\}$$

Λύση:

$$(\alpha) A = \{x \in \mathbb{Z}: |x| = 8\} = \{-8, +8\}.$$

$$(\beta) B = \{x \in \mathbb{Z}: x^2 = 8\} = \{\} \text{ (κενό σύνολο)}$$

$$(\gamma) \Gamma = \{x \in \mathbb{Z}: |x| = x\} = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

$$(\delta) \Delta = \{x \in \mathbb{Z}: \text{το } x \text{ είναι τετράγωνο ακέραιου} < 50\} = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}$$

3.1.1 Υποσύνολα συνόλων

Σε αρκετές περιπτώσεις κάποια σύνολα έχουν στοιχεία τα οποία ανήκουν επίσης και σε άλλα σύνολα. Για παράδειγμα όλα τα στοιχεία του γνωστού μας συνόλου των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ περιέχονται στο σύνολο των ακέραιων αριθμών $\mathbb{Z}$.

Ορισμός:

Το σύνολο A είναι **υποσύνολο** του B , τότε και μόνο τότε αν η συνθήκη $x \in A$ συνεπάγεται $x \in B$ και συμβολίζουμε $A \subseteq B$.

Συμβολικά γράφουμε:

$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$ και διαβάζουμε ότι το A **περιέχεται (ή εγκλείεται)** στο B

Όταν ένα σύνολο A είναι υποσύνολο του B και ισχύει ότι $A \neq B$, τότε το σύνολο A είναι **γνήσιο υποσύνολο** του B και συμβολίζουμε $A \subset B$. Για παράδειγμα το σύνολο των περιττών φυσικών αριθμών $P = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ είναι γνήσιο υποσύνολο των φυσικών αριθμών: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

Το **κενό σύνολο** $\emptyset$ είναι υποσύνολο οποιουδήποτε συνόλου.

Ιδιότητες της σχέσης εγκλεισμού ($\subseteq$)

- (α) $A \subseteq A$ για κάθε σύνολο A (**Ανακλαστική ιδιότητα**).
- (β) $A \subseteq B$ και $B \subseteq A \Rightarrow A = B$ (**Αντισυμμετρική Ιδιότητα**)
- (γ) $(A \subseteq B \text{ και } B \subseteq \Gamma) \Rightarrow A \subseteq \Gamma$ (**Μεταβατική Ιδιότητα**)

Σχόλια

- ✓ Η σχέση $\subset$ του **γνήσιου εγκλεισμού** ικανοποιεί μόνο τη μεταβατική ιδιότητα. Ισχύει δηλαδή ότι: $(A \subset B \text{ και } B \subset \Gamma) \Rightarrow A \subset \Gamma$
- ✓ Για τα βασικά Αριθμοσύνολα $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ και $\mathbb{R}$ ισχύει: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- ✓ Για ένα σύνολο A , το σύνολο **που περιέχει όλα τα υποσύνολα του A** , λέγεται **δυναμοσύνολο** και συμβολίζεται με $P(A)$. Ισχύει ότι $P(A) = \{X : X \subseteq A\}$. Δηλαδή το δυναμοσύνολο ενός συνόλου A είναι σύνολο το οποίο έχει ως στοιχεία σύνολα τα οποία είναι υποσύνολα του A .

Αν το σύνολο A έχει n στοιχεία, τότε το δυναμοσύνολο του A έχει 2^n στοιχεία.

Για παράδειγμα, το σύνολο $A = \{1, 2\}$ τότε το δυναμοσύνολο του A είναι το σύνολο $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, A\}$ και ισχύει $n(A) = 2$ και $n(P(A)) = 2^2 = 4$.

Για το σύνολο $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ με $n(A) = 3$ ισχύει $n(P(B)) = 2^3 = 8$.

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ_ΕΝΟΤΗΤΑ 9: ΣΥΝΟΛΑ

Παράδειγμα 5:

Δίνονται τα σύνολα $A = \{0, 3, 2\alpha, 2\alpha + 1\}$ και $B = \{0, 3, 4, 6, 7, 9\}$.

Να υπολογίσετε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{N}$ έτσι, ώστε $A \subseteq B$.

Λύση

Αν $\alpha \in \mathbb{N}$, οι πιθανές τιμές για το 2α είναι το 4 και το 6.

Έτσι έχουμε $2\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = 2$. Σε αυτή την περίπτωση το σύνολο A είναι $A = \{0, 3, 4, 5\}$ που δεν είναι υποσύνολο του B .

Αν $2\alpha = 6 \Rightarrow \alpha = 3$ και το σύνολο A είναι $A = \{0, 3, 6, 7\} \subseteq B$.

Επομένως για $\alpha = 3$ έχουμε $A \subseteq B$.

3.1.2 Ίσα σύνολα

Ορισμός

Δύο σύνολα A και B λέγονται **ίσα**, $A = B$, όταν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία.

Γενικά ισχύει: $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ και $B \subseteq A$.

Για παράδειγμα, τα σύνολα $A = \{2, 5\}$ και $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 7x = 14\}$ είναι ίσα.

Ιδιότητες Ισότητας Συνόλων:

(α) $A = A$ για κάθε σύνολο A (**Ανακλαστική ιδιότητα**).

(β) $A = B \Rightarrow B = A$ (**Συμμετρική Ιδιότητα**)

(γ) $(A = B \text{ και } B = \Gamma) \Rightarrow A = \Gamma$ (**Μεταβατική Ιδιότητα**)

Παράδειγμα 6:

Δίνεται το σύνολο αναφοράς $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ και τα υποσύνολά του $A = \{1, 2, 12, \kappa, \lambda, \mu\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : \frac{12}{x} \in \mathbb{N}\}$. Να υπολογίσετε τις τιμές των κ, λ, μ ώστε

Λύση:

Ο αριθμός $\frac{12}{x}$ είναι φυσικός όταν το x παίρνει τις τιμές 1, 2, 3, 4, 6 και 12. Για αυτές τις τιμές του x το σύνολο B είναι $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

Έτσι, $A = B$, όταν $\{\kappa, \lambda, \mu\} = \{3, 4, 6\}$.

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ_ΕΝΟΤΗΤΑ 9: ΣΥΝΟΛΑ

Παράδειγμα 7:

Να γράψετε όλα τα υποσύνολα του συνόλου $A = \{1,2,3\}$ και να αναφέρετε πώς ονομάζεται το σύνολο που έχει ως στοιχεία του, όλα τα υποσύνολά του A .

Λύση:

Τα υποσύνολα του συνόλου A είναι

$$A_1 = \{1,2,3\}, A_2 = \{1,2\}, A_3 = \{2,3\}, A_4 = \{3,4\}, A_5 = \{1\}, A_6 = \{2\}, A_7 = \{3\}, A_8 = \emptyset.$$

Το σύνολο που έχει ως στοιχεία όλα τα υποσύνολα του A λέγεται δυναμοσύνολο του A

Παράδειγμα 8:

Να αποδείξετε ότι αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$ τότε $A \subseteq \Gamma$

Λύση:

Έστω $x \in A$. Θα αποδείξουμε ότι $x \in \Gamma$.

Αφού $x \in A$, τότε ισχύει ότι $x \in B$, γιατί $A \subseteq B$.

Αφού $x \in B$, τότε ισχύει ότι $x \in \Gamma$, γιατί $B \subseteq \Gamma$.

Συνεπώς, ισχύει ότι $A \subseteq \Gamma$.

Παράδειγμα 9:

Το σύνολο A περιέχει τους φυσικούς αριθμούς που είναι πολλαπλάσια του 2 και το σύνολο B περιέχει τους φυσικούς αριθμούς που είναι πολλαπλάσια του 5.

Να ορίσετε το σύνολο $A \cap B$.

Λύση:

Το σύνολο $A \cap B$ περιέχει τους φυσικούς αριθμούς που είναι πολλαπλάσια του 2 και του 5. Συνεπώς, το σύνολο $A \cap B$ περιέχει τους φυσικούς αριθμούς που είναι πολλαπλάσια του 10.

Παράδειγμα 10:

Να αποδείξετε ότι η πράξη της ένωσης είναι επιμεριστική ως προς την πράξη της τομής.

Λύση

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι : $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$

Έστω $x \in A \cup (B \cap \Gamma) \Leftrightarrow$

$$x \in A \vee x \in B \cap \Gamma \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in \Gamma) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in \Gamma) \Leftrightarrow$$

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ_ΕΝΟΤΗΤΑ 9: ΣΥΝΟΛΑ

$x \in A \cup B$ και $x \in A \cup \Gamma \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$.

Επομένως, $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$.

Ισχύουν οι ισοδυναμίες: $x \in A' \Leftrightarrow x \notin A$ και $x \in A \Leftrightarrow x \notin A'$

Ένα στοιχείο του συνόλου αναφοράς Ω είτε θα ανήκει στο A είτε δεν θα ανήκει στο A και επομένως ισχύει ότι $A \cup A' = \Omega$.

Δεν υπάρχει στοιχείο του συνόλου αναφοράς Ω τέτοιο ώστε να ανήκει στο A και συγχρόνως να μην ανήκει στο A και επομένως ισχύει ότι $A \cap A' = \emptyset$.

Αν ένα στοιχείο του συνόλου αναφοράς Ω που δεν ανήκει στο συμπλήρωμα του συνόλου A , τότε ανήκει στο A και αντίστροφα και επομένως ισχύει ότι $(A')' = A$. Βασικές σχέσεις σε δύο σύνολα που συνδέουν τις πράξεις της ένωσης τομής και συμπληρώματος είναι γνωστές ως τύποι του De Morgan.

Πρόταση:

«Τύποι De Morgan

$$(\alpha) (A \cap B)' = A' \cup B'.$$

$$(\beta) (A \cup B)' = A' \cap B'.$$

Απόδειξη

(α) Θα δείξουμε την ισότητα των δύο συνόλων: $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Έστω $x \in (A \cap B)' \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A$, ή $x \notin B \Leftrightarrow x \in A'$, ή $x \in B' \Leftrightarrow x \in A' \cup B'$.

Επομένως $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

(β) Θα δείξουμε την ισότητα των δύο συνόλων $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

Έστω $x \in (A \cup B)' \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A$, και $x \notin B \Leftrightarrow x \in A'$, και $x \in B' \Leftrightarrow x \in A' \cap B'$.

Επομένως $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

Παράδειγμα 11:

Δίνεται το σύνολο αναφοράς $\Omega = \{2,4,6,8,10,12\}$ και τα σύνολα $A = \{2,8,10\}$ και $B = \{2,6,10,12\}$. Να επαληθεύσετε ότι ισχύει: $A' \cap B' = (A \cup B)'$

Λύση:

Παρατηρούμε ότι $A' = \{4,6,12\}$ και $B' = \{4,8\}$ και επομένως $A' \cap B' = \{4\}$.

Ισχύει ότι $A \cup B = \{2,6,8,10,12\}$ και επομένως $(A \cup B)' = \{4\}$.

Συνεπώς, ισχύει ότι $A' \cap B' = (A \cup B)'$.

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ_ΕΝΟΤΗΤΑ 9: ΣΥΝΟΛΑ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΜΠΕΔΩΣΗΣ

1. Δίνονται τα σύνολα:

$$\Omega = \{x \in \mathbb{Z} : -4 \leq x < 3\}, A = \{x \in \Omega : x \text{ άρτιος}\}, B = \{x \in \Omega : x \text{ πολλαπλάσιο του } 3\}$$

(α) Να παραστήσετε τα πιο πάνω σύνολα με αναγραφή των στοιχείων τους.

(β) Να παραστήσετε τα πιο πάνω σύνολα στο ίδιο διάγραμμα και να προσδιορίσετε τα σύνολα:

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A', \quad A - B, \quad A \cap B'$$

2. Αν $\Omega = \mathbb{R}$, $A = \{x \in \mathbb{R} : x \in (-\infty, 5]\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x \in (-1, 8)\}$, να βρείτε τα σύνολα:

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A', \quad A - B, \quad A \cap B', \quad A' \cap B'$$

3. Να χαρακτηρίσετε **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** την καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις αιτιολογώντας την απάντησή σας.:

(α) Τα σύνολα $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 16\}$ και $B = \{-4, +4\}$ είναι μεταξύ τους ίσα.
ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ.

(β) Το σύνολο των φυσικών αριθμών ($\mathbb{N}$) είναι γνήσιο υποσύνολο του συνόλου των ακεραιών αριθμών ($\mathbb{Z}$).
ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ.

(γ) Το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R} : x^3 + 8 = 0\}$ είναι κενό.
ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

(δ) Αν $A = \{2, 3, 5\}$, $B = \{4, 6, 10\}$ τότε: $A \subseteq B$
ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

(ε) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{N}$
ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

(στ) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 0\} \neq \emptyset$
ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

(ζ) Αν $n(A) = 3$, $n(B) = 7$, $n(A \cup B) = 8$ τότε $n(B \cap A') = 5$ ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

(η) Αν $A \subseteq B$ τότε ισχύει $B' \subseteq A'$
ΣΩΣΤΟ/ΛΑΘΟΣ

(θ) Αν $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{10, 20, 30\}$ τότε $n(A) < n(B)$

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ_ΕΝΟΤΗΤΑ 9: ΣΥΝΟΛΑ

4. Να αντιστοιχίσετε σε κάθε σύνολο της πρώτης στήλης το ίσο σύνολο από την δεύτερη στήλη:

(α) $\{x \in \mathbb{R}: x^2 \leq 9\}$	1. $\{1, 2\}$
(β) $\{x \in \mathbb{R}: x^2 = -100\}$	2. $\{-1, 0, +1\}$
(γ) $\{x \in \mathbb{R}: x^2 \leq 0\}$	3. $\emptyset$
(δ) $\{x \in \mathbb{Z}: x^2 \leq 1\}$	4. $[-3, +3]$
(ε) $\{x \in \mathbb{N}: 0 < x < 3\}$	5. $\{0, -1\}$
(στ) $\{x \in \mathbb{R}: x^2 = -x\}$	6. $\{0\}$
(ζ) $\{x \in \mathbb{Q}: x^2 = 2\}$	7. $\{\emptyset\}$
	8. $(-\infty, +3]$
	9. $\{-3, +3\}$
	10. $\{-10, +10\}$

5. Αν ισχύει $n(A) = 10, n(B) = 20$ και $n(A \cap B) = 5$, να υπολογίσετε τους πληθικούς αριθμούς των συνόλων: $A \cup B, A' \cap B$ και $B - A$.
6. Αν ισχύει $n(\Omega) = 22, n(A' \cap B') = 7, n(A \cap B') = 6$ και $n(A' \cap B) = 4$, να υπολογίσετε τους πληθικούς αριθμούς των συνόλων: A, B και $A' \cup B'$.
7. Αν $A \subseteq B \subseteq \Omega$ να αποδείξετε ότι $B' \subseteq A'$.
8. Αν για δύο σύνολα A, B ισχύει $A \cap B' = A' \cap B$, τι συμπεραίνετε για τα σύνολα A και B ;
9. Δίνονται τα σύνολα $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ και $B = \{1, 2, 5, 8, 9\}$.
 (α) Να βρείτε το σύνολο $A' \cup B$
 (β) Να δείξετε ότι $A' \cup B = (A \cap B')'$
 (γ) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε δύο σύνολα A και B ισχύει η σχέση $A' \cup B = (A \cap B')'$.
10. Σε μία τάξη των 20 μαθητών οι εννέα μαθητές φοράνε γυαλιά μυωπίας, πέντε μαθητές είναι αριστερόχειρες και τρεις μαθητές είναι και αριστερόχειρες και φοράνε γυαλιά μυωπίας. Πόσοι από τους μαθητές της συγκεκριμένης τάξης δεν φοράνε γυαλιά μυωπίας και ούτε είναι αριστερόχειρες;
11. Πόσοι από τους φυσικούς αριθμούς από το 1 μέχρι και το 100:
 (α) Διαιρούνται και με το 3 και με το 5.

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ_ΕΝΟΤΗΤΑ 9: ΣΥΝΟΛΑ

(β) Δεν διαιρούνται, ούτε με το 3, ούτε με το 5 ούτε με το 7.

12. Από μια ομάδα των 30 μαθητών, έχουμε:

- ✓ 14 κάνουν Αγγλικά
- ✓ 13 κάνουν Γαλλικά
- ✓ 12 κάνουν Ισπανικά
- ✓ πέντε κάνουν και Αγγλικά και Γαλλικά
- ✓ τρεις κάνουν και Αγγλικά και Ισπανικά
- ✓ έξι κάνουν Γαλλικά και Ισπανικά
- ✓ δύο κάνουν και από τις τρεις γλώσσες.

Να υπολογίσετε πόσοι από τους μαθητές αυτής της ομάδας:

- (α) Κάνουν μόνο Αγγλικά
- (β) Κάνουν Αγγλικά και Γαλλικά, αλλά όχι Ισπανικά
- (γ) Δεν κάνουν καμία από τις τρεις γλώσσες.

13. Αν $A, B, \Gamma \subseteq \Omega$ να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$(A - B) - \Gamma = (A - \Gamma) - (B - \Gamma)$$