

Υ' μέρος

Ανάλυση

222

Ταξινομημένες ασκήσεις για λύση

Ολοκληρώματα

&

Γενικές Ασκήσεις



Ταξη: Γ Γενικού Λυκείου
Μαθηματικά προσανατολισμού Θετικών Σπουδών & οικονομίας και πληροφορικής
Μέρος Γ: Ολοκληρωτικός Λογισμός
Έκδοση 16.07

Η συλλογή αυτή διανέμεται δωρεάν σε ψηφιακή μορφή μέσω διαδικτύου
προορίζεται για σχολική χρήση και είναι ελεύθερη για αξιοποίηση
αρκεί να μην αλλάξει η μορφή της

Μίλτος Παπαγρηγοράκης
Μαθηματικός M.Ed.
Χανιά 2016

3

ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

3.01 Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(2+e) = 2$ έχει την ιδιότητα $f'(2x+e^x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι $f(1) = 0$.

3.02 Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και F μια αρχική της f στο $\mathbb{R}$. Αν $f(1) = 1$ και $f(x) \cdot F(2-x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε
Να βρείτε τον τύπο της f

3.03 * Έστω F μια αρχική της συνεχούς συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με την ιδιότητα:
 $F^2(x) \leq F(x)F(\alpha-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $\alpha \neq 0$.
Να αποδειχθεί ότι: Α) $F(0) = F(\alpha)$,
Β) η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει
μια τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.

3.04 Βρείτε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αν ισχύει
 $f'(x) - f(x) = e^{-2x} \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$

3.05 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και F μια παράγουσά της στο $\mathbb{R}$. Αν $F''(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$ και $F(x) = F(2-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$

3.06 Να βρείτε τις αρχικές συναρτήσεις της συνάρτησης $f(x) = 2|x| + 1$ με $x \in \mathbb{R}$

3.07 Να βρείτε μια αρχική της συνάρτησης
$$f(x) = \begin{cases} \ln x + e, & x \geq 1 \\ e^x, & x < 1 \end{cases}$$

3.08 Αν η συνάρτηση f με την ιδιότητα $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ έχει αρχική, τότε αυτή είναι της μορφής $f(x) = cx$ $x \in \mathbb{R}$

3.09 Στη δεκαετία του 1980 ο παγκόσμιος ρυθμός κατανάλωσης πετρελαίου σε εκατομμύρια βαρέλια ετησίως δινόταν από τον τύπο $R(t) = ke^{(\ln 2)t}$, όπου t είναι ο αριθμός των ετών μετά το 1980. Στις αρχές του 1980 ο ρυθμός ήταν 14 εκατ. βαρέλια τον χρόνο. Να βρείτε:
Α) την παγκόσμια κατανάλωση πετρελαίου t χρόνια μετά το 1980,
Β) σε πόσα εκατομμύρια βαρέλια ανερχόταν η παγκόσμια κατανάλωση πετρελαίου κατά τη περίοδο 1980-1990. ($\ln 2 \approx 0,7$)

3.10 Μια εταιρεία έχει διαπιστώσει ότι το οριακό κόστος λειτουργίας της είναι $0,015x^2 - 2x + 80$ δολάρια την ημέρα, όπου x είναι ο αριθμός των μονάδων προϊόντος που παράγονται ημερησίως. Αν η εταιρεία έχει πάγια έξοδα 1000 δολάρια την ημέρα, να βρείτε:
Α) το ημερήσιο κόστος παραγωγής x μονάδων προϊόντος,
Β) την αύξηση του κόστους, αν αντί 30 μονάδων παραχθούν 60 μονάδες προϊόντος σε μια ημέρα.

3.11 Νερό φεύγει από την βρύση έτσι ώστε t min μετά το άνοιγμα της βρύσης να χύνεται με ρυθμό $8t + 5$ dm³/min. Πόσο νερό έφυγε κατά την διάρκεια των τριών πρώτων λεπτών;

3.12 Ένα κινητό κινείται πάνω σε άξονα και η ταχύτητά του σε cm/sec τη χρονική στιγμή t δίνεται από τον τύπο $v(t) = t(t+2)$. Αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ το κινητό βρίσκεται σε απόσταση 2cm από την αρχή των αξόνων, να βρεθεί η θέση του τη στιγμή $t = 3$

ΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

3.13 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει ότι $\int_0^{-3} f(x) dx = 2$, $\int_4^{-3} f(x) dx = -1$ και

$$\int_4^{10} f(x) dx = 5 \text{ να υπολογίσετε τα: } \int_{-3}^0 f(u) du, \int_0^4 f(x) dx, \int_0^{10} f(x) dx$$

3.14 Αν $\int_1^2 f(x) dx = 5$, $\int_1^2 g(x) dx = -3$, βρείτε τα: Α) $\int_1^2 [2f(x) + 3g(x)] dx$ Β) $\int_2^1 [g(x) - 3f(x) + 5] dx$

3.15 Αποδείξτε ότι $\int_2^4 \frac{2x^2 + 5}{x^2 + 4} dx - 3 \int_4^2 \frac{1}{x^2 + 4} dx = 4$

3.16 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Για κάθε $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\gamma}^{\delta} f(x) dx \Rightarrow \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx = \int_{\beta}^{\delta} f(x) dx$$

3.17 Έστω ότι $\int_0^1 f(x) dx = 2$ και $\int_2^3 g(x) dx = 5$. Να υπολογίσετε το $\int_0^1 \left(\int_2^3 f(x) g(t) dt \right) dx$

3.18 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Για κάθε $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx \int_{\beta}^{\delta} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \int_{\delta}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\delta} f(x) dx \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx = 0$$

3.19 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Για κάθε $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\gamma}^{\delta} f(x) dx \Rightarrow \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx = \int_{\beta}^{\delta} f(x) dx$$

3.20 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Για κάθε $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{\gamma}^{\delta} f(t) e^{x^2} dx \right) dt = \int_{\gamma}^{\delta} \left(\int_{\alpha}^{\beta} f(t) e^{x^2} dt \right) dx$$

3.21 Έστω ότι $\int_0^1 f(x) dx = 2$ και $\int_2^3 g(x) dx = 5$. Να υπολογίσετε το $\int_0^1 \left(\int_2^3 f(x) g(t) dt \right) dx$



$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

3.22 Βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο των συναρτήσεων:

$$G(x) = \int_1^x x \ln t dt \quad K(x) = \int_1^{x^2+3x} t^2 \ln t dt$$

$$F(x) = \int_1^{\sqrt{x-1}} \frac{t^2}{\ln t - t} dt \quad N(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$$

3.23 Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο των συναρτήσεων:

$$M(x) = \int_{|x|}^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt \quad F(x) = \int_{-\pi}^{\pi} |t-x| dt, \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

$$H(x) = \int_{2x}^{x+1} \sqrt[5]{t^2 - 4t} dt, \quad G(x) = \int_{\sqrt{x}}^{4x} \frac{\ln(t+1)}{2t-1} dt$$

3.24 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, να βρείτε όπου υπάρχει την παράγωγο των συναρτήσεων

$$F(x) = \int_0^1 x f(x+t) dt \quad G(x) = \int_0^1 x^2 t f(xt) dt$$

$$H(x) = \int_1^2 f\left(\frac{x}{t}\right) dt \quad \text{με } x \in (0, +\infty)$$

3.25 Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της συνάρτησης

$$G(x) = \int_a^{\beta} x e^{t^2} dt \quad G(x) = \int_0^{\frac{1}{x}} x^2 e^t du$$

$$G(\omega) = \int_a^{\beta} x e^t dt \quad K(x) = x^2 \int_0^1 t \cdot \eta \mu^2(xt) dt$$

3.26 Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της

$$F(x) = \int_1^x \left(\int_2^y \left(\frac{1}{1+t^2 + \eta \mu^2 t} \right) dt \right) dy$$

3.27 Να αποδείξετε ότι:

$$\int_a^{\beta} e^{\sin(2\pi t)} dt = \int_{\alpha+1}^{\beta+1} e^{\sin(2\pi t)} dt, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

3.28 Να βρεθεί η $F'(x)$ αν

$$A) \quad F(x) = \left(\int_e^{\sqrt{x}} \ln t dt \right) \left(\int_1^{\ln x} e^t dt \right)$$

$$B) \quad F(x) = \int_{19}^x e^u du \sin^2 t dt + \int_{61}^x e^y dy \eta \mu^2 t dt$$

3.29 Αν f συνεχής στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι:

$$A) \quad \int_0^x \left(\int_0^t f(u) du \right) dt = \frac{1}{2} \int_0^x (x^2 - u^2) f(u) du$$

$$B) \quad \int_0^x f(u) (\eta \mu x - \eta \mu u) du = \int_0^x \left(\sin u \int_0^u f(t) dt \right) du$$

$$3.30 \quad \text{Υπολογίστε το } \int_0^1 \left(\int_1^x \frac{e^t - 1}{t} dt \right) dx$$

3.31 Να αποδειχτεί ότι αντιστρέφονται οι συναρτήσεις:

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2} dt \quad \text{και} \quad G(x) = \int_0^x \eta \mu^4 t^2 dt$$

3.32 Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση f ,

$$\text{συνεχής στο } \mathbb{R} \text{ ώστε να ισχύει: } \int_x^y f(t) dt = \frac{f(x)}{f(y)},$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}$$

ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

Α ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

3.33 A) $\int_0^1 (1-\sqrt{x})^2 dx$ B) $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x+2}} dx$ Γ) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu^3 x + \sigma\upsilon\nu^2 x - 2}{\eta\mu^2 x} dx$ Δ) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{6-x}}$

3.34 A) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx$ B) $\int_1^2 \frac{x^2 \sqrt{x} - x + 1}{x^2} dx$ Γ) $\int_1^2 \frac{x^3 - 2x + 5}{x} dx$ Δ) $\int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx$

3.35 A) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2 - 2x}} dx$ B) $\int_0^1 (2x-1)^2 dx$ Γ) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu^3 x + 4}{\eta\mu^2 x} dx$ Δ) $\int_2^3 \frac{x^3 - 1}{x-1} dx$

3.36 A) $\int_1^e \frac{1 - \ln x}{x^2} dx$ B) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x\eta\mu x + x^2 \sigma\upsilon\nu x) dx$ Γ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x (\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) dx$

3.37 A) $\int_1^e \frac{1-x}{e^x} dx$ B) $\int_1^4 \left(\frac{2^{x-1}}{\sqrt{x}} + 2^x \sqrt{x} \ln 2 \right) dx$ Γ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x - x \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x} dx$

ΣΥΝΘΕΣΗ $\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$ - με ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ: $u = g(x)$ ή

3.38 A) $\int_0^1 x(x^2+1)^3 dx$ B) $\int_0^1 4x(2x^2+3)^{12} dx$ Γ) $\int_e^{e^2} \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x} dx$ Δ) $\int_0^1 \sqrt[3]{3x+1} dx$

3.39 A) $\int_1^{\pi^2} \frac{3}{\sqrt{x} \sigma\upsilon\nu^2 \sqrt{x}} dx$ B) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}} dx$ Γ) $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+2} dx$ Δ) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt[3]{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x} dx$

3.40 A) $\int_0^1 \frac{1+\varepsilon\phi x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx$ B) $\int_0^1 \frac{e^{2x} + 7e^x + 6}{e^x + 3} dx$ Γ) $\int_{e^2}^{e^5} \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} dx$ Δ) $\int_0^1 e^{2^x + x \ln 2} dx$

3.41 A) $\int_0^1 \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}} dx$ B) $\int_0^1 \frac{1}{e^x \sqrt{1+e^{-x}}} dx$ Γ) $\int_0^1 \frac{\varepsilon\phi x}{\ln(\sigma\upsilon\nu x)} dx$ Δ) $\int_0^1 \sigma\phi x dx$

3.42 A) $\int_0^1 \frac{4x-5}{(x+2)^4} dx$ B) $\int_0^1 \frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ Γ) $\int_1^e \frac{\sigma\upsilon\nu(\ln x)}{x} dx$ Δ) $\int_0^1 e^{x+e^x} dx$

3.43 A) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\ln(\varepsilon\phi x)}{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x} dx$ B) $\int_1^{\pi} \frac{\eta\mu \frac{1}{x}}{x^2} dx$ Γ) $\int_0^1 x e^{3-x^2} dx$ Δ) $\int_0^1 \frac{\varepsilon\phi x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx$



ΜΟΡΦΗ: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x, \ln x) dx$ Τότε θέτω: $u = \ln x$

3.44 A) $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$ B) $\int_e^{2e} \frac{1}{x \ln x} dx$ Γ) $\int_1^e \frac{\ln x + 1}{x} dx$ Δ) $\int_1^e \frac{(1 - \ln x)^2}{x} dx$ Ε) $\int_1^e \frac{\sqrt[3]{1 + \ln x}}{x} dx$

ΜΟΡΦΗ: $\int_{\alpha}^{\beta} f(\eta \mu x) \sigma \upsilon \nu x dx$ ή $\int_{\alpha}^{\beta} f(\sigma \upsilon \nu x) \eta \mu x dx$ Τότε θέτω $u = \eta \mu x$ ή $u = \sigma \upsilon \nu x$ αντίστοιχα

3.45 A) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta \mu x}{1 - \sigma \upsilon \nu^2 x} dx$ B) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \eta \mu x \sqrt{1 - \sigma \upsilon \nu x} dx$ Γ) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(1 + \eta \mu x) \sigma \upsilon \nu x}{2 + \eta \mu x} dx$ Δ) $\int_0^1 \sigma \upsilon \nu^3 x dx$

ΜΟΡΦΗ: $\int_{\kappa}^{\lambda} f(P(x), (ax + \beta)^v) dx$ όπου v Ρητός, $P(x)$ πολυώνυμο Τότε θέτω $u = ax + \beta$,

3.46 A) $\int_0^1 x^2 (2x - 1)^{\frac{7}{3}} dx$ B) $\int_0^1 \frac{2x^2 + 3}{(3x + 1)^2} dx$ Γ) $\int_0^1 (x - 2) \sqrt{3x + 1} dx$ Δ) $\int_0^1 (x - 2)^2 (2x + 1)^3 dx$

ΡΗΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

A Περίπτωση: βαθμός $P(x) <$ βαθμός $Q(x)$. Ελέγχω πρώτα μήπως ο αριθμητής είναι η παράγωγος του παρονομαστή

δηλαδή αν $Q'(x) = P(x)$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{Q'(x)}{Q(x)} dx = [\ln(Q(x))]_{\alpha}^{\beta} = \ln(Q(\beta)) - \ln(Q(\alpha)) = \int \frac{Q'(x)}{Q(x)} dx = \ln|Q(x)| + c$

ΜΟΡΦΗ: $\int_{\mu}^{\nu} \frac{\kappa x + \lambda}{ax^2 + \beta x + \gamma} dx$, με $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$. Τότε εργαζόμαστε όπως στο παράδειγμα:

3.47 Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2-5x+6} dx$.

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-5x+6}$ έχει $A_f = \mathbb{R} - \{2, 3\}$ και είναι $f(x) = \frac{2x+1}{(x-2)(x-3)}$. Αναζητούμε τους $A, B \in \mathbb{R}$, ώστε

να ισχύει $\frac{2x+1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{2, 3\}$, όπου έχουμε $(A+B-2)x = 3A+2B+1$, $\forall x \in \mathbb{R} - \{2, 3\}$.

Η τελευταία ισότητα ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{2, 3\}$, αν και μόνο αν $\begin{cases} A+B-2 = 0 \\ 3A+2B+1 = 0 \end{cases}$ ή $\begin{cases} A = -5 \\ B = 7 \end{cases}$.

Επομένως, $\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2-5x+6} dx = \int_1^2 \frac{-5}{x-2} dx + \int_1^2 \frac{7}{x-3} dx = \dots = -5[\ln|x-2|]_1^2 + 7[\ln|x-3|]_1^2 = \dots$

Αν ο παρονομαστής είναι της μορφής $Q(x) = (x-\rho_1)(x-\rho_2)\dots(x-\rho_v)$, τότε: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-\rho_1} + \frac{A_2}{x-\rho_2} + \dots + \frac{A_v}{x-\rho_v} + \dots$

3.48 A) $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+7} dx$ B) $\int_3^4 \frac{x+1}{x^2+x-2} dx$ Γ) $\int_2^3 \frac{x+2}{x^2-6x-7} dx$ Δ) $\int_2^3 \frac{x^2-2x-1}{x^3-x} dx$

ΜΟΡΦΗ: $\int_{\kappa}^{\lambda} \frac{P(x)}{ax^2 + \beta x + \gamma} dx$ με $P(x)$ πολυώνυμο βαθμού ≥ 2 και $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$, τότε κάνουμε τη διαίρεση κλπ

3.49 A) $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2-4} dx$ B) $\int_0^1 \frac{x^2-x+2}{x+3} dx$ Γ) $\int_0^1 \frac{x^2-2x+1}{x^2+4x+3} dx$ Δ) $\int_2^3 \frac{x^3+x^2-2x-1}{x^2-x} dx$

ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ

ΜΟΡΦΗ: $\int_{\kappa}^{\lambda} f(e^{ax}, e^{bx}) dx$ Τότε: $u = e^x$, $x = \ln u$, $du = e^x dx$ (συνήθως καταλήγω σε ρητή)

3.50 A) $\int_0^1 \frac{e^x-1}{e^x+2} dx$ B) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}-1} dx$ Γ) $\int_0^1 \frac{1}{e^x+1} dx$ Δ) $\int_0^1 \frac{e^{2x}-1}{e^x} dx$

3.51 A) $\int_0^1 \frac{e^x+1}{e^{2x}-4} dx$ B) $\int_0^1 \frac{2}{1+e^{-2x}} dx$ Γ) $\int_0^1 \frac{e^x}{(e^x+1)\ln(e^x+1)} dx$ Δ) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x-e^{-x}} dx$

ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗ $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$

ΜΟΡΦΗ 1 $\int_{\kappa}^{\nu} P(x)\alpha^{\lambda x+\beta} dx$ όπου $P(x)$ πολυώνυμο του x . Τότε χρησιμοποιώ παράγουσα της $\alpha^{\lambda x+\beta}$ την $\frac{\alpha^{\lambda x+\beta}}{\lambda \ln \alpha}$.

Συνήθως ως βάση έχουμε το e

3.52 A) $\int_0^1 x^2 e^{-2x} dx$ B) $\int_0^1 (x^2+3x)e^{-x} dx$

ΜΟΡΦΗ 2 $\int_{\alpha}^{\beta} P(x)\eta\mu(\lambda x+\beta)dx$ ή $\int_{\alpha}^{\beta} P(x)\sigma\upsilon\nu(\lambda x+\beta)dx$ Τότε χρησιμοποιώ αρχική της $\eta\mu(\lambda x+\beta)$ ($\sigma\upsilon\nu(\lambda x+\beta)$)

3.53 A) $\int_0^1 (3x^2-x)\sigma\upsilon\nu(-2x)dx$ B) $\int_0^1 2x\eta\mu(3x-1)dx$ Γ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sigma\upsilon\nu 2x dx$

ΜΟΡΦΗ 3 $I = \int_{\alpha}^{\beta} \alpha^{\lambda x+\beta} \sigma\upsilon\nu(\gamma x+\delta)dx$, $I = \int_{\alpha}^{\beta} \alpha^{\lambda x+\beta} \eta\mu(\gamma x+\delta)dx$. Χρησιμοποιούμε αρχική για την $\alpha^{\lambda x+\beta}$ οπότε κάνοντας παραγοντική ολοκλήρωση δυο φορές, εμφανίζεται πάλι το I . Προκύπτει έτσι εξίσωση με «άγνωστο» το I .

3.54 A) $\int_0^1 e^{-x}\sigma\upsilon\nu(3x-1)dx$ B) $\int_0^1 e^x\eta\mu x dx$ Γ) $\int_0^1 e^{-x}\sigma\upsilon\nu 2x dx$ Δ) $\int_0^1 2^x\sigma\upsilon\nu x dx$

ΜΟΡΦΗ 4 $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\ln(ax+\beta)dx$. Τότε χρησιμοποιώ παράγουσα της $f(x)$ και αποφεύγουμε τον παράγοντα $\ln(ax+\beta)$.

Μπορεί ο λογάριθμος να είναι υψωμένος σε δύναμη και η να έχουμε συνάρτηση πιο σύνθετη από την $ax+\beta$.

3.55 A) $\int_1^e \ln x dx$ B) $\int_1^e \ln(2x+3)dx$ Γ) $\int_1^e \ln^2(2x+1)dx$ Δ) $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

3.56 A) $\int_1^e x \ln(3x+4)dx$ B) $\int_1^e x \ln(x+1)dx$ Γ) $\int_4^5 \ln(-x+\sqrt{x^2-9})dx$



ΡΙΖΕΣ

ΜΟΡΦΗ: $\int_{\kappa}^{\lambda} f(x, \sqrt{\alpha x + \beta}) dx$ Τότε: $u = \sqrt{\alpha x + \beta}$, ($u \geq 0$), $u^v = \alpha x + \beta$, $vu^{v-1} du = \alpha dx$ δηλαδή $dx = \frac{vu^{v-1}}{\alpha} du$

3.57 A) $\int_0^1 \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+2}} dx$ B) $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{2x+1}} dx$ Γ) $\int_0^1 x\sqrt{x+4} dx$

3.58 A) $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+4}} dx$ B) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ Γ) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2x+3}} dx$

3.59 A) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt[4]{x^2+3}} dx$ B) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{2x+1}} dx$

ΕΙΔ. ΜΟΡΦΗ: Α $\int_{\kappa}^{\lambda} f(x, \sqrt{\alpha x + \beta}, \sqrt[3]{\alpha x + \beta}) dx$ Τότε θέτω $u = \sqrt{\alpha x + \beta}$ όπου $\lambda = \text{ΕΚΠ}(\nu, \mu)$

3.60 A) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt[3]{x+1} + \sqrt{x+1}} dx$ B) $\int_0^1 \frac{8\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt{x}} dx$ Γ) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[3]{2x-1}} dx$

ΕΙΔ. ΜΟΡΦΗ: Β $\int_{\kappa}^{\lambda} f(x, \sqrt{x^2 + \alpha^2}) dx$ ή $\int_{\kappa}^{\lambda} f(x, x^2 + \alpha^2) dx$ $\alpha > 0$ Τότε $x = \alpha \cdot \epsilon\phi\mu$ με $u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ τότε $dx = \frac{1}{\sin^2 u} du$

3.61 A) $\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx$ B) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx$ Γ) $\int_0^2 \frac{2x+3}{x^2+4} dx$

ΕΙΔ. ΜΟΡΦΗ: Γ $\int_{\kappa}^{\lambda} f(x, \sqrt{\alpha^2 - x^2}) dx$ $\alpha > 0$. Τότε: $x = \alpha \cdot \eta\mu u$ με $u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ τότε $dx = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu u du$

3.62 A) $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx$ B) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ Γ) $\int_{-1}^1 \frac{x^2+x+1}{\sqrt{4-x^2}} dx$

ΕΙΔ. ΜΟΡΦΗ: Δ $\int_{\kappa}^{\lambda} f(x, \sqrt{x^2 - \alpha^2}) dx$, $\alpha > 0$, $x \leq -\alpha$ ή $x \geq \alpha$, τότε $x = \frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu u}$ με $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ή $u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, $dx = \frac{\alpha \cdot \eta\mu u}{\sigma\upsilon\nu^2 u} du$

3.63 A) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$

ΓΕΝΙΚΕΣ

$$\underline{3.64} \quad \text{A)} \int_0^1 \frac{(2x-1)^2}{x} dx \quad \text{B)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x}} dx \quad \Gamma) \int_1^2 \frac{x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{x^2} dx \quad \Delta) \int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+5}}$$

$$\underline{3.65} \quad \text{A)} \int_0^1 x e^{x+\ln x} dx \quad \text{B)} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sigma\phi x \cdot \ln(\eta\mu x) dx \quad \Gamma) \int_0^1 \left(\frac{\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^4 x} + \varepsilon\phi^2 x \right) dx \quad \Delta) \int_1^2 \frac{\ln(\varepsilon\phi x)}{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x} dx$$

$$\underline{3.66} \quad \text{A)} \int_0^1 \frac{2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu^2 x} dx \quad \text{B)} \int_0^1 x^2 \eta\mu 2x dx \quad \Gamma) \int_1^2 \frac{x^3}{x^2-4x+3} dx \quad \Delta) \int_0^1 x \eta\mu^2 x dx$$

$$\underline{3.67} \quad \text{A)} \int_1^2 \frac{4(x^4-1)}{x(x^4+1)} dx \quad \text{B)} \int_1^0 \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1} dx \quad \Gamma) \int_1^0 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+2}} dx \quad \Delta) \int_1^2 \frac{dx}{x(x^v+1)}$$

$$\underline{3.68} \quad \text{A)} \int_e^{2e} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx \quad \text{B)} \int_1^0 \frac{x}{\sqrt{x}+1} dx \quad \Gamma) \int_1^0 \frac{x+1}{\sqrt{x}+2} dx \quad \Delta) \int_1^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx$$

$$\underline{3.69} \quad \text{A)} \int_1^e x^2 \ln x^2 dx \quad \text{B)} \int_0^1 \frac{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}{e^{\eta\mu^2 x}} dx \quad \Gamma) \int_1^0 \frac{x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx \quad \Delta) \int_1^e \frac{\eta\mu x}{e^x} dx$$

$$\underline{3.70} \quad \text{A)} \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad \text{B)} \int_1^\pi \frac{1}{\left(x\eta\mu \frac{1}{x}\right)^2} dx \quad \Gamma) \int_1^e \sigma\upsilon\nu(\ln x) dx \quad \Delta) \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} dx$$

$$\underline{3.71} \quad \text{A)} \int_0^1 \frac{x-1}{e^x} dx \quad \text{B)} \int_0^1 \frac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}+e^x} dx \quad \Gamma) \int_1^0 \left(\varepsilon\phi 2x + \frac{2x}{\sigma\upsilon\nu^2 2x} \right) dx \quad \Delta) \int_1^2 \frac{x}{\eta\mu^2 x} dx$$

$$\underline{3.72} \quad \text{A)} \int_0^1 \frac{\eta\mu^3 x}{\sigma\upsilon\nu x} dx \quad \text{B)} \int_1^2 \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu x} dx \quad \Gamma) \int_0^1 \frac{\varepsilon\phi^4 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx \quad \Delta) \int_0^1 x \sigma\upsilon\nu^2 x dx$$

$$\underline{3.73} \quad \text{A)} \int_0^1 \eta\mu^3 x \sigma\upsilon\nu^2 x dx \quad \text{B)} \int_0^1 x^2 \ln(3x) dx \quad \Gamma) \int_0^1 \ln(x + \sqrt{x^2+1}) dx \quad \Delta) \int_0^1 \eta\mu^5 x dx$$

$$\underline{3.74} \quad \text{A)} \int_1^0 \frac{\sqrt{x}}{1+x\sqrt{x}} dx \quad \text{B)} \int_1^0 (\eta\mu 2x) e^{\eta\mu x} dx \quad \Gamma) \int_1^2 \frac{x}{2+\sqrt{x}-1} dx \quad \Delta) \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}\varepsilon\phi\sqrt{x}} dx$$

$$\underline{3.75} \quad \text{A)} \int_0^1 (x^2-x)e^{-2x} dx \quad \text{B)} \int_0^{\ln 2} \frac{e^x+1}{e^x+x} dx \quad \Gamma) \int_3^4 \frac{x}{x^3+x^2-2x} dx \quad \Delta) \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx$$

$$\underline{3.76} \quad \text{A)} \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x}+1} dx \quad \text{B)} \int_1^{e^\pi} \eta\mu(\ln x) dx \quad \Gamma) \int_0^\pi (x\eta\mu x)^2 dx \quad \Delta) \int_0^1 \frac{x+\eta\mu x}{e^x} dx$$



3.77 A) $\int_0^1 (x^2 + 2)e^{-x} dx$ B) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{4 - \eta\mu^2 x} dx$ Γ) $\int_1^2 \frac{2-3x}{x^3} e^{-\frac{2}{x}} dx$ Δ) $\int_1^e \ln^2 x dx$

3.78 A) $\int_1^{\pi^2} \eta\mu\sqrt{x} dx$ B) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2x+1}{\eta\mu^2 x} dx$ Γ) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \eta\mu x \cdot \eta\mu^{12}(\sigma\upsilon\nu x) dx$ Δ) $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$

3.79 A) $\int_e^{2e} \frac{1}{x \ln^3 x} dx$ B) $\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^3+3x+2} dx$ Γ) $\int_0^2 \left(x-1+\frac{1}{x+2}\right) dx$ Δ) $\int_{\pi^2}^{4\pi^2} \frac{\sigma\upsilon\nu\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

3.80 A) $\int_1^e \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx$ B) $\int_0^1 x \cdot 2^{3x} dx$ Γ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu^2 x}{e^x} dx$ Δ) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$

3.81 A) $\int_0^1 \ln \frac{2+x}{2-x} dx$ B) $\int_0^1 x^2 \sigma\upsilon\nu(3x) dx$ Γ) $\int_0^1 \ln(x + \sqrt{x^2+1}) dx$ Δ) $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}} dx$

3.82 A) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$ B) $\int_0^e \left(\int_1^x (1-t)e^{-t} dt \right) dx$ Γ) $\int_0^1 \ln^2(x + \sqrt{x^2+1}) dx$ Δ) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$

3.83 A) $\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{|\ln x|}{x} dx$ B) $\int_{-2}^2 (|x| - |x^2-1|) dx$ Γ) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x}{\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x} dx$ Δ) $\int_1^e \ln \sqrt{x+1} dx$

3.84 A) $\int_0^1 \frac{x+2}{1+x^2} dx$ B) $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} x e^{\sqrt{x^2+2x}} dx$ Γ) $\int_0^{\ln \frac{\sqrt{2}}{2}} e^x \sqrt{1-e^{2x}} dx$ Δ) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$

3.85 Να υπολογίσετε τα I, J όταν $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+2\eta\mu x} dx$ $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}{1+2\eta\mu x} dx$

3.86 A) $\int_1^e e^x \ln(e^x - 1) dx$ B) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$ Γ) $\int_0^e \left(\int_1^x \frac{1-t}{e^t} dt \right) dx$

3.87 A) $\int_{-2}^2 (|x| - |x^2-1|) dx$ B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon\varphi^3 x + \varepsilon\varphi^5 x dx$ Γ) $\int_{-2}^2 |x^2-1| dx$

3.88 A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x}{\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x} dx$ B) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ Γ) $\int_0^1 \left(\int_1^x e^{t^2} dt \right) dx$

3.89 A) $I = \int_0^{\pi} \frac{x \eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu^2 x} dx$ B) $I = \int_{-1}^1 \frac{x^4}{2^{\eta\mu x} + 1} dx$

3.90 A) $\mathbf{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu^3 x}{\eta\mu^3 x + \sigma\upsilon\nu^3 x} dx = \frac{\pi}{4}$

B) $\mathbf{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\varepsilon\phi x) dx = 0^{**}$

3.91 A) $\mathbf{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + (\varepsilon\phi x)^{\sqrt{2}}} dx = \frac{\pi}{4}^{**}$

B) $\mathbf{I} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1 + (\varepsilon\phi x)^5} dx = \frac{\pi}{12}$

3.92 A) $\mathbf{I} = \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \eta\mu x} dx = \pi$

B) $\mathbf{I} = \int_0^{\pi} x \ln(\eta\mu x) dx = -\frac{\pi^2}{2} \ln 2$

3.93 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Δείξτε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha + \beta - x) dx$ και βρείτε τα

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\eta\mu x} - \sqrt{\sigma\upsilon\nu x} dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x} dx, \quad \mathbf{I} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sigma\upsilon\nu t}{\sigma\upsilon\nu t - \eta\mu t} dt, \quad \mathbf{J} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\eta\mu t}{\sigma\upsilon\nu t - \eta\mu t} dt$$

3.94 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -2x & , \quad -1 \leq x < 0 \\ 4x^2 & , \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$. Να βρείτε το $\int_{-1}^1 f(x) dx$

3.95 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x, & x > 0 \\ \alpha - 1, & x = 0 \end{cases}$. Να βρείτε για ποια τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ ορίζεται το

ολοκλήρωμα $\mathbf{I} = \int_0^1 f(x) dx$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\mathbf{I}$

3.96 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \geq 0 \\ \sigma\upsilon\nu 2x, & x < 0 \end{cases}$. Να βρείτε το $\int_{-\frac{\pi}{2}}^1 f(x) dx$

3.97 Βρείτε τις αρχικές συναρτήσεις των συναρτήσεων $f(x) = (x^2 + 1)e^x, x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = x\eta\mu x, x \in \mathbb{R}$

3.98 Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\eta\mu x}}{\sqrt{\eta\mu x} + \sqrt{\sigma\upsilon\nu x}} dx$ $\int_{-1}^1 \frac{3x^2}{e^x + 1} dx = 1$

3.99 Να αποδειχτεί ότι: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x}}{(\sigma\upsilon\nu x)^{\eta\mu x} + (\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x}} dx = \frac{\pi}{4}$

3.100 Αν η συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow (0, +\infty)$ έχει συνεχή παράγωγο και $f(0) = 1, f(1) = 2$, να υπολογίσετε το

ολοκλήρωμα $\mathbf{I} = \int_0^1 \frac{f'(x)}{f^2(x) + f(x)} dx$

3.101 Να αποδειχτεί ότι $\int_{-1}^2 \frac{\ln(x+2)}{\ln(x+6-x^2)} dx = \frac{3}{2}$



ΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ - ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3.102 Έστω η $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{αν } -1 \leq x < 0 \\ 4x^2 & \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

A) Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο 0

B) Να βρείτε το $\int_{-1}^1 f(x) dx$

3.103 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x, & x > 0 \\ \alpha - 1, & x = 0 \end{cases}$

A) Να βρείτε για ποια τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$

ορίζεται το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 f(x) dx$ και στη

συνέχεια να το υπολογίσετε.

3.104 Να βρείτε τις αρχικές των συναρτήσεων

$$f(x) = x^2 e^x \quad g(x) = 2x \ln(x^2 + 1) \quad k(x) = \eta \mu x \cdot e^x$$

$$\lambda(x) = \begin{cases} \ln x + e, & x \geq 1 \\ e^x, & x < 1 \end{cases} \quad g(x) = x \eta \mu x$$

3.105 Να βρείτε τη συνάρτηση F αν

$$F(x) = \int_1^e |t - x| \ln t dt \quad \text{με } x \geq 1$$

3.106 Βρείτε τον τύπο της $F(x) = \int_1^x |t^2 - t| dt$

3.107 Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση

$f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) > 0$, $f'(x) = f^2(x)$ και

$$f(\beta) = 3f(\alpha). \text{ Να βρείτε το } I = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

3.108 Έστω μια συνάρτηση f με f'' συνεχή και

για την οποία ισχύει $\int_0^{\pi} (f(x) + f''(x)) \eta \mu x dx = 2$.

Αν $f(\pi) = 1$, να υπολογίσετε το $f(0)$.

3.109 Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο να αποδείξετε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} x f''(x) dx = (\beta f'(\beta)) - f(\beta) - (\alpha f'(\alpha) - f(\alpha))$$

3.110 Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(1) = e$,

και $f'(x) = e^{x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Υπολογίστε το $\int_0^1 f(x) dx$

3.111 Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο να αποδείξετε ότι

$$f(x+1) - 2f(x) + f(x-1) = \int_{x-1}^x \left(\int_y^{y+1} f''(t) dt \right) dy$$

3.112 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f για την

οποία ισχύει $f(x) + f(x-1002) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι

A) $f(x+2004) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{B) } \int_1^{2005} f(x+2005) dx = \int_2^{2006} f(x) dx.$$

3.113 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$

με $f(x) = f(\alpha + \beta - x)$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$. Αποδείξτε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} x f(x) dx = \frac{\alpha + \beta}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = (\alpha + \beta) \int_{\alpha}^{\frac{\alpha + \beta}{2}} f(x) dx$$

3.114 Αποδείξτε ότι $\int_0^{\alpha} \frac{f(x)}{f(x) + f(\alpha - x)} dx = \frac{\alpha}{2}$

3.115 * Αν $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} e^x & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, να αποδείξετε

ότι η f είναι συνεχής και ότι $\int_{-1}^0 f(x) dx = \frac{1}{e}$

3.116 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$ να αποδείξετε ότι

$$\int_0^1 xf(\eta\mu x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^1 f(\eta\mu x)dx \text{ και να}$$

υπολογίσετε το $I = \int_0^1 x\eta\mu^2 x dx$

3.117 ***Υπολογίστε το $\int_0^1 \left(\int_1^x \frac{e^t - 1}{t} dt \right) dx$

3.118 Έστω συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $[1000, 1002]$ και για την οποία ισχύει ότι:

$$\int_0^2 f'(x)dx = 4 - 2f(0) \text{ και } f(x) = c - f(2-x)$$

A. Να υπολογίσετε την τιμή του c .

B. Να δείξετε ότι $\int_0^2 f(2-x)dx = \int_0^2 f(x)dx$

Γ. Να υπολογίσετε το $\int_0^2 f(x)dx$

ΑΡΤΙΑ ΠΕΡΙΤΤΗ

3.122 Αν η συνάρτηση $f: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι

συνεχής και περιττή τότε $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

3.123 Αν η συνάρτηση $f: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι

συνεχής και άρτια τότε $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$

3.124 Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(1-x) + f(1+x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθούν τα εξής:

A) Η συνάρτηση f , είναι άρτια,

B) $\int_{1995}^{1996} f(x)dx = \int_0^{1997} f(x)dx$.

3.119 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, \alpha]$, $\alpha > 0$ να αποδείξετε ότι

$$\int_0^\alpha x^3 f(x^2)dx = \frac{1}{2} \int_0^{\alpha^2} xf(x)dx$$

3.120 Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \geq 0 \\ \sin 2x, & x < 0 \end{cases}$$

A) Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

B) Να βρείτε το $\int_{-\frac{\pi}{2}}^1 f(x)dx$

3.121 * Αν f συνεχής και g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, και υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε

$\beta f(\beta \cdot x) - \alpha f(\alpha \cdot x) = g'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να

δείξετε ότι: $\int_\alpha^\beta f(t)dt = g(1) - g(0)$

3.125 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, άρτια και έχει περίοδο T . Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^T xf(x)dx = \frac{T}{2} \int_0^T f(x)dx$$

3.126 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και άρτια. Να αποδείξετε ότι:

A) $\int_0^{2\pi} xf(\eta\mu x)dx = 2\pi \int_0^\pi f(\eta\mu x)dx$

B) $\int_0^\pi xf(\sigma\upsilon\nu x)dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sigma\upsilon\nu x)dx$

3.127 Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^1 \frac{x}{4 + \sigma\upsilon\nu 4x} dx = 0$



ΑΝΑΓΩΓΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ

3.128 Αν $I_v = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon \varphi^v x dx$, $v \in \mathbb{N}^*$ τότε να

αποδείξετε ότι για κάθε $v > 2$ ισχύει

$$I_v = \frac{1}{v-1} - I_{v-2} \text{ και να υπολογίσετε το } I_5.$$

ΝΑ ΒΡΕΘΕΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

3.130 Να βρείτε τον τύπο συνάρτησης f , που είναι ορισμένη και συνεχής στο $[0,1]$ και ισχύει

$$\text{ότι: } \int_0^1 f(x)(x-f(x))dx = \frac{1}{12}$$

3.131 Δίνεται η συνάρτηση f , συνεχής στο $[0,1]$

για την οποία ισχύουν: $\int_0^1 f(x)dx = 1$ και

$$\int_0^1 f^2(x)dx = 1. \text{ Να δείξετε ότι: } f(x) = 1, x \in [0,1]$$

3.132 Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f που είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει ότι

$$\int_0^1 2e^x f(x)dx \geq \int_0^1 f^2(x)dx + \int_0^1 e^{2x}dx$$

3.133 Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(0) = 1$ και

$$f'(x) = f(x) + \int_0^1 f(t)dt \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

3.129 Αν $I_v = \int_0^1 \frac{e^{vx}}{1+e^x} dx$, $v \in \mathbb{N}$ να

αποδείξετε ότι $I_{v+1} = \frac{e^v - 1}{v} - I_v$, $v \in \mathbb{N}^*$

3.134 Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$f'(x) \geq \frac{f^2(1) + f^2(0) + 2f(0) + 5}{2} \text{ για κάθε } x \in [0,1].$$

Να αποδείξετε ότι $f(x) = 3x - 2$

3.135 Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ αν ισχύει ότι } f(x) = (1+e^x)(1+F(x)),$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ όπου } F \text{ είναι αρχική της } y = \frac{f(x)}{1+e^x} \text{ με}$$

$$F(0) = 0.$$

3.136 Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0,1]$,

$$\text{ώστε } \int_0^1 \ln^2 f(x)dx + \frac{1}{5} = 2 \int_0^1 x^2 \ln f(x)dx \text{ και}$$

$$f(x) > 0, x \in [0,1]. \text{ Αποδείξτε ότι } f(x) = e^{x^2},$$

$$x \in [0,1] \text{ και υπολογίστε το } \int_0^1 \frac{f(x)}{f(1-x)+f(x)} dx$$

Μ. Παπαρηγοράκης

ΥΠΑΡΧΕΙ

3.137 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ ώστε

$$x_0 f(x_0) = 2 \int_{x_0}^1 f(t) dt$$

3.138 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in (0,1)$ ώστε

$$f(\gamma) \cdot \eta\mu\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma = \int_{\gamma}^1 f(t) dt$$

3.139 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο

διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ και ισχύει: $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t) dt = 0$. Δείξτε

ότι υπάρχει $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ ώστε $\frac{f(\xi)}{\varepsilon\phi\xi} = \int_{\xi}^0 f(t) dt$

3.140 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και

ισχύει $\int_0^x \left(\int_1^t f(u) du \right) dt \geq 1 - e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Να

δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 1$, έχει ρίζα στο $(0,1)$.

3.141 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [1,e] \rightarrow \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1,e)$ τέτοιος ώστε:

$$\int_1^{x_0} f(t) dt = (e - x_0) f(x_0)$$

3.142 Αν f, g είναι συναρτήσεις συνεχείς στο $\mathbb{R}$

αποδείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,2)$

τέτοιο ώστε: $f(\xi) \int_{\xi}^1 f(t) dt = g(\xi) \int_2^{\xi} f(t) dt$

3.143 Αν f συνεχής στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$(\xi - 3\xi^3) f(\xi^3 - \xi) = \xi \int_1^{\xi^3 - \xi} f(t) dt$$

3.144 Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, e)$ με

$$\int_e^{\xi} \frac{\ln t}{t} dt = (1 - \xi) \frac{\ln \xi}{\xi}$$

3.145 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$

και ισχύει ότι $\int_a^{\beta} f(x) dx = 0$. Δείξτε ότι υπάρχουν:

A) $x_0 \in (a, \beta)$ ώστε $\int_a^{x_0} f(t) dt = f(x_0)$

B) $\gamma \in (a, \beta)$ ώστε $\int_a^{\gamma} f(t) dt = \gamma f(\gamma)$ αν $0 \notin [a, \beta]$

3.146 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο

$\mathbb{R}$ και ισχύει $f(0) = 0$ και $\int_0^1 f(x) dx = f(1)$. Να

αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε $f'(\xi) = f(\xi)$

3.147 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,2]$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,2)$ ώστε

$$\int_{\xi}^2 f(t) dt = \xi \cdot \ln \xi \cdot f(\xi)$$

3.148 **Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ ώστε

$$\int_0^1 x^2 f(x) dx = \frac{1}{3} f(x_0)$$

3.149 Έστω συνάρτηση f συνεχής και γνήσια

αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{xf(x) > \int_0^x f(t) dt}{x-1} + \frac{\int_x^{x+2} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt}{x-2} = 0$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$



ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ**3.150** Να αποδείξετε τις ανισότητες:

$$A) \quad \sqrt{3} + \frac{3}{2} \leq \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2+x}{\sqrt{1+x^2}} dx \leq \sqrt{15}$$

$$B) \quad \ln \frac{\alpha}{\beta} \leq \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\eta \mu x}{x} \leq \ln \frac{\beta}{\alpha} \text{ για κάθε } 0 < \alpha \leq \beta$$

$$Γ) \quad 1 \leq \int_0^1 \frac{e^x}{1+x^2} dx \leq \frac{e}{2}$$

3.151 *Δείξτε ότι

$$\int_1^5 \frac{e^x}{e^x + x^2} dx \cdot \int_1^5 \frac{x^2}{e^x + x^2} dx \leq 4$$

3.152 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

$$\text{και } f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ τότε } \int_3^1 \left(\frac{f(x)}{x} + \frac{x}{f(x)} \right) dx \geq 4$$

3.153 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στοδιάστημα $[3, 4]$ με $1 \leq f(x) \leq 2$ για κάθε $x \in [3, 4]$ και ισχύει $\int_3^4 f^2(x) dx \geq 4$ να αποδείξετε ότι

$$\int_3^4 f(x) dx = 2.$$

3.154 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι

$$x^2 \int_0^x f(t) dt > \int_0^x t^2 f(t) dt \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

3.155 Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$$A) \quad \text{Δείξτε ότι } \int_x^{x+3} f(t) dt < \int_{x+3}^{x+6} f(t) dt$$

$$B) \quad \text{Να λυθεί η ανίσωση } \int_x^{x^2} f(t) dt < 0$$

3.156 Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνήσια

$$\text{αύξουσα στο } \mathbb{R}. \text{ Δείξτε ότι } \int_1^2 f(t) dt < \frac{1}{3} \int_1^4 f(t) dt$$

3.157 Η συναρτήσεις f και g είναι συνεχείςστο $[0, +\infty)$ με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$ η g είναι γνησίως αύξουσα $[0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι

$$g(x) \int_0^x f(t) dt > \int_0^x g(t) f(t) dt, \forall x \in (0, +\infty)$$

3.158 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{\int_0^1 x f^2(x) dx}{\int_0^1 f(x) dx} < \frac{\int_0^1 f^2(x) dx}{\int_0^1 x f(x) dx}$$

3.159 Έστω ότι η συνάρτηση f έχει γνήσιααύξουσα παράγωγο στο $[0, \alpha]$ με $\alpha > 0$. Να

$$\text{αποδείξετε ότι } \int_0^{\alpha} f(t) dt > \alpha f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

3.160 Έστω η συνάρτηση f , συνεχής στο $[0, 1]$.

$$\text{Δείξτε ότι } \int_0^1 x f(x) dx \leq \frac{1}{12} + \int_0^1 f^2(x) dx$$

3.161 Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: [\alpha, \beta] \rightarrow [0, +\infty)$ ώστε να ισχύει ότι $g(\alpha) = 2$,και η g είναι φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$. Αποδείξτε ότι:

$$A) \quad 0 \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) g(x) dx \leq 2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

$$B) \quad \text{Αν } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) g(x) dx = 2 \text{ τότε υπάρχει}$$

$$\xi(\alpha, \beta) \text{ ώστε } \int_{\alpha}^{\xi} f(x) dx = 1$$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ

3.162 Α) Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$, 1-1, με συνεχή πρώτη παράγωγο στο $[\alpha, \beta]$.

$$\text{Δείξτε ότι } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x) dx = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha)$$

B) Αν $f(x) = e^x + x^5$ βρείτε το $\int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx$.

Γ) Να δείξετε ότι $\int_1^e \sqrt{\ln x} dx + \int_0^1 e^{x^2} dx = e$

3.163 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{2x + \eta \mu x}$, $x \geq 0$

Να βρείτε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{2\sqrt{\pi}} x f^{-1}(x) dx$

ΟΡΙΑ ΜΕ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

3.166 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty) \text{ και } g(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^x t f(t) dt}{\int_0^x f(t) dt} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \text{Να}$$

αποδείξετε ότι

A) η g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ότι $g'(0) = \frac{1}{2}$

Γ) η g είναι γνήσια αύξουσα.

3.167 Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$$

3.168 Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{x-1}^{x+1} \frac{1}{\sqrt{3+2t^2}} dt$$

3.164 Αν $f(x) = x + \int_{2004}^x e^{-t^2} dt$, $x \in \mathbb{R}$, να

αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = f^{-1}(x)$.

3.165 Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ τέτοια ώστε } f^3(x) + f(x) + 2x = 0 \text{ για}$$

κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα

B) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \text{ τέτοιο ώστε } f(x_0) = x_0 4^{x_0} - 3.$$

Γ) Να υπολογίσετε το $\int_{-1}^0 f(x) dx$

3.169 Να δείξετε ότι $\frac{e^x}{t} \leq \frac{e^t}{t} \leq \frac{e^{2x}}{t}$ για κάθε

$$x \in (0, 1), t \in (x, 2x) \text{ και ότι } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \right) = \ln 2$$

3.170 Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (\eta \mu t - t) dt \cdot \int_0^{\eta \mu x} e^{t^2} dt}{\int_0^x (\eta \mu t - \tau \sigma \nu t) dt \cdot \int_0^{\epsilon \phi x} e^{t^2} dt} = -\frac{1}{2}$$

3.171 Έστω η συνάρτηση f , συνεχής στο $[0, +\infty)$

$$\text{και η συνάρτηση } g(x) = \begin{cases} \int_0^1 f(xt) dt & \text{αν } x > 0 \\ f(0) & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

A) Αποδείξτε ότι η g είναι συνεχής στο 0

B) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

δείξτε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$.



ΕΜΒΑΔΑ

3.172 Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$g(x) = \sqrt{x}, f(x) = 2x - 1 \text{ και } h(x) = \frac{2}{x^2}$$

3.173 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη

C_f , την πλάγια ασύμπτωτη της C_f τις ευθείες $x = 0$, $x = 3$ και τον άξονα $x'x$

3.174 Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \ln x$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f στα σημεία με τετμημένες $x = 1$ και $x = e$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω , που περικλείεται από τη C_f και τις δύο εφαπτόμενες.

3.175 Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = \frac{1}{x^2}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$, $x = \lambda$ ($\lambda > 0$). Να προσδιορίσετε την ευθεία $x = a$ που χωρίζει το παραπάνω χωρίο σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

3.176 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^x$

A) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(t)$ του μέρους του επιπέδου, τα σημεία $M(x, y)$ του οποίου, ικανοποιούν τις σχέσεις: $t \leq x \leq 0$ με $t < 0$ και $0 \leq y \leq f(x)$

B) Να υπολογίσετε το $\lim_{t \rightarrow -\infty} E(t)$

3.177 Αν $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ και F αρχική της f με $F(1) = 0$ να βρείτε το εμβαδο του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της F και τους άξονες $x'x$, $y'y$

3.178 Έστω η συνεχής συνάρτηση f με $D_f = \mathbb{R}$ ώστε $f(x) > 0$ και $f(2-x) + f(x) = 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f τον $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 2$

3.179 Έστω οι συναρτήσεις f, g με $A_f = A_g = \mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) - g'(x) = (x^2 + 2x - 1)e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν γνωρίζουμε ότι η C_h της συνάρτησης $h(x) = f(x) - g(x)$ διέρχεται από το σημείο $A(0, -1)$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g

3.180 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} xe^x & x \leq 0 \\ x \ln x & x > 0 \end{cases}$ Να υπολογίσετε τα εμβαδά E των χωρίων που

περικλείονται από τη C_f τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = -1$

3.181 Αν $f(x) = \ln(1 + \varepsilon \varphi x)$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) + f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \ln 2$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $y = 0$, $x = 0$ και $x = \frac{\pi}{4}$

3.182 Έστω η συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 0$ με τιμή μηδέν και $f(1) + f(-1) = 3$ να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f' , του άξονα $x'x$ και των ευθειών $x = -1$ και $x = 1$

3.183 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f(x) = \int_0^2 f(x) dx - f'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 2$

A) Να βρείτε τον τύπο της f

B) Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f την παραπάνω ασύμπτωτη και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 2$.

3.184 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\eta \mu x}$, $x \in (0, \pi)$ Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που

περικλείεται από την C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \frac{\pi}{3}$ και $x = \frac{\pi}{2}$ είναι $E = \frac{1}{2} \ln 3$.

3.185 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} e^x - e, & x < 1 \\ \frac{\sqrt{\ln x}}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής και να

υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου, το οποίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = e$.

3.186 Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περιέχει τα σημεία $M(x, y)$ με $\sqrt{e} \leq x \leq e$ και

$$\frac{1}{2}x^2 \ln \frac{x^2}{e} \leq y \leq \frac{1}{2}x^2$$

3.187 Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περιέχεται ανάμεσα στην καμπύλη $y = |x^2 - 1|$ και

την ευθεία $x + y = 1$ ισούται με $\frac{13}{6}$



ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΕ ΟΛΗ ΤΗΝ ΥΛΗ

3.188 Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \int_{-x}^x \frac{e^t + \sin t}{1 + e^t} dt$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- A) $f(x) = x + \eta \mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 B) ορίζεται η $f^{-1} : [0, \pi] \rightarrow [0, \pi]$.
 Γ) το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ των C_f και $C_{f^{-1}}$ και των ευθειών $x = 0$ και $x = \pi$ είναι $E = 4 \text{ τμ.}$

3.189 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ και ισχύει: $\ln(f(x)) + e^{f(x)} = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- A) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία.
 B) Αποδείξτε ότι η f αντιστρέφεται.
 Γ) Να λύσετε τις εξισώσεις $f(x) = 1$ και $f(x) = e$.

Δ) Υπολογίστε το άθροισμα $I = \int_1^e f^{-1}(x) dx + \int_e^{e^e+1} f(x) dx$.

3.190 Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(xy) = xf(y) + yf(x)$ για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$ με $f'(1) = 1$.

- A) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x \ln x$, $x \in (0, +\infty)$
 B) Να λύσετε την εξίσωση $2f(x) = x^2 - 1$
 Γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $h(x) = 2f(x)$, $g(x) = x^2 - 1$ και την ευθεία $x = e$.

3.191 Θεωρούμε την συνάρτηση f συνεχή το $\Delta = [0, 2]$ ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: $\int_x^2 f(t) dt \geq \frac{2-x^3}{3}$.

Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , να αποδείξετε ότι:

- A) $2F(2) \geq \int_0^2 F(x) dx$ B) $\int_0^2 [xF(x)]' dx = \int_0^2 F(x) dx + \int_0^2 xf(x) dx$
 Γ) $\int_0^2 xf(x) dx \geq 0$ Δ) $\int_0^2 f^2(x) dx \geq -\frac{8}{3}$

Μ. Παπαρηγοράκης

3.192 Α) Ανισότητα **Bunyakovsky-Cauchy- Schwarz**: Αν f, g είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, b]$,

να δείξετε ότι
$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b (f(x))^2 dx \cdot \int_a^b (g(x))^2 dx.$$

B) Να αποδείξετε ότι α) $\left(\int_a^b f(x)dx \right)^2 \leq (\beta - \alpha) \int_a^b f^2(x)dx$ β) $\left(\int_a^b xf(x)dx \right)^2 \leq (\beta^2 - \alpha^2) \int_a^b f^2(x)dx$

3.193 Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[-2, 2]$, παραγωγίσιμη δύο φορές στο διάστημα $(-2, 2)$ για την οποία επίσης γνωρίζουμε ότι $f(0) = 3$ και $f(x)f'(x) = f'(x) - x$ για κάθε $x \in (-2, 2)$

Αποδείξτε ότι: Α) Η f δεν έχει σημεία καμψής Β) $f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0$

Γ) Η f είναι κοίλη Δ) $f(x) = 1 + \sqrt{4 - x^2}$, $x \in [-2, 2]$ Ε) $\int_0^2 (f(x) - 1)dx = \pi$

3.194 Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει: $e^{f(x)} + f(x) - x - 1 = 0$

Α) α Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

β Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ Να λύσετε τις εξισώσεις: $f^{-1}(x) = 0$ και $f^{-1}(x) = e$

δ Να αποδείξετε ότι $\int_0^e f(x)dx = \frac{3}{2}$

3.195 * Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και F μια αρχική της με την ιδιότητα $f(x)F(1-x) = 1$ για κάθε

$x \in \mathbb{R}$. Αν $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ να αποδείξετε ότι: $f(x) = e^{x-\frac{1}{2}}$

Τα επόμενα ΘΕΜΑΤΑ είναι από ΔΗΜΟΣΙΕΥΜΕΝΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ ΣΤΟ ΔΙΑΔΙΚΤΥΟ (Οι πηγές αναφέρονται όπου υπάρχουν)

3.196 Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(3)=1$ για την οποία ισχύουν :

• $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1)

• $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x^3}{x - 1} = -4$ (2)

A. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, f(1))$

B. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (1, 3)$ στο οποίο η f παρουσιάζει ελάχιστο.

Γ. Να λυθεί στο $[0, +\infty)$ η εξίσωση $f'(e^x) = f'\left[\left(\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\right]$.

Δ. Αν E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , την $y = -x$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$ δείξτε ότι $E > 2$.



3.197 Δίνεται συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύουν :

- F είναι μια παράγουσα της f στο $(0, +\infty)$
- $f(2017) - F(2017) > f(2016) - F(2016)$
- $|f'(x) - f(x)| = e^x \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$
- $f(1) = -x_0 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$ όπου x_0 είναι η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης $2^x = x + 1$

A. Δείξτε ότι $f(1) = -e$ (μονάδες 5) και στη συνέχεια ότι $f(x) = e^x \left(\ln x - \frac{1}{x} \right)$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

B. Μελετήστε την f ως προς τη κυρτότητα και τα σημεία καμψής (μονάδες 5) και στη συνέχεια δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in \left(\frac{1}{2}, e \right) : 2f\left(\frac{3}{2\xi}\right) = f\left(\frac{1}{2\xi}\right) + f\left(\frac{5}{2\xi}\right)$

Γ. Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και στη συνέχεια δείξτε ότι

$$\frac{e^2 \ln 2 - f(2)}{2} < \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx < \frac{e^2 \ln 2 - f(1)}{2}$$

3.198 Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και έστω ότι η γραφική της παράσταση τέμνει τον $y'y$ σε σημείο με τεταγμένη 1. Ισχύει ακόμα η σχέση

$$(x+1) [f(x) + f'(x)] = xf(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

A) Να βρεθεί ο τύπος της f .

B) Αν $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{e^x}$

i) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι η γραφική της παράσταση έχει με τον άξονα συμμετρίας αυτής και της f^{-1} ένα μόνο κοινό σημείο με θετική τετμημένη x_0 .

ii) Υλικό σημείο M κινείται κατά μήκος της C_f ξεκινώντας από το σημείο που η C_f τέμνει τον $y'y$ και η προβολή του M στον Ox απομακρύνεται με ταχύτητα 2 cm/s . Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας $\hat{M}\hat{O}x$ την χρονική στιγμή που $x = x_0$ ισούται με $\frac{f'(x_0) - 1}{x_0} \text{ rad/s}$.

iii) Αν $g(x) = f^2(x)$ να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από την C_g τον $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = \alpha$, $\alpha < 0$ καθώς και το $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} E(\alpha)$.

3.199 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2}{8} + \alpha$, $x > 0$ και $\alpha \in \mathbb{R}$, $g(x) = \ln x$, $x > 0$

- A) Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία - ακρότατα την συνάρτηση $\Delta(x) = f(x) - g(x)$, $x > 0$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- B) Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν : δύο - ένα - κανένα κοινό σημείο.
- Γ) Στην περίπτωση όπου οι C_f , C_g δεν έχουν κοινά σημεία δείξτε ότι στο σημείο όπου η κατακόρυφη απόσταση των C_f , C_g παρουσιάζει ακρότατο, οι εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των f, g είναι μεταξύ τους παράλληλες.
- Δ) Να μελετήσετε ως προς τα κοίλα την $y = \Delta(x)$ και να αποδείξετε ότι :
- i) για κάθε x_1, x_2 με $0 < x_1 < x_2$ ισχύει ότι :

$$2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + g(x_1) + g(x_2) < 2g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + f(x_1) + f(x_2)$$

ii)
$$\int_2^3 \Delta(x) dx < \frac{1}{3} \cdot \int_2^5 \Delta(x) dx$$

Δούκας

3.200 Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως μονότονη, συνεχής και τέτοια ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 4}{x - 3} = 5 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 2. \text{ Να αποδείξετε ότι}$$

A Η f είναι γνησίως αύξουσα

B $f(x) > 0$, $\forall x \in [1, 3]$

Γ
$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 2f(x-2)}{x-3} = 1$$

Δ Υπάρχει μοναδικός αριθμός $x_0 \in (1, 3)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = \frac{f(2) + f(e)}{2}$

E Υπάρχει $\xi \in (1, 3)$ τέτοιος ώστε $\sqrt{2}f(\xi) = \sqrt{f(2)f(e) + f^2(e)}$ Μαντουλίδης

3.201 Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1, e]$ με $f(1) = 2$, $f(e) = e + 1$ και σύνολο τιμών το $[-1, 4]$. Να αποδείξετε ότι:

A. Υπάρχουν τουλάχιστον δύο τιμές $x_1, x_2 \in (1, e)$ με $x_1 \neq x_2$, τέτοια ώστε $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.

B Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, e)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$

Γ. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)[f'(x_0) - 4f^4(x_0)] = x_0$.

Δ Η ευθεία $y = -x + e + 2$ τέμνει την C_f σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη να ανήκει στο διάστημα $(1, e)$.

E Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, e)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = 1$

Μαντουλίδης



3.202 Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \frac{x-1}{e^x - x}$

- A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- B. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δυο σημεία $A(x_1, f(x_1)), B(x_2, f(x_2))$ με $x_1 < 1 < x_2$ στα οποία οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f είναι παράλληλες στον οριζόντιο άξονα
- Γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $\Gamma(\xi, f(\xi))$ στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f' είναι παράλληλη στον οριζόντιο άξονα.
- Δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει διάστημα της μορφής $[\alpha, \beta]$ με $\beta - \alpha > 2$ στο οποίο η f είναι γνήσια αύξουσα.
- E. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τους άξονες συντεταγμένων.
- ΣΤ. Να βρείτε τα όρια : i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu f(x)}{f^3(x)}$ και ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \eta \mu x - \eta \mu x}{e^x - e^{\ln x}}$

3.203 Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x) + f(x) = e^{-3x^2} + e^{-x^2}$.

- A. Να γίνει μελέτη και γραφική παράσταση για τη συνάρτηση $g(x) = x^3 + x$.
- B. Να δείξετε ότι $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- Γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \frac{1}{f(x)} - e f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
- Δ. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx + e \int_1^0 f(x) dx < e - 1$.
- E. Έστω $F(x)$ μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$, με $F(1) = 0$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 F(x) dx$.
- ΣΤ. Έστω $h(x) = \frac{1}{f(x)}$ στο $[0, 1]$.

- i. Να δείξετε ότι η h αντιστρέφεται και να βρείτε την h^{-1}
- ii. Αν E_1 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_h , τους άξονες $x'x$, $y'y$ και την ευθεία $x = 1$ και E_2 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη $C_{h^{-1}}$, τον άξονα $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες στα άκρα του διαστήματος που ορίζεται η h^{-1} , να δείξετε ότι $E_2 + E_1 = e$.

Μαντουλίδης

3.204 Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $1 < f(0) < 2$, ώστε να ισχύει:

$$f'(x) = f^2(x) - 4f(x) + 5 \quad \text{για κάθε } x \in [0, 1].$$

- A. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και το πρόσημο.
 B. Να δείξετε ότι: $f(1) > 2$.
 Γ. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.
 Δ. Αν δίνεται ότι :

$$\frac{f(1)}{f(0)} = \alpha \quad \text{και} \quad \int_0^1 f(x) dx = \beta, \text{ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα } I = \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx$$

3.205 Για την 2 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν:

- $f(0) = f'(0) = 1$
- $f(x) \cdot (f'(x) - f(x)) = f'(x) \cdot (f'(x) - f''(x))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

- A. $(f(x))^2 + (f'(x))^2 = 2e^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$.
 B. $|f(x)| \leq \sqrt{2} \cdot e^x$ και στη συνέχεια ότι η εξίσωση $f(x) = xe^x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 2)$.
 Γ. Η f είναι γνήσια αύξουσα.
 Δ. i) $\int_0^1 (f(x) - f'(x))^2 dx = e^2 - f^2(1)$
 ii) $f(1) \leq e$
 iii) Αν $f(1) = e$, τότε $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e}$

3.206 Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύουν

$$f'(x) = \frac{xe^x + 1}{x} \quad \text{για } x > 0 \quad \text{και} \quad f(1) = e - 3$$

- A. Να δείξετε ότι $f(x) = e^x + \ln x - 3$, $x > 0$
 B. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση στο $(0, +\infty)$
 Γ. Αν $g(x) = \ln x$, $x > 0$
 α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$
 β) Να λύσετε την ανίσωση $f(g(x) - 1) < 3$

- Δ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = e - 3$, $x = e^2 - 1$

Αρσάκειο



3.207 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε ;

- $f(0) = 0, f'(0) = 2$
- $(x^2 + 1)f''(x) + 4xf'(x) + 2f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$

A. Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$

B.α) Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(2, f(2))$

β) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f' στο x_0 να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

Γα) Να βρείτε το εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$, την εφαπτομένη της στο $x_1 = 2$ και τις ευθείες $x=2$ και $x = \alpha > 2$

β) Αν το α μεταβάλλεται με ρυθμό 25cm/sec , να βρείτε το ρυθμό του $E(\alpha)$ τη χρονική στιγμή που είναι $\alpha = 10\text{cm}$

Δ. α) Αν η g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και $g'(1) = 1$, να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g τέμνονται το πολύ σε ένα σημείο στο $(1, +\infty)$

β) Αν F αρχική της f στο $\mathbb{R}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι ισχύει :

$$|F(\beta) - F(\alpha)| \leq |\beta - \alpha| \quad \text{για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Αρσάκειο

3.208 Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) \cdot \ln(f(x)) + 2x \cdot f'(x) = 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ (1)
- $f(x) > 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$
- $f(1) = e$

A. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}, x \in (0, +\infty)$

B. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .

Γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και να αποδείξετε ότι

$$2 \cdot e^{\frac{1}{\sqrt{x}} - 1} \geq 3 - x, x > 0$$

Δ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_e^{e^2} f^{-1}(x) \cdot \left(1 - \frac{2}{\ln x}\right) dx$

E. Να αποδείξετε ότι $e + \sqrt[3]{e} > 2 \cdot \sqrt[5]{e}$.

Αρσάκειο

Μ. Παπαρηγοράκης

3.209 Έστω η παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ συνάρτηση f με $f(\beta) = 2f(\alpha)$ και

$$f'(x) = 2f^2(x) - 4f(x) + 4 \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta]$$

Να δείξετε ότι :

A. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και ότι $f(\alpha) > 0$.

B. $f(x) > 0$ και $f'(x) \geq f^2(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Γ.
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq \ln 2$$

Δ. Αν $f(\alpha) > 1$, τότε :

i) Η f είναι κυρτή.

ii) Να βρείτε $\xi \in [\alpha, \beta]$ ώστε το εμβαδόν που ορίζεται από την C_f τις ευθείες $x = \alpha$, $x = \beta$ και την

εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να γίνεται ελάχιστο

Αρσάκειο

3.210 Έστω συνάρτηση f με $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων . Αν για τη συνάρτηση f ισχύει : $f'(x) + f^2(x) = 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε

A. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_x^y \frac{du}{4-u^2}$ με $x, y \in (-2, 2)$

B. Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{2(e^{4x} - 1)}{e^{4x} + 1}$

Γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα , να βρείτε το σημείο καμπής της και να δείξετε ότι $|f(x)| \leq 4|x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την ευθεία με εξίσωση $y = 4x$ και την οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

3.211 Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$f'(x) + 1 = 2x(f(x) + x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} . \text{Θεωρούμε επίσης συνάρτηση } g(x) = F(x) - F(2-x), x \in \mathbb{R} \text{ όπου}$$

F είναι αρχική της f .

A. Να αποδείξετε ότι : $f(x) = e^{x^2} - x, x \in \mathbb{R}$

B. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή και ότι η $(e+1)f(e^3) < f(e^4) + ef(e^2)$

Γ. Να λύσετε στο διάστημα $(0, +\infty)$ την εξίσωση $e^{x^4-x^2} = \frac{x}{x^2}$

Δ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

E. Να αποδείξετε ότι $4 \cdot \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} f(2t) dt < \int_0^2 f(t) dt$

Λεόντιος



3.212 Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύουν :

- Δεν υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που να είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon : y = x$, και
- $(f'(x) - 1)^2 + e^x f''(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $O(0,0)$ έχει κλίση $\frac{1}{2}$ και η ευθεία $y = x + \ln 2$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $-\infty$, τότε:

A Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη

B Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{1}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

Γ Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \cdot f(x))$

Δ Αν E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$, $x=1$, να δείξετε ότι : $4E < 1$

E Αποδείξτε ότι $\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{e^x + 1} dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{e^{-x} + 1} dx = \alpha$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ Δούκας

3.213 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x) + f(x) = 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

A. Να βρείτε τις ρίζες της f και το πρόσημο της.

B. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι $f^{-1}(x) = \frac{x^3 + x}{2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και της ευθείας $\varepsilon : y = x$.

Δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και την ευθεία $\varepsilon : y = x$.

E. Να δείξετε ότι $\int_0^1 \frac{2}{1 + 3f^2(t)} dt = 1$. Αρσάκειο

3.214 Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$

και $(f'(x))^2 + 2f'(x) + \frac{1}{x^2 + 1} = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

B. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της

Γ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της

Δ. Αν $f^{-1}(x) = \frac{1 - x^2}{2x}$, $x \in (0, +\infty)$, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f^{-1}(x) \cdot \ln x$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = e$

3.215 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν

$$f(x) = xe^x + \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \text{ και } g(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x - \frac{3}{2}.$$

Αν οι γραφικές παραστάσεις των f, g δέχονται σε κοινό τους σημείο, κοινή εφαπτομένη (ε) που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, τότε :

A. Να δείξετε ότι $\alpha = 0$ και η κοινή εφαπτομένη είναι η $\varepsilon: y = x$.

B. Αν E_1 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , την ευθεία (ε) και την ευθεία με εξίσωση $x = t$, $t > 0$, να δείξετε ότι :

$$E_1(t) = t \cdot e^t - e^t - \frac{1}{2}t^2 + 1, t > 0 \text{ και να υπολογίσετε το } \lim_{t \rightarrow +\infty} E_1(t).$$

Γ. Αν E_2 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g , την ευθεία (ε) και την ευθεία με εξίσωση $x = t$, $t > 0$, να δείξετε ότι :

$$E_2(t) = \frac{1}{4}e^{2t} - 2e^t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{7}{4}, t > 0$$

Δ. Να δείξετε ότι $E_1(t) < E_2(t) + t \cdot e^t$, για κάθε $t > 0$

Αρσάκειο

3.216 Θεωρούμε συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύουν

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$$

• g ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $e^{g(x)} + g(x) - x - \ln x = e^{x+\ln x}, x > 0$

A. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και ναδειχθεί ότι $g(x) = x + \ln x, x > 0$

Έστω F αρχική της f με $F(0) = 0$ τότε

B.α) Να λυθεί η ανίσωση $F(2^x) \leq F(2 - \ln x)$ στο $(0, +\infty)$ όπου F αρχική της f

β) Να υπολογισθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x F(x)}{1 - \sin x}$

Γ. Η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0, 1)$

Δ. Δείξτε ότι F κυρτή στο $(-\infty, 0)$

3.217 Δίνονται οι συναρτήσεις :

• $f(x) = x \ln \alpha - \alpha \ln x, \alpha > 0, x \in (0, +\infty)$ με • $f(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$ και

• $g(x) = x^2 - 2x \ln x, x > 0$

A Να δείξετε ότι $\alpha = e$

B α) Να δείξετε ότι $e^x \geq x^e$, για κάθε $x > 0$

β) Να δείξετε ότι $e^4 - e^2 > 3^{e+1} - 2^{e+1}$

Γ Να δείξετε ότι $g(x) \neq 0$, για κάθε $x > 0$

Δ α) Να δείξετε ότι η $\frac{1}{g(x)}$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη

β) Αν $|h(x)| \cdot g(x) \leq f(x)$ για $x > 0$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$

Αρσάκειο



3.218 Έστω συνάρτηση $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $g(1) = 0$ και

$$(x^3 + x)g'(x) + 2x^2g(x) = x - 1, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Έστω επίσης η κυρτή συνάρτηση $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε :

$$\int_{|f(-1)|}^{|f(-1)+2|} g(x) dx = 0. \text{ και } (x^2 + 1)g(x) \geq (1 - x) \ln(f(1)) \text{ για κάθε } x > 0$$

A. Να αποδείξετε ότι $g(x) = \frac{x - 1 - \ln x}{x^2 + 1}$ και ότι $g(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$

B. Να αποδείξετε ότι $f(1) = 1$, $f(-1) = -1$ και ότι υπάρχει $\xi \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε: $f(\xi) + f'(\xi) = \xi + 1$

Γ. α. Να αποδείξετε ότι: $f(x) \leq 1 + (x - 1)f'(x)$ για κάθε $x \in [-1, 1]$

β. Έστω $f(0) = -1$ και Ε το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x = -1$. Να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ για

$$\text{κάθε } x \in [-1, 0] \text{ και ότι: } \int_{-1}^0 f^2(x) dx > \frac{1 - 2E}{3}$$

Αρσάκειο

3.219 Θεωρούμε συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο

$$f'(x)f''(x) \neq 0$$

$$f''(x) > f'(x), x \in \mathbb{R}$$

A. Να αποδειχθεί $f'(0) - f(0) < f'(1) - f(1)$

B. Δείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, 1) : f'(\xi_1) < f''(\xi_2)$

$$\text{Επιπλέον αν ισχύει} \quad f'(1) = \int_0^1 f''(x) dx \quad \text{και} \quad f''(\xi_2) = -2$$

Γ.α) Δείξτε ότι f είναι κοίλη

$$\beta) \quad \text{Δείξτε ότι } \int_0^1 x f''(x) dx > 0$$

γ) Δείξτε ότι υπάρχει $\xi_3 \in (0, 1) : f''(\xi_3) < 0$

Δ. Αν η εξίσωση $(f \circ f^{-1})(e^x - 2) = f''(x) + \ln x - x$ έχει ρίζα την $\xi_3 \in (0, 1)$ τότε να αποδειχθεί ότι $0 < \xi_3 < \ln 2$

Μ. Παπαρηγοράκης

3.220 Έστω μια μη σταθερή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $f^3(x) + f(x) = x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

και F μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\int_{F(1)}^0 (f^2(x) - 2f(x) + 1) dx = 0$

A. i) Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο 1 ότι είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφη της f .

ii) Να βρείτε το $\int_1^3 f(x) dx$

B. Αν δίνεται ότι η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(1) = 1$ να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 1} [(f(x) - 1) \ln(x - 1)] \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{F(x)}$$

Γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τη $C_{f^{-1}}$ και την ευθεία $x=0$.

3.221 Έστω $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει: $\frac{f^2(0) + f^2(1) + 2}{2} \leq f'(x)$

και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει:

$$g''(x) = g(x), \quad g'(0) = 2 \quad \text{και} \quad g(0) = -1$$

A. Να βρείτε τα $f(0)$ και $f(1)$ καθώς και τον τύπο της f

B. Να βρείτε τον τύπο της g , να τη μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το πεδίο τιμών της.

Γ. Αν $f(x) = 2x - 1$ και $g(x) = \frac{e^{2x} + 3}{2e^x}$ να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$ (Μονάδες 2) και να βρείτε το

εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f τη C_g και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$

Δ. Να υπολογίσετε τα ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\eta \mu x + \sigma \nu x} dx \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{e^x + 1} + x e^x dx \quad \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\ln x}{x + 1} dx$$

3.222 Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

- $f(x) = 2f'(x) - f''(x) - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $e^{f(0)} = f(0) + 1$
- $f'(0) = 1$

Έστω h παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $h(0) = 1$.

A. i) Να βρείτε τον τύπο της f

ii) Για $f(x) = e^x - 1$ να βρείτε την κυρτότητά της f (Μονάδες 1) και το πρόσημο της h

B. Να αποδείξετε ότι $\int_2^4 f(x) dx > 6$.

Γ. Αν $f(1 - g(x)e^{-g(x)}) = f(e^{-g(x)}e^{x^2} - x^2e^{-g(x)})$ να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό ξ ($0 \leq \xi$) ώστε $g'(\xi) = 0$

Δ. Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(e^{h(x)}) = f(e^a)$ για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$

