**Γ Λυκείου**

Μαθηματικά
Προσανατολισμού

2016 - 2017

Μίλτος Παπαγρηγοράκης
Χανιά

# ανάλυση

*β΄ μέρος*

*333*

*Ταξινομημένες ασκήσεις για λύση*

Παράγωγοι

*Ταξη: Γ Γενικού Λυκείου*
*Μαθηματικά Θετικών Σπουδών*
*Μέρος Β:  Διαφορικός Λογισμός*
*Έκδοση 16.08*



*Μίλτος Παπαγρηγοράκης*
*Μαθηματικός M.Ed.*
*Χανιά 2016*

*Ιστοσελίδα:   http:users.sch.gr/mipapagr*

# 2 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ- ΟΡΙΣΜΟΣ

**2.01** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 2

**2.02** Να εξεταστεί αν είναι παραγωγίσιμη στο 0 η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} xe^{\frac{1}{x}} & \text{αν } x<0 \\ 1-\text{συν}x & \text{αν } x\ge 0\end{cases}$

**2.03** Αν $f(x)=\begin{cases} \alpha x+\beta & \text{αν } x\le 2 \\ \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & \text{αν } x>2\end{cases}$ βρείτε τα $\alpha,\beta\in R$ ώστε η $f$ να είναι παραγωγίσιμη στο 2

**2.04** Αν $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{x-3}=-7$ και $f$ συνεχής στο $x_0=3$, δείξτε ότι η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο 3

**2.05** Έστω συνάρτηση $f$ ορισμένη στο $[0.+\infty)$ και ισχύει ότι $\eta\mu x\le f(x)\le x\sqrt{x}+\eta\mu x$, για $x\ge 0$. Δείξτε ότι η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$

**2.06** Αν για την συνάρτηση $f:R\to R$ ισχύει $|f(x)-x^2|\le (x-1)^2$ για κάθε $x\in R$, να δείξετε ότι η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$

**2.07** Έστω $f,g:R\to R$ συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $\alpha\in R$ με $f'(\alpha)=g'(\alpha)=3$. Υπολογίσετε τα:

A) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}$ B) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{(f(x))^2-(f(\alpha))^2}{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}$

Γ) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\alpha^2 f(x)-x^2 f(\alpha)}{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}$ Δ) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{g(\alpha)f(x)-f(\alpha)g(x)}{\sqrt{x}-\sqrt{\alpha}}$

**2.08** Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_o$ με $f(x_o)=3$, $f'(x_o)=2$. Βρείτε το $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{2f(x)-6}{x-x_o}$

**2.09** Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ παραγωγίσιμη στο 0 και στο 1 με $f(0)=f(1)$. Να αποδείξετε ότι η $g(x)=\begin{cases} f(2x) & \text{αν } x\le \frac{1}{2} \\ f(2x-1) & \text{αν } x>\frac{1}{2}\end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\frac{1}{2}$ αν και μόνο αν $f'(0)=f'(1)$

**2.10** Έστω $f:R\to R$ παραγωγίσιμη στο $x_o=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}=3$. Αποδείξτε ότι $f'(0)=3$

**2.11** Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ παραγωγίσιμη στο 1 με ότι $f'(1)=2$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\left[f(1)-f\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\right]=2$

**2.12** Η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_o\in R$. Δείξτε ότι η $g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{αν } x\le x_o \\ f'(x_o)(x-x_o)+f(x_o) & \text{αν } x>x_o\end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_o$

**2.13** Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ παραγωγίσιμη στο 0 και ισχύει $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$ για κάθε $x,y\in R$, δείξτε ότι η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $R$.

**2.14** Αν για την συνεχή συνάρτηση $f$ ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x+2)}{x}=3$ τότε:

A) Να δείξετε ότι η $f$ είναι παραγωγισιμη στο 2 και ότι $f'(2)=3$

B) Να βρεθούν τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f^2(x)-f(x)}{x^2-4}$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\eta\mu x\, f\left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)\right)$

**2.15** Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$, παραγωγίσιμη στο $0$. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x\to 0}\frac{f^2(3x)-f^2(2x)}{x}=2f(0)f'(0)$$

**2.16** Αν η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $f'(1)=\alpha$ και ισχύει: $f(xy)=xf(y)+yf(x)$ για κάθε $x,y\in(0,+\infty)$. Να δειχθεί ότι $f'(x_0)=\alpha+\frac{f(x_0)}{x_0}$ για κάθε $0<x_0\neq 1$

**2.17** ** Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to(0,+\infty)$ τέτοια ώστε $f^3(x)-2x^4f(x)=8$, για κάθε $x\in R$

Να δείξετε ότι η $f$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$ και ότι $f'(0)=0$

**2.18** Έστω η συνάρτηση $f$ ορισμένη στο $R$ και παραγωγίσιμη στο $x\in R$, να δείξετε ότι

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+3h)-f(x-2h)}{h}=5f'(x)$$

## ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ-ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

**2.19** Βρείτε τις παράγώγους των συναρτήσεων

Α) $f(x)=\frac{e^x}{1+\sqrt{x}}$ Β) $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$

Γ) $g(x)=\sqrt{x}\eta\mu x+\frac{\ln x}{x-1}$ Δ) $f(x)=\frac{\ln x}{e^x}$

Ε). $g(x)=\frac{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{1+\varepsilon\varphi x}$ Στ) $g(x)=\frac{\ln x}{x+2}$

Ζ) $f(x)=\frac{2+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}$ Η) $f(x)=\frac{x^2}{\ln x}$

Θ) $h(x)=\frac{2x+1}{e^x}$ Ι) $f(x)=\frac{1-\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$

**2.20** Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{h\to 0}\frac{e^{1+h}-e}{h}$, $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x+1}-e}{x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-1}{x}$

**2.21** Να βρείτε όλα τα πολυώνυμα $P$ με $P(x)=\left[P'(x)\right]^2$ για κάθε $x\in R$.

**2.22** Έστω συνάρτηση $f:R\to R$ παραγωγίσιμη στο $x_o=e$. δείξτε ότι

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(e^x)-xf(e)}{x-1}=ef'(e)-f(e)$$

**2.23** Να υπολογίσετε το $\lim_{h\to 0}\frac{e^{\eta\mu(\pi+h)}-1}{h}$

**2.24** Να αποδείξετε ότι

Α) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ Β) $\lim_{x\to 2}\frac{x^5-2^5}{x-2}=80$

**2.25** Η συνάρτηση $g$ είναι παραγωγίσιμη στο $R$, με $g(e)=1$ και $g'(e)=2$. Αν $f(x)=x^2g(x)+\frac{x^2}{\ln x}$ να βρείτε τον $f'(e)$

**2.26** Έστω συνάρτηση $f$ για την οποία ισχύει: $f(x+y)=e^xf(y)+e^yf(x)+xy+\alpha$ για κάθε $x,y\in R$ Να αποδείξετε ότι:

Α) $f(0)=-\alpha$ Β) η $f(0)=0$

Γ) Αν είναι παραγωγίσιμη στο R τότε ισχύει ότι $f'(x_o)=f(x_o)+f'(0)e^{x_o}+x_o$, $x_o\in R$.

Δ) Αν η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $0$ τότε είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f'(x_o)=f(x_o)+f'(0)e^{x_o}+x_o$ για κάθε $x_o\in R$

**2.27** Αν μια συνάρτηση $f:R\to R$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=\alpha,\alpha>0$, να αποδείξετε ότι:

Α) $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)\ln x-f(\alpha)\ln\alpha}{x-\alpha}=\frac{f(\alpha)}{\alpha}+f'(\alpha)\ln\alpha$

Β) $\lim_{x\to\alpha}\frac{\alpha f(x)-xf(\alpha)}{x^2-\alpha x}=f'(\alpha)-\frac{f(\alpha)}{\alpha}$

## ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΘΕΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

**2.28** Βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

$f(x)=ημ^2x-συν^2 3x$,

$f(x)=εφ^2(4x^3+1)$

$f(x)=\ln^3\left(x^2+3x\right)+\ln 3$

$f(x)=συν\sqrt{\ln^3(2x)}+\sqrt{2}$

$f(x)=ημ\left(2^x+3^x\right)+ημt \;\;, t\in R$

$f(x)=\left(x^2+3\right)^4\left(x^3-5\right)^3+y^2 \;\;, y\in R$

**2.29** Βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

Α) $f(x)=συν\sqrt{\ln x}$, $x>1$

Β) $f(x)=\log\left(2^x+3^x\right)$

Γ) $f(x)=\left(x^2+3\right)^4\left(2x^3-5\right)^3$

**2.30** Βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

Α) $f(x)=\begin{cases} x^2ημ\frac{1}{x} & αν \quad x\neq 0 \\ 0 & αν \quad x=0 \end{cases}$

Β) $f(x)=x^2+|x-3|+2$

Γ) $f(x)=x^{\log x}$ , $x>0$

Δ) $f(x)=(ημx)^x$, $x\in\left(0,\frac{π}{2}\right)$

Ε) $f(x)=2^{εφx}$

**2.31** Δίνεται η $f(x)=e^x+x^3+x$, $x\in R$.

Α) Αποδείξτε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και βρείτε το πεδίο ορισμού της $f^{-1}$

Β) Αν η $f^{-1}$ είναι παραγωγίσιμη στο $D_{f^{-1}}$, να δείξετε ότι $\left(f^{-1}\right)'(1)=\frac{1}{2}$.

**2.32** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και ισχύει: $f^3(x)+x^2f(x)=2x^2ημx$, για κάθε $x\in R$ να βρεθεί η $f'(0)$.

**2.33** Α) Αν $f(x)=c(x-α)(x-β)(x-γ)$ με $c,α,β,γ\in R$ και $x\neq α,β,γ$ τότε να αποδείξετε ότι:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-α}+\frac{1}{x-β}+\frac{1}{x-γ}$$

Β) Να βρεθεί η $f'$ αν $f(x)=\dfrac{(x^2+5)^3(1+x^4)^2}{\sqrt{1+x^2}}$

**2.34** Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$.

Α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $y=|f(x)|$ είναι παραγωγίσιμη στο R.

Β) Αν ισχύει ότι $f(-2)=-5$ και $f'(-2)=4$ να αποδείξετε ότι $|f(-2)|'=-4$

**2.35** Η συνάρτηση f είναι παραγωγισιμη στο R και ισχύει $f(x^2)+3f\left(2x^2-1\right)=5\ln x+3x$ για κάθε $x>0$. Να βρεθεί το $f'(1)$.

**2.36** Αν μια συνάρτηση $f:R\to R$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=α, α>0$, να αποδείξετε ότι:

Α) $\lim\limits_{x\to α}\dfrac{f(x)\ln x-f(α)\ln α}{x-α}=\dfrac{f(α)}{α}+f'(α)\ln α$

Β) $\lim\limits_{x\to α}\dfrac{αf(x)-xf(α)}{x^2-αx}=f'(α)-\dfrac{f(α)}{α}$

**2.37** Έστω η συνάρτηση $f(x)=συνx, x\in(0,π)$

Α) Να δείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση $f^{-1}$

Β) Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι $f^{-1}$ είναι παραγωγίσιμη, να δείξετε ότι

$\left(f^{-1}\right)'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x\in(-1,1)$

**2.38** Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία είναι $f(x+y)=f(x)f(y)$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x,y\in R$. Αν ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=\ell\in R$ να αποδειχτεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R

**2.39** Έστω η συνάρτηση $f$ παραγωγίσιμη στο $0$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in R$ να ισχύει $f(f(x)) = f(x) + 2x$ .Δείξτε ότι $f'(0) = -1$ ή $f'(0) = 2$

**2.40** Οι συναρτήσεις $f, g$ είναι παραγωγίσιμες στο $R$ και για κάθε $x \in R$ ισχύει ότι $g(x) = e^{f(x^2)}$, με $f'(1) \neq 0$, να αποδειχτεί ότι $g'(1) = 2g(1)f'(1)$

**2.41** Να βρείτε όλα τα πολυώνυμα $P(x)$ για τα οποία ισχύει ότι $P(x) = [P'(x)]^2$

**2.42** Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 ημ\dfrac{2}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Να εξετάστε αν η $f'(x)$ είναι συνεχής στο $x_o = 0$

**2.43** Έστω η συνάρτηση $f$ παραγωγίσιμη στο $R$ . Να αποδείξετε ότι

Α) Αν η $f$ είναι άρτια τότε η $f'$ είναι περιττή

Β) Αν η $f$ είναι περιττή τότε η $f'$ είναι άρτια

Γ) Αν η $f$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και περιττή τότε:

- α) Η $C_f$ διέρχεται από το $(0,0)$
- β) $f''(-x) = -f''(x)$
- γ) $f''(0) = 0$

Δ) Αν η $f$ είναι άρτια και $g(x) = (x^2+1)f(x) + 3x$ τότε $g'(0) = 3$

**2.44** Έστω η συνάρτηση $f:[0,+\infty) \to R$ ώστε $f(\sqrt{x}) = \sqrt{x}ημ\sqrt{x} + e^x$, $\forall\ x \geq 0$. Αν $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ τότε

να δείξετε ότι $f'(x) = ημx + xσυνx + 2xe^{x^2}$ και να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-1}{x^2}$

**2.45** Έστω ότι η συνάρτηση $f: R \to R$ είναι παραγωγίσιμη στο $R$ και αντιστράψιμη. Να αποδειχτεί ότι για κάθε σημείο με τετμημένη $x_0 \in R$ ισχύει ότι το γινόμενο των κλίσεων των εφαπτομένων της $C_f$ στο $x_0$ και της $C_{f^{-1}}$ στο $f(x_0)$ ισούται με ένα.

## ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

**2.46** Θεωρούμε συνάρτηση $f$ παραγωγίσιμη στο R με παράγωγο συνεχή. Αν $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f'(4-x)}{x-1} = 5$

να δείξετε ότι $f''(3) = -5$

**2.47** Έστω μια συνάρτηση $f$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο R. Να αποδείξετε ότι:

Α) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f'(x+2h) - f'(x)}{h} = 2f''(x)$ , $x \in R$

Β) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f'(x-h) - f'(x)}{h} = -f''(x)$, $x \in R$

Γ) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{4f'(x+2h) + 6f'(x-h) - 10f'(x)}{h} = 2f''(x)$ για κάθε $x \in R$

**2.48** Να αποδειχτεί ότι:

Α) Αν $y = \ln(e^{2x}+1) - x$ τότε $y'' = (1-y')(1+y')$

Β) Αν $y = ημ(\ln x) + συν(\ln x)$ τότε $x^2y'' + xy' + y = 0$

**2.49** Αν η συνάρτηση $f$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $R$ και για κάθε $x \in R$ ισχύει $f(x^2) = xf(x)$, να αποδείξετε ότι $f''(1) = 0$.

**2.50** Να αποδείξετε ότι:

Α) Αν $f(x) = συνx$, τότε $f^{(ν)}(x) = συν\left(x + \dfrac{νπ}{2}\right)$

Β) Αν $f(x) = xe^x$ τότε $f^{(ν)}(x) = e^x(x+ν)$

## ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

**2.51** Βρείτε την εφαπτομένης της $C_f$ στο

$$x_0=0 \text{ αν } f(x)=\begin{cases} x^2 ημ\frac{1}{x} & αν \quad x>0 \\ x^3 & αν \quad x\le 0 \end{cases}$$

**2.52** Μια συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $x_o=1$ και ισχύει $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-x^2}{x-1}=7$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο $A(1,f(1))$ είναι κάθετη στην ευθεία $x+9y+5=0$

**2.53** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3$. Να βρείτε τις εφαπτόμενες της $C_f$ που διέρχονται από το $M(-2,-8)$

**2.54** Έστω συνάρτηση $f$ για την οποία ισχύει ότι: $x\ln x\le f(x)\le x^2-x$ για κάθε $x\in\Delta$. Να αποδείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $C_f$ στο σημείο $M(1,f(1))$.

**2.55** Αν $f:(0,+\infty)\to R$ με $f(x)=\frac{1}{x}$ και $α>0$, να αποδειχτεί ότι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν οι ημιάξονες $Ox,Oy$ και η εφαπτομένη της καμπύλης στο $x_o=α$ είναι ανεξάρτητο του $α$.

**2.56** Να βρεθούν οι εφαπτόμενες των $C_f$, $C_g$ όταν $f(x)=x^2+2$ και $g(x)=-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{2}$ που τέμνονται στον $y'y$ και είναι κάθετες μεταξύ τους.

**2.57** Αν $f(x)=α\ln x+βx^2+3$, να βρείτε τα $α,β\in R$ ώστε η ευθεία ε: $2x-y+4=0$ να είναι εφαπτόμενη της $C_f$ στο σημείο της $A(1,f(1))$.

**2.58** Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f$ ισχύει ότι $f(2+x)-f(2-x)=-2x$, $\forall x\in R$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο $(2,f(2))$ είναι κάθετη στην $y=x$.

**2.59** Αν $f(x)=\begin{cases} αx^2+2αx+β+α & x\ge 2 \\ \frac{γ}{x+1} & x<2 \end{cases}$, να βρεθούν τα $α,β,γ\in R$ ώστε η εφαπτομένη της $C_f$ στο $A(2,f(2))$ να είναι παράλληλη προς την $2x+y-1=0$

**2.60** Αν $f(x)=4-x^2$ και $g(x)=-x^2+8x-20$. Να βρείτε τις κοινές εφαπτόμενες των $C_f$ και $C_g$.

**2.61** Για ποια τιμή του $α\ne 0$ η εφαπτόμενη της $f(x)=x^2-3x$ στο $(1,f(1))$ είναι εφαπτόμενη της $g(x)=\frac{α}{x}$

**2.62** Δείξτε ότι οι γραφικές παραστάσεις των $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ και $g(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}ημx$ έχουν κοινή εφαπτομένη σε κάθε κοινό τους σημείο.

**2.63** Θεωρούμε την συνάρτηση $f$ που έχει συνεχή πρώτη παράγωγο στο $R$ με $f'(x)\ne 0$ για κάθε $x\in R$. Αν η $C_g$ της $g$ με $g(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}$ τέμνει τον άξονα $x'x$, να αποδειχτεί ότι η εφαπτομένη στο σημείο τομής, σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $45^o$

**2.64** ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4-4x^2-3x$. Να βρεθεί ευθεία που να είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f$ σε δύο διαφορετικά σημεία της. (mathematica)

2.65 Μία συνάρτηση $f:R\to R$ έχει την ιδιότητα: $f(x-2)\le x^2-3x+2\le f(x-3)+2x-4$, $\forall x\in R$. Έστω μεταβλητή ευθεία η οποία διέρχεται από το $M\left(-\frac{1}{2},0\right)$ και τέμνει τη $C_f$ σε δύο διαφορετικά σημεία Α και Β. Να βρείτε τον τύπο της $f$ και να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της $C_f$ στα Α και Β τέμνονται κάθετα.

2.66 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\alpha\cdot\ln x$, $x>0$, όπου $\alpha\in R$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της $C_f$ στο σημείο της $M(1,f(1))$ και αποδείξετε ότι διέρχεται από σταθερό σημείο Ρ για κάθε $\alpha\in R$.

2.67 Αν η ευθεία $y-2x=0$ είναι η εφαπτομένη του διαγράμματος της $y=f(x)$, στο σημείο της με $x_o=-1$, να βρεθεί η εφαπτομένη στη $C_g$ της $g(x)=f\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ στο σημείο με $x_1=1$

2.68 * Αν $f(x)=\frac{1}{x}$ και $g(x)=e^{-x}$, αποδείξετε ότι οι $C_f$ και $C_g$ έχουν κοινή εφαπτομένη.

2.69 Δείξτε ότι οι γραφικές παραστάσεις των $g(x)=e^x$ και $f(x)=2x^2$, έχουν κοινή εφαπτομένη

2.70 Να βρείτε τον $\alpha\in R$ ώστε η συνάρτηση $f$ με $f(x)=\alpha^x$, να έχει εφαπτομένη την $y=x$.

2.71 Έστω $f$ δευτεροβάθμια πολυωνυμική συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι: $3f(x+1)-2f(x-2)=x^2+14x-5$, $\forall x\in R$

Α) Να βρεθεί ο τύπος της $f$.

Β) Αποδείξτε ότι οι εφαπτόμενες της $C_f$ που άγονται από το σημείο $A\left(1,-\frac{1}{4}\right)$, είναι κάθετες.

2.72 ** Έστω συνάρτηση $f$ παραγωγίσιμη στο $R$, και ισχύει $f(\ln x)=x\ln x-x$, $x>0$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου το οποίο σχηματίζεται από την εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο της με $x_o=1$ και τους άξονες $x'x$ και $y'y$

2.73 ** Έστω η $f(x)=\frac{\ln(\alpha x)}{x}$ με $\alpha,x>0$

Α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της $C_f$ στο σημείο $(x_o,f(x_o))$.

Β) Αποδείξτε ότι οι παραπάνω εφαπτόμενες στο σημείο $(x_o,f(x_o))$, καθώς μεταβάλλεται το $\alpha$, διέρχονται από το ίδιο σημείο.

2.74 Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$, με $f(x^2)+f(x)=3\cdot\ln x+4$

Α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της γραφικής παράστασης της $f$ στο $(1,f(1))$

Β) Υπολογίστε το όριο: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x\cdot f(x)-2}{x^2-1}$.

2.75 Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^{\alpha x}+x$, $\alpha\in R^*$

Α) Βρείτε το σημείο Μ της $C_f$ στο οποίο η εφαπτόμενη διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του σημείου Μ όταν το $\alpha$ διατρέχει το $R$

2.76 Θεωρούμε τις παραβολές $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2\lambda x-2\lambda(1-\lambda)$, $\lambda\in R$

Α) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω παραβολές έχουν μία κοινή εφαπτομένη.

Β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία των $C_f$ για τα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$, βρίσκονται στην ευθεία $y=x$.

Γ) Αν $\lambda=0$, να βρείτε το σύνολο των σημείων του επιπέδου από τα οποία άγονται κάθετες εφαπτόμενες τη συνάρτηση $f$

## *Η ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΩΣ ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ*

2.77 Ενα σημείο $M(x,y)$ κινείται στην $C_f$, με $f(x)=\sqrt{x}$. Να βρείτε τη θέση όπου ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του.

2.78 Σε ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $Oxy$ ένα κινητό κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=e^x$, $x>0$. Έστω $M$ η θέση του κινητού στο επίπεδο κάθε στιγμή και έστω $A$, $B$ οι προβολές του $M$ στους άξονες $Ox$ και $Oy$ αντίστοιχα. Η τετμημένη του σημείου $M$ μεταβάλλεται με ρυθμό $1\ m/sec$. Τη χρονική στιγμή $t_o$ που το κινητό βρίσκεται στο σημείο $(1,e)$, βρείτε το ρυθμό μεταβολής:

Α) του εμβαδού του τριγώνου $OAM$ Β) της απόστασης $(AB)$

Γ) της γωνίας που σχηματίζει η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο $M$, με τον άξονα $x'x$

2.79 Ένα αυτοκίνητο $A$ απομακρύνεται από τη διασταύρωση δύο κάθετων δρόμων $Ox$ και $Oy$, που κατευθύνονται προς τα ανατολικά και βόρεια αντίστοιχα. Η απόσταση του αυτοκινήτου από το δρόμο $Oy$ ισούται με το τετράγωνο της απόστασής του από το δρόμο $Ox$

Το αυτοκίνητο $A$ απομακρύνεται προς τα ανατολικά με ρυθμό $v=\sqrt{10}\ km/min$.

Α) Με ποια ταχύτητα απομακρύνεται το αυτοκίνητο προς τα Βόρεια; (συναρτήσει της θέσης του)

Β) Να βρείτε την απόσταση του αυτοκινήτου $A$ από το σημείο $O(0,0)$ ως συνάρτηση της απόστασής του από τον δρόμο $Oy$.

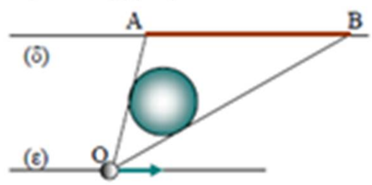
Γ) Πόσο γρήγορα απομακρύνεται το $A$ από το σημείο $O(0,0)$ τη χρονική στιγμή που έχει απομακρυνθεί $3\ km$ προς τα βόρεια;

2.80 Μια κολόνα ύψους $4m$ φωτίζει ένα στενό δρομάκι, το οποίο καταλήγει κάθετα σε έναν τοίχο. Η λάμπα βρίσκεται $1m$ κάτω από την κορυφή της κολόνας. Ένας παίχτης του μπάσκετ με ύψος $2m$ προχωράει προς τον τοίχο με ταχύτητα $1m/sec$. Αν η κολόνα απέχει $6m$ από τον τοίχο, τότε:

Α) να αποδείξετε ότι το ύψος $y(t)$ της σκιάς που ρίχνει ο άνδρας στον τοίχο ως συνάρτηση της απόστασης του από την κολόνα είναι $y(t)=3-\dfrac{6}{x(t)}$, $2<x(t)<6$

Β) να βρείτε τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνει το ύψος της σκιάς που ρίχνει ο άνδρας στον τοίχο όταν βρίσκεται σε απόσταση $2m$ από τον τοίχο.

2.81 ***Το κινητό $O$ κινείται με σταθερή ταχύτητα $2m/sec$ κατά μήκος της ευθείας $(\varepsilon)$. Κυκλικό εμπόδιο έχει το κέντρο του στην μεσοπαράλληλη των ευθειών $(\varepsilon),(\delta)$, έχει διάμετρο $2m$ ίση με το μισό της απόστασης των $(\varepsilon),(\delta)$ και δημιουργεί την «σκιά» $AB$. Να βρεθεί ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής του μήκους $AB$ την στιγμή κατά την οποία το τρίγωνο $OAB$ γίνεται ορθογώνιο για πρώτη φορά (Άσκηση από www.mathematica.gr)



# Θ. Rolle –Θ.Μ.Τ.

2.82 Εφαρμόστε το θ. Rolle για τη συνάρτηση $f(x)=(x-1)(x+\eta\mu x)$ στο διάστημα $[0,1]$

2.83 Αν $f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha x+\beta & x<0 \\ 3+(\gamma-\alpha)x & x\geq 0 \end{cases}$ να βρεθούν οι $\alpha,\beta,\gamma\in R$ ώστε να εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $[-1,1]$ και να βρεθεί $\xi\in(-1,1)$ ώστε $f'(\xi)=0$.

2.84 θεωρούμε μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής και μη μηδενική στο $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ ώστε $f'(x_o)=f(x_o)\varepsilon\varphi x_o$.

2.85 Δίνεται ότι η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, $\alpha>0$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $\frac{f(\alpha)}{\alpha}=\frac{f(\beta)}{\beta}$. Να δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $\xi f'(\xi)=f(\xi)$

2.86 Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β). Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε

$$3\xi^2\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta^3-\alpha^3}=f'(\xi)$$

2.87 Έστω $f,g$ συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$ παραγωγίσιμες στο $(\alpha,\beta)$ με $\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}=\frac{f(\beta)}{g(\beta)}$ και $g(x)g'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε να ισχύει $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(\xi)}{g(\xi)}$

2.88 Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο R με $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$ και $\frac{f(2)}{f(1)}=e$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=f(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$.

2.89 Έστω η $f:[\alpha,\beta]\to R$ παραγωγίσιμη, ώστε: $f^2(\alpha)-f^2(\beta)=\alpha^2-\beta^2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ έτσι ώστε: $f(\xi)f'(\xi)=\xi$

2.90 Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[-1,1]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(-1,1)$, ώστε $2f'(\xi)=5\xi^4\left(f(1)-f(-1)\right)$.

2.91 Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f,g$ που είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ παραγωγίσιμες στο $(\alpha,\beta)$ με $f(x)>0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και $\ln f(\alpha)-\ln f(\beta)=g(\beta)-g(\alpha)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f'(\xi)+f(\xi)\cdot g'(\xi)=0$

2.92 Έστω $f:R\to R$ τρεις φορές παραγωγίσιμη. Υποθέτουμε ότι $f(1)=f(0)=f'(0)=f''(0)=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x\in(0,1)$ ώστε $f^{(3)}(x)=0$.

2.93 Α) Δείξτε ότι η $f(x)=x^3+\lambda x^2-3x+1$ για κάθε $x\in R$ με $\lambda\in R$ δεν είναι $1-1$.

Β) Να δείξετε ότι εφαρμόζεται το θ. Rolle για τη συνάρτηση $g(x)=e^{f(x)}+x^2+\lambda x-3$

2.94 Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=e^x+2x$ και $g(x)=e^{-x}-x^3$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο που βρίσκεται στον $y'y$

## ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

2.95 Να λύσετε την εξίσωση $1-2^x+3^{x-1}=0$

2.96 Να λύσετε την εξίσωση $\ln\left(1+xe^x\right)=x$

2.97 Να λύσετε την εξίσωση $2^x+5^x=2+5x$

2.98 Να λύσετε την εξίσωση $5^x=x+4^x$

2.99 Να λύσετε την εξίσωση $\ln x-x+1=0$

2.100 Να λύσετε την εξίσωση $xe^x+1=e^x$

2.101 Να λύσετε την εξίσωση: $x^2+x+\ln x=2$

2.102 Λύστε την εξίσωση $(x+3)^{96}=(x+1)^{96}+16^{24}$

2.103 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^5+3x-\alpha=0$ έχει μοναδική ρίζα στο R

2.104 Να δειχθεί ότι η εξίσωση $2013x^{2012}-2012(\lambda+1)x^{2011}+\lambda=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$ για κάθε $\lambda\in R$

2.105 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ έχει μέχρι τρείς ρίζες στο R

2.106 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=0$ με $\beta^2<\alpha\gamma$, $\alpha\neq 0$ έχει μοναδική ρίζα στο R

2.107 Δείξτε ότι η εξίσωση $x^8=7x+6$ δεν έχει περισσότερες από δύο διαφορετικές ρίζες στο R

2.108 Να δείξετε ότι μεταξύ δύο ριζών της εξίσωσης $e^x\eta\mu x=1$ υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $e^x\sigma\upsilon\nu x=-1$

2.109 Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha\cdot\ln^3 x+\beta\cdot\ln^2 x+\gamma\cdot\ln x+\delta=0$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R$ ώστε $3(2\alpha+\gamma+\delta)+4\beta=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\left(1,e^2\right)$

2.110 Αν η εξίσωση $x^4+\alpha x^3+3\beta x^2+\gamma x+\delta=0$ με $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R$ έχει τέσσερις ρίζες πραγματικές και άνισες μεταξύ τους, να αποδείξετε ότι $\alpha^2>8\beta$

...----------------------------------------------------------------------------------------

2.111 Η απόσταση δύο πόλεων που συνδέονται με ευθεία σιδηροδρομική γραμμή είναι 51 km. Μια αμαξοστοιχία διανύει τη μεταξύ τους απόσταση σε 0,6 ώρες. Να αποδειχτεί ότι για κάποια χρονική στιγμή η αμαξοστοιχία έχει ταχύτητα 85 km / h.

2.112 Αν f συνεχής στο $[1,5]$ με $f(1)=-2$ και $|f'(x)|<2$, $\forall x\in(1,5)$ να δείξετε ότι $-10<f(5)<6$

2.113 Έστω f παραγωγίσιμη στο $[0,5]$ με $f(5)=f(0)+1$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\kappa,\lambda\in(0,5)$ ώστε $2f'(\kappa)+3f'(\lambda)=1$

2.114 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[1,4]$ και για κάθε $x\in R$ ισχύει $f(4x)=4f(x)$ και $f\left(\frac{25}{100}\right)=1$ να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in(1,4)$ ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+f'(\xi_3)=12$

2.115 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log x$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(1,20)$ ώστε $\xi=\dfrac{19\cdot\log e}{1+\log 2}$.

2.116 Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2^x-2^{\eta\mu x}}{x-\eta\mu x}$.

## ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

**2.117** Αποδείξτε ότι $\frac{1}{x+1} < \ln\frac{x+1}{x} < \frac{1}{x}$, $x > 0$

**2.118** Αποδείξτε ότι $\left|\ln\frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1}\right| \le |\alpha-\beta|$, $\alpha,\beta \in R$

**2.119** Δείξτε ότι $|\eta\mu\beta - \eta\mu\alpha| \le |\beta-\alpha|$, $\alpha,\beta \in R$

**2.120** Δείξτε ότι $1+x \le e^x \le 1+xe^x$, $0 \le x \le 1$

**2.121** Να αποδείξετε τις ανισότητες:

Α) $xe^{\frac{1}{x+1}} < x+1 < xe^{\frac{1}{x}}$ για κάθε $x > 0$.

Β) $2-\frac{e}{\pi} < \ln\pi < \frac{\pi}{e}$

**2.122** Να αποδείξετε τις ανισότητες:

Α) $\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x$ αν $x>0$

Β) $x \le e^{x-1} \le 1+(x-1)e$ αν $x \in (1,2)$

**2.123** Δείξτε ότι $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$, $x > 0$

**2.124** Για κάθε $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{4}$ να αποδειχτεί ότι

$$1+2\alpha \le \varepsilon\varphi\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right) \le 1+\frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2(\alpha+\frac{\pi}{4})}$$

**2.125** Έστω f παραγωγίσιμη στο R της οποίας η παράγωγος είναι γνησίως φθίνουσα στο R. Δείξτε ότι: $f(1999)+f(2002) < f(2000)+f(2001)$

**************************************************************************

**2.126** Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και υπάρχουν τρία συνευθειακά σημεία της $C_f$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in R$ με $f''(\xi)=0$.

**2.127** Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-2, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(-2, 2)$ με $f(-2)=-f(2)=-2$. Αν $f'(x) \le 1$, $\forall x \in (-2, 2)$ να αποδειχθεί ότι $f(x)=x$, $x \in [-2, 2]$

**2.128** Έστω $f: R \to R$ τρεις φορές παραγωγίσιμη. Υποθέτουμε ότι $f(1)=f(0)=f'(0)=f''(0)=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x \in (0,1)$ ώστε $f^{(3)}(x)=0$.

**2.129** Έστω $f(x)=\alpha^2x^6+\beta x^4+x^2+\gamma+\delta$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in R^*$ με $3\beta^2 < 5\alpha^2$. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν τρία διαφορετικά συνευθειακά σημεία που να ανήκουν στη γραφική παράσταση της.

**2.130** Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(\ln\alpha)=f(\ln\beta)$. Αν ισχύει $\ln\alpha < \ln\gamma < \ln\beta$, με $\alpha,\beta,\gamma > 0$ και $\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\beta}{\gamma}=e^2$, να δειχτεί ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2 \in R$ με $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$

**2.131** Έστω συνάρτηση f, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Να αποδειχτεί ότι υπάρχει $x_o \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f'(x_o)=f(x_o)f''(x_o)$.

**2.132** Η συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha, \beta] \to R$, είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(\alpha,\beta)$, με $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Να αποδείξετε ότι:

Α) αν υπάρχει $x_o \in (\alpha,\beta)$ με $f(x_o)>0$, τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f''(\xi)<0$,

Β) αν υπάρχει $x_o \in (\alpha,\beta)$ με $f(x_o)<0$, τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f''(\xi)>0$.

**2.133** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3+2\lambda x-\lambda-1=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$ για κάθε $\lambda\in R$.

**2.134** Έστω η συνάρτηση $f$, παραγωγίσιμη στο $R$ με $f(-1)=-1$, $f(1)=1$. Δείξτε ότι υπάρχουν

Α) $-1<\xi_1<\xi_2<1$ ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=2$

Β) $-1<\kappa_1<\kappa_2<1$ ώστε $\dfrac{1}{f'(\kappa_1)}+\dfrac{1}{f'(\kappa_2)}=2$

**2.135** Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\alpha]$ με $\alpha>1$ και ισχύει $f(0)=0$ και $f(x^2)=2f(x),\ \forall x\in[0,\alpha]$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(0,\alpha)$ ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=\dfrac{f(\alpha)}{2\left(\sqrt{\alpha}-1\right)}$.

**2.136** Αν για τη συνάρτηση $f$ στο διάστημα $[2,20]$ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle, τότε να αποδείξετε ότι:

Α) υπάρχουν αριθμοί $\xi_1,\xi_2\in(2,20)$ με $\xi_1<\xi_2$ και $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$.

Β) υπάρχουν $\kappa_1,\kappa_2\in(2,20)$ με $\kappa_1<\kappa_2$ ώστε $3f'(\kappa_1)+2f'(\kappa_2)=0$

Γ) ότι η εξίσωση $f'(x)=f(x)-f(\alpha)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(2,20)$.

Δ) υπάρχουν $\kappa,\lambda,\mu$ με $2<\kappa<\lambda<\mu<20$ ώστε $2f'(\kappa)+3f'(\lambda)+4f'(\mu)=0$

**2.137** Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(2)=0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in R$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f$ στο $M(\xi,f(\xi))$, να τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $P(2\xi,0)$

**2.138** Η συνάρτηση $f:[1,4]\to R$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν $f(1)=2$ και $f(4)=8$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της $C_f$ που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

**2.139** Έστω συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$ παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$, με $f(\alpha)=2\beta$, $f(\beta)=2\alpha$

Α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(\alpha,\beta)$.

Β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=4$.

**2.140** Αν $\dfrac{\alpha}{4}+\dfrac{\beta}{3}+\dfrac{\gamma}{2}+\delta=0$, να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ μηδενίζεται σε ένα τουλάχιστον σημείο του διαστήματος $(0,1)$

**2.141** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha\cdot\ln^3x+\beta\cdot\ln^2x+\gamma\cdot\ln x+\delta=0$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R$ ώστε $3(2\alpha+\gamma+\delta)+4\beta=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\left(1,e^2\right)$.

**2.142** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)\ln(2x)$. Να αποδείξετε ότι:

Α) Υπάρχει $\xi\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ ώστε η εφαπτομένη της $C_f$ στο $(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον $x'x$

Β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(2x)^x=e^{2-2x}$ έχει ρίζα στο $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$

**2.143** Έστω $f$ παραγωγίσιμη στο $R$. Αν $f(x)\ge\dfrac{f(0)+f(10)}{2}$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o\in(0,10)$ τέτοιο ώστε $f'(x_o)=0$

## *ΣΤΑΘΕΡΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ*

2.144 Δίνεται συνάρτηση $f:R\to R$, ώστε: $f'''(x)+2f'(x)=f''(x)+2f(x)$, για κάθε $x\in R$ και $f(0)=f'(0)=f''(0)=1$. Να αποδείξετε ότι :

Α) Οι συναρτήσεις $h(x)=f(x)e^{-x}$ και $g(x)=\left[f''(x)-f'(x)\right]^2+2\left[f'(x)-f(x)\right]^2$ είναι σταθερές συναρτήσεις

Β) Να βρεθεί ο τύπος της $f$.

2.145 Θεωρούμε συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει ότι: $|f(x)-f(y)|+\sigma\upsilon\nu(x-y)\le 1$ για κάθε $x,y\in R$. Να δειχτεί ότι η $f$ είναι σταθερή

2.146 Να βρείτε την $f$ αν $f'(1-2x)=7-12x$, $x\in R$ και $f(1)=2$

2.147 Να βρείτε την $f$ αν $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$, $x\in R^*$ και $f(-1)=f(1)=2$

2.148 Να αποδειχτεί ότι:

Α) αν $f''(x)=f(x)$ για κάθε $x\in R$ και $f(0)=f'(0)=1$ τότε $f(x)=e^x$, $x\in R$,

Β) αν $\delta''(x)=\delta(x)+5x$ για κάθε $x\in R$, $\delta(0)=1$ και $\delta'(0)=-4$, τότε $\delta(x)=e^x-5x$, $x\in R$

2.149 Έστω συνάρτηση $f$ ορισμένη στο $R$ παραγωγίσιμη στο $R^*$ με $f(0)=0$, της οποίας όλες οι εφαπτόμενες διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Να βρείτε εκείνη τη συνάρτηση $f$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $(2,1)$ και $(-2,1)$

2.150 Έστω $f$ παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $R$. Να δείξετε ότι ισχύει $f'(x)=(2x+1)f(x)$, $\forall x\in R$ αν και μόνο αν υπάρχει $c\in R$ ώστε $f(x)=ce^{x^2+x}$

2.151 Να βρείτε την $f$, αν για κάθε $x\in R$ ισχύει $f'(x)-f(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$ και $f(0)=1$.

2.152 Αν η $f:(0,\pi)\to R$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ και $f''(x)=-f(x)$ για κάθε $x\in(0,\pi)$ να αποδείξετε ότι $f(x)=\alpha\eta\mu x$, $\alpha\in R$.

2.153 Να βρεθεί η συνάρτηση $f:R\to R$ αν ισχύει: $(x-2)f'(x)=2x^2-5x+2$, $x\in R$ και $f(3)=7$

2.154 Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ αν ισχύει ότι $f'(x)=f(x)\cdot\ln[f(x)]$ για κάθε $x>0$ και $f'(1)=0$

2.155 Να βρεθεί, αν υπάρχει, συνάρτηση $f$ που είναι παραγωγίσιμη στο $R^*$ και για κάθε $x\in R^*$ ισχύει $f(x)=xf'(x)$, $f(1)=1$ και $f(-1)=2$.

2.156 Να βρείτε τη συνάρτησης $f$ με $f(0)=2$, αν ισχύει $\left(f(x)-e^x\right)\left(f'(x)-e^x\right)=0$, $\forall\, x\in R$

2.157 Βρείτε την εξίσωση της καμπύλης που διέρχεται από το $M(0,-3)$ και σε κάθε σημείο της με τετμημένη $\alpha$ έχει εφαπτομένη με $\lambda_{\varepsilon\varphi}=\dfrac{4\alpha}{4\alpha^2+1}$

2.158 Να βρεθεί παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, αν ισχύει ότι $f'(1)=0$ και $f'(x)=f(x)\cdot\ln[f(x)]$ για κάθε $x>0$

2.159 Δίνεται η συνάρτηση $f$, παραγωγίσιμη στο $R$ ώστε να ισχύει $[f'(x)+f(x)]e^{2x}=f(x)-f'(x)$ για κάθε $x\in R$ και $f(0)=1$. Βρείτε τον τύπο της $f$

**2.160** Αν η $f:(0,\pi)\to R$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ και $f''(x)=-f(x)$ για κάθε $x\in(0,\pi)$, δείξτε ότι $f(x)=\alpha\eta\mu x$, $\alpha\in R$.

**2.161** Να βρεθεί συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με $f(x)>0$, $x\in R$, $f(1)=9$ και της οποίας η γραφική παράσταση σε κάθε σημείο $M(x,f(x))$ έχει εφαπτομένη με κλίση $4x\sqrt{f(x)}$, $x\in R$

**2.162** Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f αν είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, η $C_f$ διέρχεται από το $O(0,0)$ η εφαπτόμενη της $C_f$ στο σημείο $O(0,0)$ είναι παράλληλη στην ευθεία $-2x+y+3=0$ και ισχύει

$(x^2+1)\cdot f''(x)+4x\cdot f'(x)+2f(x)=0,\ x\in R$

**2.163** Έστω οι συναρτήσεις f και g δυο φορές παραγωγισιμες στο R με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$ Αν δέχονται κοινή εφαπτόμενη σε κοινό σημείο τους και ισχύει $f''(x)g(x)=f(x)g''(x)$ για κάθε $x\in R$, να δείξετε ότι $f(x)=g(x)$

**2.164** Α) Έστω συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει $f''(x)+f(x)=0$, $x\in R$ και $f(0)=f'(0)=0$. Να αποδείξετε ότι η f είναι η μηδενική συνάρτηση.

Β) Έστω συνάρτηση $g:R\to R$ με $g''(x)+g(x)=0$ για κάθε $x\in R$ και $g(0)=0$, $g'(0)=1$. Να αποδείξετε ότι η $g(x)=\eta\mu x$.

**2.165** * Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με $f(0)=0$ για την οποία ισχύει ότι

$f'(x)\left(e^{f(x)}+1\right)=2x+\frac{2x}{x^2+1}$ για κάθε $x\in R$. Να βρεθεί ο τύπος της f.

**2.166** Έστω συνάρτηση $f:R\to R$ και $\nu\in N$. Αν $\nu\geq 2$ και ισχύει $|f(x)-f(y)|\leq|x-y|^{\nu}$, $\forall x,y\in R$ τότε να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

**2.167** Να βρείτε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο R, αν η εφαπτομένη στη γραφική της παράσταση σε κάθε σημείο $(x,f(x))$ να έχει κλίση $2xe^{-x}-f(x)$ και το $A\left(1,\frac{2}{e}\right)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της f

**2.168** * Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ με $f(xy)=f(x)+f(y)$ για κάθε $x,\ y\in(0,+\infty)$ και $f(e)=e$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ότι $f(x)=e\ln x$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

**2.169** Έστωι η συνάρτηση $f:R\to R$, ώστε να ισχύει ότι και $f(x+y)=xy+y^2+f(x)$ για κάθε $x,y\in R$, $f(1)=-1$, $f(2)=2$. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R και να βρεθεί ο τύπος της

**2.170** Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο R με $f'(0)=2$ και ισχύει $f(y+x)=f(y)f(x)e^{2xy}$, για κάθε $x,y\in R$. Να αποδείξετε ότι:

Α) $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$ και $f(0)=1$

Β) η f είναι παραγωγίσιμη στο R

Γ) ο τύπος της f είναι $f(x)=e^{x^2+2x}$

**2.171** Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$, παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1)=1$ για την οποία ισχύει $f(xy)=x^2f(y)+y^2f(x)$. για κάθε $x,y>0$.

Α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$

Β) Δείξτε ότι $f(x)=x^2\ln(x)$ για κάθε $x>0$

# ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ- ΑΚΡΟΤΑΤΑ

**2.172** Μελετήστε τη μονοτονία των συναρτήσεων Α) $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$

Β) $f(x)=x+\sigma\upsilon\nu x,\quad x\in[0,2\pi)$

**2.173** Να μελετήσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων Α) $f(x)=\begin{cases} e^x-ex-1 & x\le 0\\ x^2\ln x & x>0\end{cases}$

Β) $f(x)=\ln(1+x^2)-e^{-x}+1$

**2.174** Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x^2|x-1|}$ στο $\left[0,\dfrac{2}{3}\right]$

**2.175** Να βρεθεί ο $\alpha\in R$, ώστε η συνάρτηση $f(x)=\left(x^2+\alpha x+1\right)e^x$, να είναι γνησίως αύξουσα στο $R$.

**2.176** Αν η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι παραγωγίσιμη με $f(0)=0$ και η $f'$ είναι γνησίως φθίνουσα, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, $x>0$, είναι γνησίως φθίνουσα.

**2.177** Οι συναρτήσεις $f$ και $g$ είναι παραγωγίσιμες στο $R$ με $f(0)=g(0)$ και για κάθε $x\in R$ να ισχύουν $f'(x)g(x)>f(x)g'(x)$ και $g(x)>0$. Να αποδείξετε ότι: $f(x)\ge g(x)$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$ και $f(x)\le g(x)$ για κάθε $x\in(-\infty,0]$.

**2.178** * Έστω μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f$ στο $[0,+\infty)$ ώστε $[f(x)]^5+2[f(x)]^3+3f(x)=$

$(x+1)\ln(x+1)-x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+1$. Να μελετηθεί η $f$ ως προς την μονοτονία της.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ -ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

**2.179** Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln(x-1)}{\ln x}, x\ge 2$

Α) να μελετήσετε τη μονοτονία της $f$

Β) να αποδείξετε ότι:

α) $\ln\left(e^{\pi}-1\right)\ln\left(e^{\pi}+1\right)<\pi^2$.

β) $\ln(x-1)\cdot\ln(x+1)<\ln^2 x$, $x>2$

**2.180** Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\ln(x-1)+x^2+x-6=0$

**2.181** Λύστε την εξίσωση $\ln(x+1)-\dfrac{2x}{x+2}+x=0$

**2.182** Να λύσετε την εξίσωση $e^{x+1}+2x-e=0$

**2.183** Για κάθε $x\in[2+\infty)$ να αποδείξετε ότι

$(x+1)\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{x+1}-x\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{x}>1$

**2.184** Δείξτε ότι $2\ln(\eta\mu x)<\eta\mu^2 x$, $x\in(0,\pi)$

**2.185** Έστω συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει ότι $f(1-x)=-f(1+x)$ για κάθε $x\in R$. Αν ισχύει ότι $f'(x)\ne 0$, $\forall x\in R$, να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$

**2.186** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία, ισχύουν $f(x)>0$ και $f^3(x)+\ln(f(x))+e^{f(x)}=x^3+x^2+2x-1$ για κάθε $x\in R$. Να λύσετε την εξίσωση $f(\ln x)=f\left(1-x^2\right)$

**2.187** Αν $xg'(x)>\sigma\upsilon\nu x-g(x)$ για κάθε $x\in R$, να αποδείξετε ότι $g(x)>\dfrac{\eta\mu x}{x}$ για κάθε $x\ne 0$.

## ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

**2.188** Να μελετήσετε τις συναρτήσεις ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα:

Α) $f(x)=x^2\ln x$ Β) $f(x)=2^{\sigma\upsilon\nu x}, 0\le x<2\pi$

Γ) $f(x)=\dfrac{\ell nx}{x^2}$ Δ) $f(x)=\dfrac{e^x}{2x}$ Ε) $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$

**2.189** Να μελετήσετε τις συναρτήσεις ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα:

Α) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}, & x\le 0\\ \dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$ Β) $f(x)=\begin{cases}1-e^{x-1}, & x\ge 1\\ \ln(1\text{-}x), & x\prec 1\end{cases}$

**2.190** Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^2\left(e^x-e\right)^2$ έχει ακριβώς τρία τοπικά ακρότατα.

**2.191** Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha,\beta\in R$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=\alpha\ln 2x+\dfrac{\beta}{x}+\alpha$ να έχει στη θέση $x_o=1$ τοπικό ακρότατο με τιμή $2+\ln 2$.

**2.192** Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ με $(f(x))^2+x^2=1+2xf(x)$, $\forall x\in R$. Δείξτε ότι η $f$ δεν έχει τοπικά ακρότατα.

**2.193** Έστω η συνάρτηση $f(x)=x\ln^2 x$. Να βρείτε το σημείο της $C_f$ όπου η $f$ έχει τη μικρότερη κλίση.

**2.194** Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in R$ αν η συνάρτηση $f(x)=x^3-(\lambda-1)x^2+(\lambda+5)x-2$ δεν έχει ακρότατα.

**2.195** Έστω η συνάρτηση $f:(0,1)\to R$, η οποία είναι παραγωγίσιμη τρεις φορές με $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in(0,1)$. Αν υπάρχουν $x_1,x_2\in(0,1)$ με $x_1\ne x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1)=f(x_2)=0$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ με $f^{(3)}(\xi)=0$.

**2.196** Να βρεθεί ο $\kappa\in R$ ώστε η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)=xe^{2\kappa-x}$ να είναι το $e$.

**2.197** Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f$ στο $[\alpha,\beta]$. Αν υπάρχουν $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοιοι ώστε $f(\alpha),f(\beta)\in(f(x_1),f(x_2))$, αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ ώστε $f''(\xi)=0$.

**2.198** Έστω οι συναρτήσεις $f,g:R\to R$ οι οποίες είναι παραγωγίσιμες και ισχύουν: $f(x)\ge x+1$ και $f(x)e^{g(x)}=e^x-x$ για κάθε $x\in R$. Αν η $C_f$ διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$, να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των $C_f$ και $C_g$ στο $x_o=0$ τέμνονται κάθετα

**2.199** Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $(x_0,f(x_0))$, όπου $x_o$ η θέση του τοπικού ακροτάτου της $f(x)=x\ln x+\lambda x$, $\lambda\in R$ όταν το $\lambda$ διατρέχει το $R$

**2.200** Εστω $f$ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[0,3]$ με $f'(x)>0$ και $f(1)=-1$, $f(2)=1$. Αν $g(x)=\dfrac{f(x)}{1+f^2(x)}$, $0\le x\le 3$, βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και το σύνολο τιμών της $g$

**2.201** Μία συνάρτηση $f$ είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $R$. Αν υπάρχει $\alpha\in R$ ώστε $f(\alpha)=f'(\alpha)=f''(\alpha)=0$ και $f'''(x)>0$ για κάθε $x$, τότε να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις $f''(x)=0$, $f'(x)=0$ και $f(x)=0$ έχουν μοναδική ρίζα.

**2.202** **Αν $\left(x^2-4x\right)f'(x)+f(x)=0$, $\forall x\in[0,4]$ να αποδείξετε ότι $f(x)=0$ για κάθε $x\in[0,4]$.

## ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

### ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

**2.203** Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση $συνx+2=x$ έχει στο $[0,π]$ ακριβώς μια λύση

**2.204** Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $R$ και ισχύει $f^3(x)+f(x)=συνx$, $\forall x\in[0,π]$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,π)$

**2.205** Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $2\ln x=λx^2+1$ για κάθε $λ>0$

**2.206** Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $8x^2\sqrt{x}-α\sqrt{x}+1=0$ όταν το $α\in R$

**2.207** Να αποδείξετε ότι για κάθε $α\in R$ η εξίσωση $x^3-αx^2-4x+α=0$ έχει τρεις ρίζες

**2.208** Αποδείξτε ότι για κάθε $α>0$ η εξίσωση $2αe^x=2+2x+x^2$ έχει μοναδική ρίζα στο $R$

**2.209** ** Αν $f(x)=x^2-1+\ln(x)$, να λύσετε τις εξισώσεις:

A) $f(\ln(x-1))-f\left(6-x^2-x\right)=0$

B) $f(x)+f\left(x^{17}\right)=f\left(x^3\right)+f\left(x^{2008}\right)$

**2.210** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x-1)\ln x=x+1$ έχει δύο ακριβώς ρίζες, οι οποίες είναι αντίστροφοι αριθμοί.

**2.211** *Να βρείτε, για κάθε $α>0$, το πλήθος των θετικών ριζών της εξίσωσης $x^2+α=\sqrt{α}\,x^3$

**2.212** Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$. Βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f\left(e^{-x}\right)=f(x+α)$

### ΔΙΝΕΤΑΙ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ

**2.213** Έστω μια συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει ότι $f'(x)>2f(x)$ και $f(0)=1$. Να αποδείξετε ότι $f(x)>e^{2x}$ για κάθε $x>0$.

**2.214** Αν η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι παραγωγίσιμη με $f(0)=0$ και $f'(x)+f(x)>0$ για κάθε $x\in R$, δείξτε ότι $xf(x)>0$ για κάθε $x\neq 0$

**2.215** Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης $f$, που είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και ισχύει $f'(x)\le f(1)-f(0)$ για κάθε $x\in(0,1)$

**2.216** Έστω συνάρτηση $f$ παραγωγίσιμη στο $R$, για την οποία ισχύουν: $f(0)=1$ και $e^{2x}f(x)-1\le 0$, για κάθε $x\in R$. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $C_f$ στο σημείο $A(0,1)$

**2.217** Αν ισχύει $e^x\ge κx^2$ για κάθε $x>0$, $κ\in R$ να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του $κ\in R$

**2.218** Αν ισχύει ότι $\ln x+\frac{α}{x}\ge α$, $\forall x>0$, να βρείτε το $α$

**2.219** Αν $α,β>0$ και ισχύει $α^{\frac{\ln x}{x}}+β^{\frac{x-1}{x}}\le 2$ για κάθε $x>0$, να αποδείξετε ότι $α\cdot β=1$.

**2.220** ¨Εστω η συνάρτηση $f(x)=α^x-x^α$, x>0, λ>0 με $f(x)\ge 0$, $\forall x>0$. Να δείξετε ότι $α=e$ και ότι η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[e,+\infty)$.

**2.221** Έστω $f$ δυο φορές παραγωγίσιμη στο $R$ με $f(0)=f'(0)=0$ και $f''(x)<2x$ για κάθε $x\in R$. Δείξτε ότι $f(1)<\frac{1}{3}$

2.222 Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$, δύο φορές παραγωγίσιμη με $f'(x)>f''(x)$, $x\in R$ που παρουσιάζει για $x_o=0$ τοπικό ακρότατο το $f(0)=0$. Να δείξετε ότι: $x\left(f(x)-f'(x)\right)>0$

2.223 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{x}{e^x}+1-\lambda,\lambda\in R$

A) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του $\lambda$ για την οποία ισχύει $f(x)\le 0$ για κάθε $x\in R$.

B) Αν $\lambda\ge 1+\frac{1}{e}$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=(1-\lambda)x-\frac{x+1}{e^x}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

2.224 Έστω συνάρτηση $f(x)=x^\lambda-\ln(x)$, $\lambda>0$

A) Να βρείτε την μικρότερη τιμή του $\lambda$ για την οποία ισχύει ότι $x^\lambda\ge\ln(x)$ για κάθε $x>0$

B) Να βρείτε την τιμή του $\lambda$ για την οποία το ελάχιστο της $f$ παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

2.225 Έστω συνάρτηση $f$ δυο φορές παραγωγίσιμη στο $R$ με $f(0)=2$, $f'(0)=0$, και $f''(x)+x>0$ για κάθε $x\in R$, δείξτε ότι

$f(x)\ge 2\left(1-\frac{x^3}{12}\right)$ για κάθε $x\in R$

2.226 Μια συνάρτηση $f$ είναι ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $R$ και για κάθε $x\in R$ ισχύει: $f^2(3x+1)+4\le 4\cdot f(2x^2+x+1)$. Να αποδείξετε ότι:

Α Υπάρχει $\xi\in(1,4)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi)=0$

Β Η συνάρτηση $f$ δεν αντιστρέφεται

Γ $f'(1)=f'(4)$

Δ Η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $R$

2.227

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ - ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

2.228 Δείξτε ότι $\varepsilon\varphi x>x$, $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

2.229 Δείξτε ότι $6\eta\mu x\ge 6x-x^3$ για κάθε $x\ge 0$

2.230 A) Μελετήστε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $f(x)=\frac{e^x}{x^\nu},\nu\in N^*$

B) Να δείξετε ότι $e^x\ge\left(\frac{ex}{\nu}\right)^\nu$, $\forall x\in(0,+\infty)$

2.231 A) να αποδείξετε ότι $e^\pi>\pi^e$

B) Να δειχθεί ότι: $\pi^{1821}>\left(1+\frac{1821}{\pi}\right)^\pi$

2.232 A) Να μελετηθεί ως προς τα ακρότατα η συνάρτηση $f(x)=2x^3-2x^2-x-\ln x$ , $x>0$

B) Αν $\alpha,\beta,\gamma\in(0,+\infty)$ με $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=1$, δείξτε ότι $2\left(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\right)+3\ge 2\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)+\alpha+\beta+\gamma$

2.233 Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f$ με $f(x)=\ln\left(1+x^2-e^{-x}\right)$ είναι γνησίως αυξουσα

2.234 ** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\ln(1+x^2)-e^{-x}+1$ είναι γνήσια αύξουσα στο $R$ και λύστε την εξίσωση $f(\ln x)=f(1-x^2)$

2.235 Να αποδείξετε ότι από το σημείο $A(1,1)$ άγονται ακριβώς δύο εφαπτόμενες προς τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=e^x$

2.236 Για κάθε $\alpha>0$, $\beta>0$ με $\alpha\ne\beta$ να δείξετε ότι $\ln\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\ln\alpha+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\ln\beta$

2.237 Δείξτε ότι $x^{\sqrt{x}}<e^{x-1}$ , $\forall x\in(1,+\infty)$

## ΚΥΡΤΕΣ-ΚΟΙΛΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ

**2.238** Να μελετήσετε τις συναρτήσεις ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

Α) $h(x)=x^2+\frac{8}{x}$ Β) $g(x)=3x^5-5x^3$

Γ). $g(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ Δ) $f(x)=xe^{-x}$

**2.239** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της $f(x)=\ln\left(e^x-x\right)$, $x\in IR$ έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής

**2.240** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\ln^2 x+2x\ln x+x^2-3$ είναι κυρτή

**2.241** Αν είναι γνωστό ότι η συνάρτηση $f(x)=x^5+5\alpha x^4+10\beta x^3+x^2$, $x\in R$, $\alpha,\beta\in R$ έχει τρία σημεία καμπής, να αποδείξετε ότι $\alpha^2>\beta$.

**2.242** Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύουν $f(x)<x$ και $f'(x)=\frac{x}{x-f(x)}$ για κάθε $x>0$. Να αποδείξετε ότι η $f$ είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

**2.243** Δίνεται ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha\sqrt{x}+\beta\ln x+\beta x$ με $\alpha,\beta\in R$, έχει σημείο καμπής το $A(1,3)$

Α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=4$ και $\beta=-1$:

Β) Βρείτε την εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο καμπής της και να αποδείξετε ότι $4\sqrt{x}-\ln x\le x+3$, $\forall x\ge 1$.

**2.244** Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ με την ιδιότητα $(x^2+x+1)f''(x)+xe^{f(x)}=0$ για κάθε $x\in R$ Να αποδειχθεί ότι η $C_f$ έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

**2.245** Η συνάρτηση $f$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $R$. Να αποδείξετε ότι δεν είναι δυνατόν η $f$ να έχει στο $x_o$ τοπικό ακρότατο και σημείο καμπής.

**2.246** Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha\in IR$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=2x^4+4\alpha x^3+3\left(2\alpha^2-4\alpha+5\right)x^2+\alpha x+1$ με $x\in R$, δεν έχει σημεία καμπής.

**2.247** Έστω συνάρτηση $f:(0,1)\to R$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει ότι $f^2(x)+(x-4)f(x)+x=0$ για κάθε $x\in(0,1)$. Να αποδείξετε ότι η $C_f$ δεν έχει σημεία καμπής

**2.248** Η συνάρτηση f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο και $xf''(x)-\eta\mu 2x=0$, $x\in R$. Να δείξετε ότι το $A(0,f(0))$ δεν μπορεί να είναι σημείο καμπής της $C_f$

**2.249** Έστω συνάρτηση $f$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f''\searrow$ στο R $f'(x)\neq 0$, $\forall x\in R$, $f'(1)>0$ και η συνάρτηση $g(x)=f(x)-f(2-x)$, $\forall x\in R$. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της $g$, τα διαστήματα που η g είναι κυρτή ή κοίλη και τα σημεία καμπής της $C_g$

**2.250** Έστω συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$ η οποία είναι κυρτή με $f(0)=0$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ είναι γνήσια αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

**2.251** Αν $f(x)=2e^{\lambda x}-x^2-\frac{2}{\lambda^2}$, $\lambda>0$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων καμπής της γραφικής παράστασης της $f$, για κάθε $\lambda\in(0,+\infty)$

2.252 Δίνεται η συνάρτηση $f$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $R$ και ισχύει $f(x)+e^{f(x)}=1+x-x^2-e^x$ για κάθε $x\in R$. Να δείξετε ότι η γραφική της παράσταση

A) δεν έχει σημεία καμπής

B) έχει ένα ακριβώς κρίσιμο σημείο.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

2.253 A) Η συνάρτηση $f$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή σε διάστημα $\Delta$. Να δείξετε ότι για κάθε $x_1,x_2\in\Delta$ ισχύει

$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ (Jensen)

B) Να αποδείξετε ότι: $e^{\frac{\alpha+\beta}{2}}-1>\sqrt{(e^\alpha-1)(e^\beta-1)}$ $\forall\alpha\neq\beta\in R_+$

Γ) Δείξτε ότι $\ln\frac{\alpha+\beta}{2}\ge\sqrt{\ln\alpha\cdot\ln\beta}$, $\forall\alpha,\beta\in A_f$

2.254 Αν $x>0$, $y>0$, $\alpha>1$ και $x+y=1$, να αποδείξετε ότι ισχύει $\left(x+\frac{1}{x}\right)^\alpha+\left(y+\frac{1}{y}\right)^\alpha\ge\frac{5^\alpha}{2^{\alpha-1}}$

2.255 Η συνάρτηση $f$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $R$ και ισχύει ότι $f''(x)>f(x)$ και $f(0)=f'(0)=0$. Να αποδείξετε ότι η $f$ είναι κυρτή στο $R$

2.256 Η συνάρτηση $f$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο $R$ και η γραφική παράσταση της $f$ περνά από την αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in R$ ισχύει ότι $3f(x)\ge 4f\left(\frac{3x}{4}\right)$

2.257 Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $[1,+\infty)$ με $f'$ γνήσια αύξουσα και $f(1)=0$ Δείξτε ότι $f'(x)(x-1)>f(x)$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$.

2.258 Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $[1,+\infty)$ με παράγωγο γνήσια αύξουσα και $f(1)=1$ Να αποδείξετε ότι $f'(x)(x-1)-f(x)+1>0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$.

2.259 Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f:R\to R$ ώστε $f(x)>0$ και $f''(x)<0$ για κάθε $x\in R$

2.260 Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(x)=\frac{e^{x-1}}{e^{x-1}+1}$ για $x\in R$.

A) Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

B) Να δειχθεί ότι για κάθε $x>1$ ισχύει $f(\ln x)+f'(x-1)<f(x-1)+f'(\ln x)$

2.261 Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $[1,+\infty)$ με παράγωγο γνήσια αύξουσα και $f(1)=0$ Να αποδείξετε ότι $f'(x)(x-1)>f(x)$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$.

2.262 Αν οι $\alpha,\beta,\gamma\in R_+$ με $\alpha<\beta<\gamma$, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου δείξτε ότι $\beta^\beta<\sqrt{\alpha^\alpha\gamma^\gamma}$

2.263 Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $[1,+\infty)$ με παράγωγο γνήσια αύξουσα και $f(1)=1$ Να αποδείξετε ότι $f'(x)(x-1)-f(x)+1>0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$.

2.264 Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^x+x^2-x-1$

A) Να αποδείξετε ότι η $C_f$ δέχεται οριζόντια εφαπτομένη σε ένα μόνο σημείο της.

B) Να λύσετε την εξίσωση $e^x+x^2=x+1$.

Γ) Να αποδείξετε ότι $e^x-1\ge x(1-x)$, $\forall x\in R$

## ΚΑΝΟΝΕΣ DE L' HOSPITAL

**2.265** Να βρεθούν τα παρακάτω όρια

Α) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)$ Β) $\lim\limits_{x\to1}[\ln x\cdot\ln(\ln x)]$

Γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right)$ Δ) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}$

**2.266** Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

Α) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x}{x\left(e^x-1\right)\eta\mu x}$ Β) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

Γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+2}}$ Δ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-x}+2x+1}{4e^{-x}-x+3}$

**2.267** Αποδείξτε ότι είναι συνεχής η συνάρτηση

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\ln x}{1-x}, & 0\prec x\neq1\\ -1 & ,x=1\end{cases}$ και ότι $f'(1)=-0,5$.

**2.268** Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\eta\mu x}x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}$

**2.269** Να υπολογίσετε τα $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$ και $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x}{e^{\frac{1}{x}}}$

**2.270** Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\left(x^3\ln^2x\right)}{\left(x^6\ln^4x\right)}$

**2.271** Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-x}+2x+1}{4e^{-x}-x+3}$

**2.272** Υπολογίστε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(3x+\ln x)\left(e^x+e^{-x}\right)}{(x+\ln x)\left(e^x-e^{-x}\right)}$

**2.273** Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x-\eta\mu(\ln x)}{2\ln x+\sigma\upsilon\nu(\ln x)}$

**2.274** Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x-\eta\mu x}{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}}$

**2.275** Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4\left(e^x-x-1\right)}{(\sin x-x)^2}=18$

**2.276** Αν $f(x)=\dfrac{2e^x-2x-2-x^2}{x^2}$ να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{\sqrt{f(x)}}}{e^{f(x)}}$

**2.277** Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ για την οποία ισχύει $xf(x)+e^{\eta\mu x}=f(x)\eta\mu x+e^x$ για κάθε $x\in R$. Να βρείτε το $f(0)$.

**2.278** Έστω $f:R\to R$, συνεχής συνάρτηση, για την οποία ισχύει $(1-\sigma\upsilon\nu x)f(x)=\ln(1+x)-x$ για κάθε $x>-1$. Να βρείτε το $f(0)$.Η συνάρτηση f έχει συνεχή 2η παράγωγο στο R με $f''(0)=\dfrac{3}{2}$ και $f(0)=f'(0)=0$. Να δείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{1-\sigma\upsilon\nu x}=3$

**2.279** Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $R$. Αν για κάθε $x\in R$ ισχύει $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+4h)-2f(x+2h)+f(x)}{h^2}=24x-8$ και η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο $M(1,f(1))$ έχει εξίσωση $y=5x-8$, να βρείτε τον τύπο της $f$

**2.280** Αν $f(x)=\begin{cases}x\ln x+\alpha x-\beta, & x\succ0\\ 1 & ,x=0\\ e^{\frac{1}{x}}\ln(-x)+\alpha, & x\prec0\end{cases}$ να βρείτε τα $\alpha,\beta\in R$ ώστε η $f$ να είναι συνεχής στο $x_o=0$

**2.281** Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha,\beta,\gamma$ ώστε $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\alpha e^x+\beta e^{-x}+\gamma}{x^2}=1$

## ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

**2.282** Να βρείτε τις ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων

$h(x)=\frac{e^x}{x^3}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x-1}$, $k(x)=xe^{\frac{1}{x^2}}$

$\lambda(x)=x-\ln\left(e^x+1\right)$

**2.283** Έστω οι συναρτήσεις $f,g:(0,+\infty)\to R$ με $g(x)=f(x)+x+\ln(x+1)-\ln x$ για κάθε $x>0$. Αν η ευθεία $y=x+3$ είναι ασύμπτωτη της $C_f$ στο $+\infty$, να βρείτε την ασύμπτωτη της $C_g$ στο $+\infty$.

**2.284** Να αποδείξετε ότι η $y=2x-2\ln 2$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f(x)=2\ln\left(e^x+1\right)-2\ln 2$

**2.285** Έστω η συνάρτηση $f:R\to R$ και η $g$ με $g(x)=xf\left(e^{-x}\right)$. Αν η ευθεία $y=2x+1$ εφάπτεται της $C_f$ στο $0$, να βρείτε την ασύμπτωτη της $C_g$ στο $+\infty$.

**2.286** Έστω συνάρτηση $f:R\to R$, τέτοια ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xf(x)-x^2}{\ln x+x}=2$.

Αποδείξτε ότι η $y=x+2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f$ στο $+\infty$

**2.287** Να βρείτε τα $\alpha,\beta,\gamma\in R$ ώστε η γραφική παράσταση της $f$ με $f(x)=\frac{(\alpha-1)x^2+\beta x+5}{3x+\gamma}$ να έχει ως ασύμπτωτες τις ευθείες $x=-2$ και $y=3$.

**2.288** Δίνεται ότι η συνάρτηση $f$ με τύπο $f(x)=\frac{1}{x^2+\alpha x+\beta}$ έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες $x=3$ και $x=5$

A) Να βρεθούν οι αριθμοί $\alpha$ και $\beta$.

B) Να αποδειχτεί ότι η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της $C_f$ στο $+\infty$.

**2.289** Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύει $e^{-x}\le xf(x)\le 1$ για κάθε $x>0$. Να αποδείξετε ότι ο άξονας $x'x$ είναι ασύμπτωτη της $C_f$.

**2.290** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\eta\mu x\ln x,\ x>0$ δεν έχει ασύμπτωτες.

**2.291** Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$ έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=2x+3$.

Βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-\eta\mu x-x^2e^{-x}}{xf(x)-2x^2-\ln x+x^2\eta\mu\frac{1}{x}}$.

## ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

**2.292** Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις A) $f(x)=x^3-12x$ B) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$

Γ) $f(x)=\eta\mu x+x$, $x\in[-\pi,\pi]$ Δ) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ E) $f(x)=\begin{cases}\ln x, & x\ge 1\\ 1-x, & x<1\end{cases}$ Στ) $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$

**2.293** Να κάνετε μελέτη της συνάρτησης $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση (για λόγους απλότητας θεωρείστε $\sigma=1$ και $\mu=0$)

## ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

2.294 Αν Μ το σημείο του διαγράμματος της $f$ με $f(x)=x\ln x-\lambda x+3$ που αντιστοιχεί στο τοπικό της ελάχιστο, να βρεθεί η απόσταση $OM$ όταν ο ρυθμός μεταβολής του $OM$ ως προς $\lambda$ γίνει μηδέν.

2.295 Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A=90^o$, για το οποίο ισχύουν τα εξής. Η κορυφή Γ έχει συντεταγμένες $(-4,0)$, η κορυφή Α είναι στο διάστημα $[0,4]$ του άξονα $x'x$ και η κορυφή Β είναι σημείο της παραβολής $y=4x-x^2$. Για ποια τιμή των συντεταγμένων του Β το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ γίνεται μέγιστο ;

2.296 Μια εταιρεία αυτοκινήτων εκτιμά ότι μπορεί να πουλήσει 2000 αυτοκίνητα τον μήνα, αν η τιμή πώληση του κάθε αυτοκινήτου είναι 5000 €. Έχει επίσης υπολογίσει ότι για κάθε μείωση της τιμής κατά 500 € το ένα, οι πωλήσεις αυξάνονται κατά 1000 αυτοκίνητα τον μήνα. Η αύξηση των πωλήσεων λόγω μείωσης της τιμής είναι ανάλογη της μείωσης αυτής. Αν η τιμή ενός αυτοκινήτου δεν μπορεί να είναι μικρότερη από 2000 €. Πόσα αυτοκίνητα πρέπει να πουλήσει η εταιρεία, ώστε να έχει τα μέγιστα έσοδα;

2.297 Ένα τουριστικό γραφείο οργανώνει εκδρομές με λεωφορεία. Κάθε λεωφορείο έχει 70 θέσεις. Ορίζεται οτι για να γίνει η εκδρομή χρειάζονται τουλάχιστον 30 συμμετοχές και τότε η τιμή ορίζεται στα 30 € για κάθε άτομο. Για να αυξήσει τις συμμετοχές το γραφείο κάνει της εξής προσφορά. «Για κάθε επιβάτη επιπλέον των 30, θα μειώνει κατά 30 λεπτά την χρέωση κάθε επιβάτη».

A) Ποιο το πλήθος των επιπλέον επιβατών κάθε λεωφορείου που μεγιστοποιεί τα έσοδα;

B) Ποια το μέγιστα έσοδα του γραφείου απο κάθε λεωφορείο;

2.298 Ενα φορτηγό διανύει καθημερινά 100 km με σταθερή ταχύτητα $x$ km/h. Τα καύσιμα κοστίζουν 0,8 € το λίτρο και καταναλώνονται με ρυθμό $2+\dfrac{x^2}{400}$ lt/h. Τα υπόλοιπα έξοδα του φορτηγού είναι 9 €/ώρα

A) να εκφράσετε το κόστος της διαδρομής αυτής ως συνάρτηση της ταχύτητας $x$,

B) να βρείτε την ταχύτητα που πρέπει να έχει το φορτηγό , ώστε τα έξοδά του να είναι τα ελάχιστα,

Γ) πόσα είναι τα ελάχιστα αυτά έξοδα;

2.299 Η συνάρτηση που μας δίνει το κέρδος μιας επιχείρησης είναι: $P(t)=\dfrac{\ell n(t+1)}{(t+1)^2}$, $t\geq 0$. Να βρείτε:

A) την χρονική στιγμή, κατά την οποία η επιχείρηση θα παρουσιάσει μέγιστο κέρδος.

B) το μέγιστο κέρδος της επιχείρησης.

2.300 Δίνεται η ευθεία $y=-2x-3$. Να βρείτε το σημείο της ευθείας αυτής το οποίο απέχει από το σημείο $A(9,4)$ τη μικρότερη δυνατή απόσταση.

2.301 Το άθροισμα δύο αριθμών είναι 82. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το γινόμενό τους.

# ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.302 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+12x$, όπου $\alpha,\beta\in R$, η οποία παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_o=2$ και η εφαπτόμενη της στο σημείο $A(1,f(1))$ διέρχεται από το $(3,5)$.

Α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in R$ και το σύνολο τιμών της $f$.

Β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$.

Γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2004$ έχει μόνο μία λύση.

Δ) Να βρεθούν τα $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^\kappa}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x^\kappa}$, $\kappa\in Z$

2.303 Έστω συνάρτηση $f$ παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύουν :

- $f(-1)=0$
- $f(x)=3f'(x)-2x+1$ για κάθε πραγματικό αριθμό $x$

Α Δείξτε ότι $f(x)=3e^{\frac{x+1}{3}}-2x-5$, $x\in R$

Β. Δείξτε ότι η $f'$ αντιστρέφεται και να ορίσετε την $(f')^{-1}$.

Γ. Να λυθεί η εξίσωση : $f\left(e^{x^2}+1\right)=f\left(x^2+2\right)$ στο R

Δ. Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α η εξίσωση $(f')^{-1}(x)+1=\ell n(\alpha x)$ έχει ακριβώς μια ρίζα;

2.304 Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln x-\frac{\alpha}{x}+\alpha$ με $x>0$. Αν για κάθε $x>0$ είναι $f(x)\geq 0$ τότε

Α) να αποδείξετε ότι $\alpha=-1$,

Β) να λύσετε την εξίσωση $x^x=e^{x-1}$, $x>0$

Γ) να λύσετε την ανίσωση $\ln\left(2x^2+2\right)-\frac{1}{x^2+3}>\ln\left(x^2+3\right)-\frac{1}{2x^2+2}$

2.305 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f$ για την οποία ισχύει $f'(x)=e^{x-f(x)}+e^{2\ln x-f(x)}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και $f(0)=0$. Να αποδείξετε ότι:

Α) Η $f$ δεν παρουσιάζει ακρότατο σε κανένα σημείο του διαστήματος $(0,+\infty)$.

Β) Το θεώρημα του Rolle δεν εφαρμόζεται σε κανένα διάστημα της μορφής $[0,x_o]$.

Γ) Ο τύπος της συνάρτησης $f$ είναι $f(x)=\ln\frac{3e^x+x^3}{3}$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$

Δ) Η $f$ δεν έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

Ε) Η ευθεία $(\varepsilon)$: $y=-\frac{3e+1}{3e+3}x+1$ είναι κάθετη στην εφαπτομένη της $C_f$ στο $x_o=1$

2.306 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \lambda - \ln x$, $\lambda \in R$

Α) Να βρείτε τα ακρότατα της $f$

Β) Να αποδείξετε ότι $\ln x \le \frac{x}{e}$ για κάθε $x > 0$

Γ) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

Δ) Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R$ το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $xe^{\lambda} = e^{x}$

2.307 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{x}{\alpha}\right) - \frac{x}{\alpha} + 1$ με $\alpha>0$

Α) Να βρείτε το πρόσημο της $f$.

Β) Να λύσετε την εξίσωση $e\frac{x}{\alpha} = e^{\frac{x}{\alpha}}$ για κάθε $\alpha>0$

Γ) Αν ισχύει ότι $\ln\left(\frac{x}{\alpha}\right) \le \frac{\beta x}{\alpha} - \beta$ για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε ότι $\beta=1$.

2.308 *Έστω συνάρτηση $f$, παραγωγίσιμη στο $R$, που ικανοποιεί τις σχέσεις $f(x) - e^{-f(x)} = x - 1$, $x \in R$ και $f(0) = 0$

Α. Να εκφράσετε την $f'$ συναρτήσει της $f$ και να δείξετε ότι η $f$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $R$

Β. Να αποδείξετε ότι $\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x) < x$, για κάθε $x > 0$.

Γ. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f$ στο $+\infty$.

2.309 * Έστω συνάρτηση $g:(0,+\infty) \to R$ παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με, $g(1) = -2 - \lambda$, $g'(1) = -8$, $g(x) + \lambda x + 4 \le \frac{2}{x}$ και $g(x) \ge -4 - 6x + \frac{1}{4x}$ για κάθε $x > 0$

Α) Να βρείτε τον αριθμό $\lambda$

Β) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της $C_g$ στο $+\infty$ και να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x) + \eta\mu x + 4}{xg(x) + 6x^2 + \ln x}$

2.310 Έστω συνάρτηση $f$ ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 4)$ για την οποία ισχύουν: $e^{f(x)} = 3f'(x)f''(x)$ για κάθε $x < 4$, $f'(x) \ne 0$ για κάθε $x < 4$ και $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$

Α) Να δείξετε ότι η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 4)$, να βρείτε το πρόσημο της $f$ και να αποδείξετε ότι η $C_f$ τέμνει τον $x'x$ σε ένα μόνο σημείο.

Β) Να δείξετε ότι $3f''(x) = (f'(x))^2$ και ότι η $C_f$ στρέφει τα κοίλα άνω στο $(-\infty, 4)$

Γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x_o \in (0,1)$ ώστε $f(x_0) = -x_0 f'(x_0)$ (3)

Δ) Να βρείτε τον τύπο της $f$ για $x < 4$

Ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει μοναδική λύση στο $(-\infty, 4)$ για κάθε $\kappa \in R$

Στ) Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της $f$.

Ζ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f$.

**2.311** Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $R$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$.

Α) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $g(x) = |f(x)|$

Β) Αν επιπλέον είναι $0 < f(x) \neq 1$ για κάθε $x \in R$ και $f(1) = e$, $f'(1) = 1$ τότε:

α) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $g(x) = |\ln(f(x))|$

Β) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = |\ln(f(x))|$ στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$

**2.312** Έστω η συνάρτηση $f: R \to R$ η οποία είναι έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $IR$.

Αν ισχύει ότι $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2f(x-3h)-5f(x)+3f(x+2h)}{h^2} = \dfrac{60}{x^3}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\sqrt{4x^2+9}\right) = 2004$, να δείξετε ότι

Α) $f''(x) = \dfrac{4}{x^3}$

Β) η ευθεία $y = 2x + 2004$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της $C_f$ στο $+\infty$

Γ) $f(x) = \dfrac{2}{x} + 2x + 2004$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

**2.313** ** Δίνεται συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία γνωρίζουμε ότι: $f(0) = 0$ και $f'(x) = \dfrac{1}{3f^2(x)+1}$ για κάθε $x \in R$.

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = f^3(x) + f(x) - x$, $x \in IR$ είναι σταθερή.

Β) Να αποδείξετε ότι η $f$ είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$

Γ) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f$ στο $x_o = 0$

Δ) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x^3} = 0$

**2.314** **Η συνάρτηση $f$ είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει ότι $f(f'(x)) + f(x) = 0$ για κάθε $x > 0$. Να αποδείξετε ότι:

Α) η $f$ είναι $1-1$ Β) $f'(f'(x)) = x$ για κάθε $x > 0$ Γ) αν $f(1) = 1$ τότε $f(x) = \ln x$

**2.315** Έστω $f$ συνεχής στο , παραγωγίσιμη στο $(\alpha, \beta)$) με $f(\alpha) = \alpha$, $f(\beta) = \beta$

Α) Να δείξετε ότι υπάρχει τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 1$

Β) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοια ώστε $2f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 3$

Γ) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_o \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_o) = \dfrac{2\alpha+\beta}{3}$.

Δ) Αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ με $x_1 \neq x_2$ τέτοια ώστε

$\dfrac{1}{f'(x_1)} + \dfrac{2}{f'(x_2)} = 3$

2.316 * Έστω συνάρτηση $f$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ παραγωγίσιμη στο $(\alpha,\beta)$ και κυρτή στο $[\alpha,\beta]$. Αν $f(\alpha)<f(\beta)$ να αποδείξετε ότι:

Α) υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $f(x_0)=\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$.

Β) υπάρχουν $x_1\in(\alpha,\beta)$ και $x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1\neq x_2$ τέτοια ώστε: $\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}=2\cdot\dfrac{\beta-\alpha}{f(\beta)-f(\alpha)}$

Γ) το $x_o$ του (Α) ερωτήματος βρίσκεται πλησιέστερα στο $\beta$ απ' ότι στο $\alpha$.

2.317 Δίνεται η συνάρτηση $f$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1,e]$ με $f(1)=2$, $f(e)=e+1$ και σύνολο τιμών το $[-1,4]$. Να αποδείξετε ότι :

Αα) Υπάρχουν $x_1,x_2\in(1,e)$ με $x_1\neq x_2$ ώστε $f'(x_1)=f'(x_2)=0$

β) Υπάρχει $\xi\in(1,e)$ ώστε $f''(\xi)=0$

γ) Υπάρχει $x_o\in(1,e)$ ώστε $f(x_o)\left(f'(x_o)-4f^4(x_o)\right)=x_o$

Βα) Η ευθεία $y=-x+e+2$ τέμνει τη γραφική παράσταση της $f$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο $(1,e)$

β) Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,e)$ με $\xi_1\neq\xi_2$ ώστε να ισχύει ότι $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=1$

2.318 Μια συνάρτηση $f$ είναι ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $R$ και για κάθε $x\in R$ ισχύει: $f^2(3x+1)+4\leq 4\cdot f(2x^2+x+1)$. Να αποδείξετε τα εξής:

Α Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,4)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi)=0$

Β Η συνάρτηση $f$ δεν αντιστρέφεται

Γ $f'(1)=f'(4)$

Δ Η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $R$

2.319 Ένα σώμα κινείται στον άξονα $x'x$ και η θέση του δίνεται από τη συνάρτηση $x(t)=t^3-6t^2+9t-4$ όπου $t$ είναι ο χρόνος σε sec. Να βρείτε:

Α) που βρίσκεται και προς ποια κατεύθυνση κινείται το σώμα τη χρονική στιγμή $t_o=0$

Γ) ποιες χρονικές στιγμές το σώμα αλλάζει κατεύθυνση,

Δ) πόσες φορές αλλάζει η κατεύθυνση της κίνησης

Ε) ποια χρονική στιγμή δεν επιταχύνεται το σώμα.

2.320 Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν :

- Η $f'$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$
- $f(2)=2$
- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2-2016h)-f(2-2015h)}{h}=0$

2.321 Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μίας παραγώγου $f'$ της συνάρτησης f η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο $[0,3]$. Ισχύουν ακόμα:

$$f(0)=0\ ,\ E(\Omega_1)=E(\Omega_2)=\frac{E(\Omega_3)}{2}=3$$

Α. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f και τα ακρότατα

Β. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής

Γ. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x}$

Β4. Να δείξετε ότι υπάρχει σημείο $M(\xi,f(\xi))$ της $C_f$ με $\xi\in(1,2)$ στο οποίο η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

*Τα επόμενα θέματα είναι από ΔΗΜΟΣΙΕΥΜΕΝΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ ΣΤΟ ΔΙΑΔΙΚΤΥΟ (Οι πηγές αναφέρονται, όπου υπάρχουν)*

2.322 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}x^2\ln x, & x>0\\ \kappa\ \ , & x=0\end{cases}$

Α. Να αποδείξετε ότι $\kappa=0$

Β. i) Να βρείτε την παράγωγο της $f$.

ii) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και να εξετάσετε αν παρουσιάζει καμπή.

Δ. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\ge 1$ ισχύει : $\frac{f(x+1)-f(x)}{x}>1+\ln x^2$.

Ε. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{f(x+1)}{(x+1)^2}-\frac{f(x)}{x^2}\right)\cdot\eta\mu x\right]$

Στ. Να αποδείξετε ότι $2f(1+h)<f(1+2h)$ , όπου $h>0$ . Νικολόπουλος

2.323 Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$f^2(x)=x^6$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(-2)<0<f(2)$

Α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^3, x\in\mathbb{R}$

Β. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τη συνάρτηση $f^{-1}$

Γ. Να αποδείξετε ότι:

α) η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο $M(\alpha,f(\alpha))$ με $\alpha\ne 0$ έχει με τη $C_f$ και άλλο κοινό σημείο, το Ν.

β) η κλίση της $C_f$ στο σημείο Ν είναι τετραπλάσια της κλίσης της $C_f$ στο Μ

Δ. Ένα σημείο $\Sigma(x,y)$ με $x>0$ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^3$ και έστω Α η προβολή του Σ στον άξονα x΄x. Το σημείο Α απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων Ο(0,0) με ρυθμό $1\,{}^{cm}\!/_{s}$. Τη χρονική στιγμή $t_0$ που η τετμημένη του Σ είναι 2 να βρείτε το ρυθμό μεταβολής.

α) της απόστασης ΑΣ

β) της γωνίας ΣΟΑ Λεόντιος

**2.324** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} x^2\ln x &, x>0 \\ \alpha &, x=0 \end{cases}$

Α. Να αποδείξετε ότι $\alpha=0$

Β. Να βρείτε την παράγωγο της f

Γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

Δ. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\geq 1$ ισχύει : $\dfrac{f(x+1)-f(x)}{x}>1+\ln x^2$

Ε. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\dfrac{f(x+1)}{(x+1)^2}-\dfrac{f(x)}{x^2}\right)\cdot\text{συν}3x\right]$ Κολλέγιο Αθηνών

**2.325** Θεωρούμε επίσης της συνάρτηση $G:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$ που είναι μία παράγουσα της συνάρτησης

$g(x)=\dfrac{f(x)-2}{x-2}$ , x>2 Να αποδείξετε ότι :

Α. $f'(2)=0$ καθώς επίσης ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=2$

Β. Η συνάρτηση G είναι γνησίως αύξουσα στο $(2,+\infty)$

Γ. Να λύσετε την εξίσωση $G(3^x+2)+G(2^x+2)=G(e^x+2)+G(2016^x+2)$

Δ. Η συνάρτηση G είναι κυρτή

Ε. Υπάρχει $\xi\in(3,4)$ τέτοιο ώστε $(2\xi^2-11\xi+14)G(\xi)=(\xi^2-7\xi+12)(2-f(\xi))$

Κολλέγιο Αθηνών

**2.326** Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x\cdot f(x)+3\text{ημ}x=x^2$ , για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Α. Να δείξετε ότι $f(x)=\begin{cases} x-\dfrac{3\text{ημ}x}{x} &, \text{αν } x\neq 0 \\ -3 &, \text{αν } x=0 \end{cases}$.

Β. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

Γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=e^{-x}$ έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα . Αρσάκειο

**2.327** Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ , $x\in\mathbb{R}$

Α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μία τουλάχιστον εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f η οποία διέρχεται από το σημείο $A(1,0)$

Β. Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση g για την οποία ισχύει : $|g(x)+3x-2|\leq|f(x)|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

α. Αποδείξτε ότι η ευθεία $y=-3x+2$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g στο $+\infty$

β. Να υπολογίσετε τα όρια : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^{g(x)}+5^{g(x)}}{4^{g(x)}-3^{g(x)+1}}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2g(x)-x}{xg(x)+x^2\left(3+\text{ημ}\dfrac{1}{x}\right)}$ Αρσάκειο

2.328 Δίνεται η συνάρτηση $f$ με τύπο $f(x)=\dfrac{x-1}{e^x-x}$.

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f$

Β. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο σημεία $A(x_1,f(x_1))$ , $B(x_2,f(x_2))$ με $x_1<1<x_2$, στα οποία οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f είναι παράλληλες στον $x'x$.

Γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $\Gamma(\xi,f(\xi))$ στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f' είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Δ. Να βρείτε τα όρια : $L_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu f(x)}{f^3(x)}$ , $L_2=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\eta\mu x-\eta\mu x}{e^x-e^{\ln x}}$ Νικολόπουλος

2.329 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $e^{f(x)}+f(x)=x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ .

Α. Να μελετήσετε την $f$ ως προς τη μονοτονία και να ορίσετε την $f^{-1}$

Β. Να δείξετε ότι $f(0)=0$ και να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f$ στο σημείο της $M(0,f(0))$

Γ. Να μελετήσετε την f ως προς τη κυρτότητα και να δείξετε ότι $2f(x)\le x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει αριθμός $\xi\in(0,2)$, ώστε $f(\xi)=\dfrac{(\xi-1)\sqrt{e^{\xi}}}{2}$

Ε) Να βρείτε τα κοινά σημεία των $f$ και $f^{-1}$ και να αποδείξετε ότι το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτομένων στις γραφικές παραστάσεις των $f$ και $f^{-1}$ στα σημεία τους με τετμημένες $x$ και $f(x)$ αντίστοιχα, ισούται με ένα Νικολόπουλος

2.330 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases}x^2+\alpha x+\beta, & x>2\\ 4\sqrt{x+2}-2, & -2\le x\le 2\end{cases}$ και $g(x)=\ln x+\kappa$, όπου η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$ και $\kappa$ πραγματικός αριθμός

Α. Να αποδείξετε ότι $\alpha=-3$ και $\beta=8$

Β. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού κ ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $A(2,f(2))$ να εφάπτεται της γραφικής παράστασης της $g$

Γ Να βρείτε –εφόσον υπάρχει - την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f$ που διέρχεται από το σημείο $\Sigma(0,7)$ και έχει αρνητική κλίση.

2.331 Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f,g:[0,+\infty)\to R$ των οποίων οι γραφικές παραστάσεις έχουν κοινή εφαπτομένη την ευθεία $y=x+1$ στο κοινό τους σημείο με τετμημένο $x_0=0$. Δίνεται επιπλέον ότι:

Για κάθε $x\in[0,+\infty)$ είναι $g(x)\neq 0$, $g'(x)\neq 0$ και $f'(x)-g(x)=e^x-x-1$

Η $g'$ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$

Α Να αποδείξετε ότι $f(0)=g(0)=f'(0)=g'(0)=1$

Β Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in[0,+\infty)$ ισχύει ότι $g'(x)>0$ και $g(x)\geq 1$

Γ Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in[0,+\infty)$ ισχύει ότι $e^x\geq x+1$ και $f'(x)\geq 1$

Δ Να αποδείξετε ότι η $f$ είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$ και ισχύει $f(x)\geq x+1$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$

Ε Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-e^x}{x^2}$

2.332 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$\lim_{t\to 0}\left[f\left(1+t^2\right)\right]=1 \quad \text{και} \quad \lim_{t\to 0}\frac{f(1+2t)-f(1)}{t}=4$$

Α. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1,f(1))$ έχει εξίσωση $(\varepsilon_A):y=2x-1$

Β. Έστω $d=M\Sigma$ όπου Μ σημείο που κινείται στην εφαπτομένη $(\varepsilon_A)$ και Σ(0,1).

Να αποδείξετε ότι καθώς το Μ διέρχεται από το σημείο Α, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του Μ ως προς t είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της απόστασης d.

Γ. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$g(f(x)+x)+g(2x)=5x^2\ln x+6 \text{ για κάθε } x>0$$

Γα) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $B(2,g(2))$ σχηματίζει με τους άξονες x'x και y'y ισοσκελές τρίγωνο

Γβ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x-1)+xg(x)-7}{x-2}$

2.333 Δίνεται η συνάρτηση $f$ ορισμένη στο $A=[0,1)\cup(1,+\infty)$ για την οποία ισχύει ότι $f(x)=\dfrac{x}{\ln^2 x}$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$

Α) Αν η $f$ είναι συνεχής στο Α, να υπολογίσετε το $f(0)$

Β) Να γίνει η γραφική παράσταση της $f$

Γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x=\alpha\cdot\ln^2 x$, $\alpha\in R$ είναι ισοδύναμη με την $f(x)=\alpha$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ και να βρείτε την τιμή του $\alpha$ για την οποία η εξίσωση έχει δύο ακριβώς λύσεις.

Δ) Να αποδείξετε ότι $37f(125)+61f(27)<98f(64)$