

**ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ
Α' ΛΥΚΕΙΟΥ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1**

(1) Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): 4x - 3y - 9 = 0$ και $(\varepsilon_2): 4x - 3y - 24 = 0$

(α) να δείξετε ότι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

(β) να βρείτε την απόσταση των δύο ευθειών.

Λύση:

(α) μπορούμε να αποδείξουμε την παραλληλία με δύο τρόπους:

Πρώτος: $\frac{4}{4} = \frac{-3}{-3} \neq \frac{-9}{-24}$

Δεύτερος: $\lambda_1 = \frac{4}{3}$ και $\lambda_2 = \frac{4}{3}$, βρίσκουμε τις κλίσεις των ευθειών και βλέπουμε ότι ισούνται.

(β) βρίσκουμε ένα σημείο A της ε_1 και μετά την απόσταση του A από την άλλη ευθεία την ε_2 .

Αν $x = 0 \Rightarrow y = \frac{9}{-3} = -3$ άρα $A(0, -3)$

Βρίσκουμε την απόσταση του A από την ε_2 με τον τύπο: $d = \frac{|ax_1 + by_1 + \gamma|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Είναι: $d = \frac{|4 \cdot 0 - 3(-3) - 24|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{15}{5} = 3$ μονάδες

(2) (α) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση $(\lambda^2 - 4)x + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)y + \lambda - 1 = 0$ να παριστάνει ευθεία γραμμή.

(β) Να γράψετε την εξίσωση μιας από τις πιο πάνω ευθείες και να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες.

Λύση:

(α) για να είναι μια εξίσωση της μορφής $ax_1 + by_1 + \gamma = 0$ ευθεία, θα πρέπει οι συντελεστές α και β να μην είναι ταυτόχρονα μηδέν. Δηλαδή:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda^2 - 4 \neq 0 \\ \lambda^2 - 5\lambda + 6 \neq 0 \end{array} \right\} (\Sigma)$$

Είναι καλύτερα να λύσουμε το σύστημα:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda^2 - 4 = 0 \\ \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} (\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0 \\ (\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda = 2$$

και ακολούθως να απορρίψουμε τις λύσεις του.

Άρα η εξίσωση παριστάνει ευθεία για όλες τις τιμές του λ εκτός από την $\lambda = 2$

(β) όταν δώσουμε μια οποιαδήποτε τιμή στο λ , εκτός από την $\lambda = 2$ θα πάρουμε ευθεία:

Π.χ Για $\lambda = 0 \Rightarrow -4x + 6y - 1 = 0$

Σημεία τομής με τους άξονες: για $x=0 \Rightarrow y=\frac{1}{6}$

για $x=1 \Rightarrow y=\frac{5}{6}$

Σημεία τομής: $A\left(0, \frac{1}{6}\right)$ και $B\left(1, \frac{5}{6}\right)$

(3) Δίνεται ένα τρίγωνο ABΓ με κορυφές τα σημεία A(-1, 2), B(1, 5) και Γ(4, 1). Να βρείτε:

(α) την εξίσωση του ύψους που φέρεται από την κορυφή Α.

(β) το μήκος του τμήματος ΒΓ.

(γ) την γωνία Β.

(δ) το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.

Λύση:



(ενδεικνυται να γίνεται πάντοτε σχήμα σε σύστημα αξόνων για ακρίβεια)

(α) η ευθεία του ύψους που φέρεται από την κορυφή Α, είναι κάθετη στην ευθεία ΒΓ που έχει κλίση $\lambda_{B\Gamma} = \frac{5-1}{1-4} = -\frac{4}{3}$. Συνεπώς το ύψος που περνά από την κορυφή Α(-1, 2) έχει κλίση $\lambda = \frac{3}{4}$.

Η εξίσωση του είναι: $y-2 = \frac{3}{4}(x+1) \Rightarrow 4y-8 = 3x+3 \Rightarrow 3x-4y+11=0$

(β) $(B\Gamma) = \sqrt{(5-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{16+9} = 5$ μονάδες

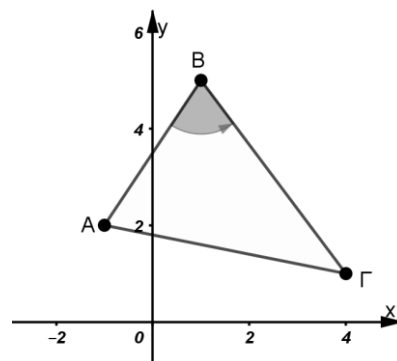
(γ) Η γωνία Β από το σχήμα που δίνεται φαίνεται ότι είναι οξεία. Χρησιμοποιούμε τον

τύπο: $\varepsilon\varphi B = \frac{\lambda_{B\Gamma} - \lambda_{AB}}{1 + \lambda_{B\Gamma} \cdot \lambda_{AB}}$ με $\lambda_{B\Gamma} = -\frac{4}{3}$ και $\lambda_{AB} = \frac{3}{2}$

$$\varepsilon\varphi B = \frac{-\frac{4}{3} - \frac{3}{2}}{1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{17}{6} \Rightarrow B = 70,56^\circ$$

(Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τον τύπο

$\varepsilon\varphi B = \left| \frac{\lambda_{B\Gamma} - \lambda_{AB}}{1 + \lambda_{B\Gamma} \cdot \lambda_{AB}} \right|$ που δίνει πάντοτε οξεία γωνία.)



$$(δ) E = \frac{1}{2}|D|, \text{ όπου } D = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1(5-1) - 2(1-4) + 1(1-20) = -17$$

Άρα $E = \frac{1}{2}|-17| = \frac{17}{2}$ τετραγωνικές μονάδες.

(4) Θεωρούμε την καμπύλη $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ και τρία σημεία της $A\left(\alpha, \frac{1}{\alpha}\right)$,

$B\left(\beta, \frac{1}{\beta}\right)$ και $\Gamma\left(\gamma, \frac{1}{\gamma}\right)$. Αν το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο στο B, να αποδείξετε

ότι: $\alpha\beta^2\gamma = -1$

Απόδειξη:

$$\lambda_{AB} = \frac{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}}{\alpha - \beta} = \frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta(\alpha - \beta)} = -\frac{1}{\alpha\beta}$$

$$\lambda_{B\Gamma} = \frac{\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\beta}}{\gamma - \beta} = \frac{\beta - \gamma}{\beta\gamma(\gamma - \beta)} = -\frac{1}{\beta\gamma}$$

Η γωνία B είναι ορθή και συνεπώς οι ευθείες AB και BΓ τέμνονται κάθετα στο B.

$$\lambda_{AB} \cdot \lambda_{B\Gamma} = -1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha\beta} \cdot \frac{1}{\beta\gamma} = -1 \Rightarrow \alpha\beta^2\gamma = -1$$

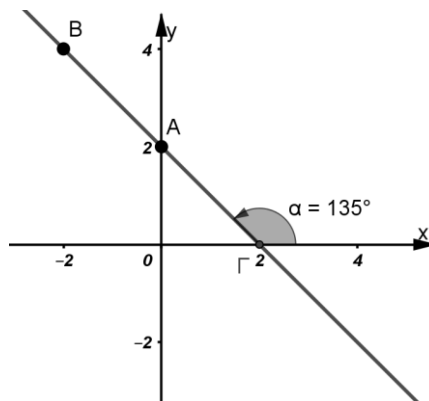
(5) Ποια γωνία σχηματίζει με τον άξονα των x η ευθεία που περνά από τα σημεία A(0,2) και B(-2,4);

Λύση:

Βρίσκουμε την κλίση της. Είναι: $\lambda = \frac{4-2}{-2-0} = -1$. Επειδή η κλίση είναι αρνητική

ξέρουμε ότι η γωνία θα είναι αμβλεία. Ας τη συμβολίσουμε με α.

$$\epsilon\phi\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = 135^\circ$$



Ακόμη αν AB είναι κάθετη στην ευθεία (ε) τότε στο τρίγωνο ABO που είναι ορθογώνιο στο B δεν μπορεί η κάθετη AB να ισούται με την υποτεινούσα AO .

(8) Να βρείτε την εξίσωση ευθείας που απέχει από την αρχή των αξόνων 3 μονάδες και έχει κλίση $\lambda = 2$.

Λύση:

Επειδή η ευθεία έχει κλίση $\lambda = 2$ θα είναι της μορφής $y = 2x + \theta$

Απόσταση του $(0, 0)$ από την ευθεία αυτή:

$$d = \frac{|2 \cdot 0 - 0 + \theta|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|\theta|}{\sqrt{5}} = 3 \Rightarrow |\theta| = 3\sqrt{5} \Rightarrow \theta = \pm 3\sqrt{5}$$

Συνεπώς υπάρχουν δύο ευθείες με αυτή την ιδιότητα. Η $y = 2x + 3\sqrt{5}$ και

$$y = 2x - 3\sqrt{5}$$

(Να τις ζωγραφίσετε περίπου)

ΤΕΛΟΣ