

ΥΛΙΚΟ ΕΜΠΕΔΩΣΗΣ – ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ – ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ

Οι δραστηριότητες που ακολουθούν έχουν σταχυολογηθεί από εξεταστικά δοκίμια προηγούμενων ετών και παρουσιάζονται κατά διδακτική ενότητα.

(Α) ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Προτού ξεκινήσετε να ασχοληθείτε με τη λύση των επόμενων θεματικών ασκήσεων σας προτείνουμε να θυμηθείτε τις σχετικές έννοιες και διαδικασίες που συνοψίζονται στο βιβλίο σας (Μέρος Α΄) και συγκεκριμένα:

- Τους ορισμούς στη σελ. 11
- Το θεώρημα Μεγίστης και Ελαχίστης τιμής στη σελ. 14
- Τους ορισμούς στη σελ. 16
- Τα κριτήρια Μονοτονίας στη σελ. 21
- Τα τοπικά ακρότατα, θεώρημα Fermat στη σελ. 23 και τα κριτήρια στη σελ. 26
- Την κυρτότητα συνάρτησης και τα σημεία καμπής στις σελ. 34,35 και 36.

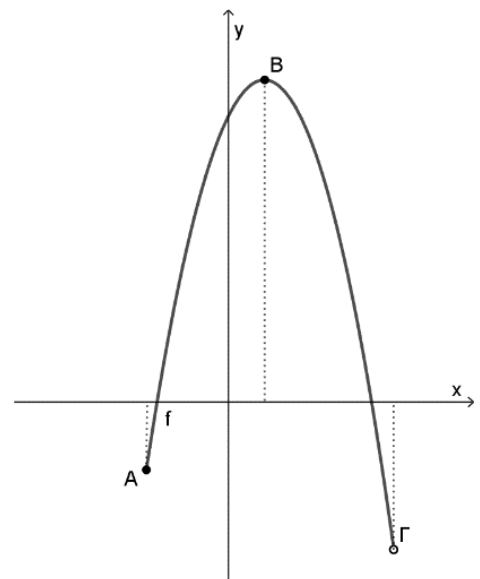
Καλή επιτυχία!

1. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $\varphi''(x) = x(3-x)(x+4)^2, \forall x \in \mathbb{R}$.

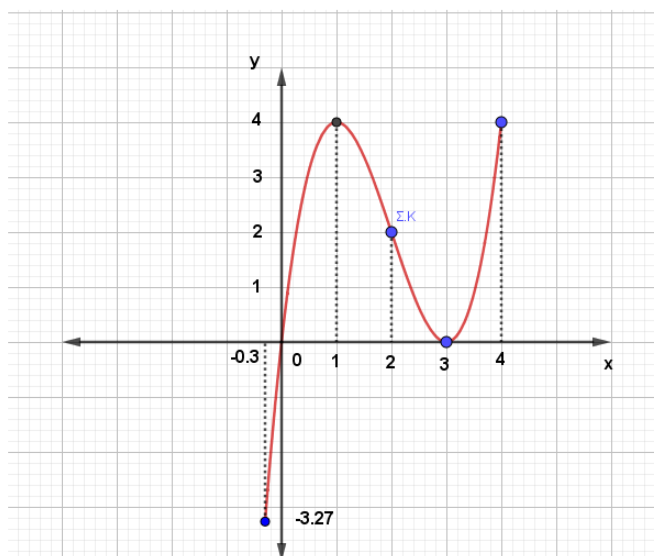
- α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς την κυρτότητα.
- β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της φ παρουσιάζει σημεία καμπής.

2. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με πεδίο ορισμού $[x_0, x_2]$. Τα σημεία Α, Β, Γ έχουν τετμημένες x_0, x_1, x_2 αντίστοιχα και $f'(x_1) = 0$.

- α) Να βρείτε και να χαρακτηρίσετε τα ακρότατα της συνάρτησης f .
- β) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f .
- γ) Να βρείτε το πρόσημο της παραγώγου της συνάρτησης f στο διάστημα (x_1, x_2) .



3. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας τριτοβάθμιας πολυωνυμικής συνάρτησης $f: [-0,3, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x = 2$.



Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

- α) $f'(x) = 0$
- β) $f''(x) = 0$
- γ) $f'(x) < 0$
- δ) $f'(x) > 0$ και $f''(x) > 0$

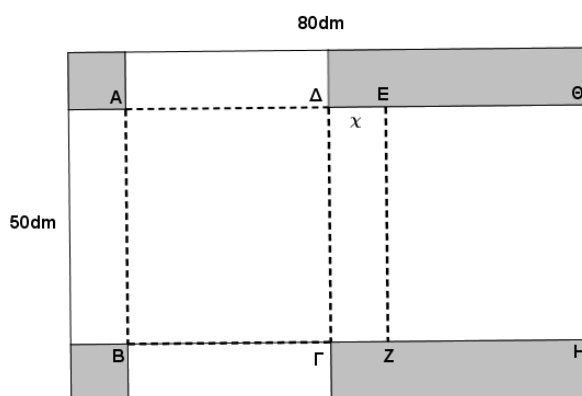
4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 9x + 1$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = -1$ και σημείο καμπής στο $x = 1$.

Να βρείτε τις τιμές των α και β .

5. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 6x^3 - \alpha x^2 + \beta x + 1$ με $x \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τις τιμές των α, β , ώστε η f να έχει στη θέση $x_1 = 2$ σημείο καμπής και στη θέση $x_2 = 1$ τοπικό ακρότατο.

6. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x^3 - 3x^2$. Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα, τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη, τα σημεία καμπής της, τη συμπεριφορά της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της, να κάνετε την γραφική της παράσταση
7. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = x^3 - 2x^2 + x, \forall x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα, τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη, τα σημεία καμπής της, τη συμπεριφορά της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της και στη συνέχεια να κάνετε την γραφική της παράσταση.
8. Δίνεται ένα χαρτόνι σχήματος ορθογωνίου διαστάσεων $80dm \times 50dm$. Πρόκειται να κατασκευαστεί με αυτό ένα κλειστό κουτί, σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου ύψους $\Delta E = x dm$ με βάσεις τα ορθογώνια $EZH\Theta$ και $AB\Gamma\Delta$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Τα σκιασμένα μέρη του σχήματος θα αφαιρεθούν. (Οι διπλώσεις θα γίνουν κατά μήκος των τμημάτων $AB, \Gamma\Delta, EZ, A\Delta$ και $B\Gamma$).



- α) Να δείξετε ότι ο όγκος V του κουτιού ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο $V(x) = 2x^3 - 130x^2 + 2000x dm^3$
- β) Να υπολογίσετε τις διαστάσεις του κουτιού, ώστε ο όγκος του να είναι μέγιστος.

9. Μια εργοληπτική εταιρεία κατασκευάζει εξοχικές κατοικίες. Το συνολικό κόστος (K) κατασκευής x εξοχικών κατοικιών, σε χιλιάδες ευρώ το χρόνο, δίνεται από τον τύπο $K(x) = 50 + 3x$, $0 \leq x \leq 95$.

Η τιμή πώλησης κάθε εξοχικής κατοικίας είναι $(20 - \frac{x}{10})$ χιλιάδες ευρώ.

- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση του κέρδους (P) από την πώληση x εξοχικών κατοικιών, σε χιλιάδες ευρώ το χρόνο, δίνεται από τον τύπο:

$$P(x) = 17x - \frac{x^2}{10} - 50, \quad 0 \leq x \leq 95$$

- β) Να βρείτε πόσες εξοχικές κατοικίες πρέπει να κατασκευάζει η εργοληπτική εταιρεία το χρόνο, ώστε να έχει το μέγιστο δυνατό κέρδος.

(B) ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Προτού ξεκινήσετε να ασχοληθείτε με τη λύση των επόμενων θεματικών ασκήσεων σας προτείνουμε να θυμηθείτε τις σχετικές έννοιες και διαδικασίες που συνοψίζονται στο βιβλίο σας (Μέρος Α΄) στις σελίδες 62 – 77. Καλή επιτυχία!

1. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int (3x^6 - 2x^3 + 8x + 1)dx$.

2. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ , λ ώστε να ισχύει:

$$\int \lambda x^{\kappa+2} dx = x^8 + c$$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) = 12x$. Να βρείτε τον τύπο της f για την οποία ισχύουν $f'(1) = 0$ και $f(2) = 3$.
4. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από το σημείο $(1,0)$. Αν $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι η f δίνεται από τον τύπο: $f(x) = x^3 - 2x^2 + x, \forall x \in \mathbb{R}$
5. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) = 12x$. Να βρείτε τον τύπο της f για την οποία ισχύουν $f'(1) = 0$ και $f(2) = 3$.
6. Η ποσότητα ενός φαρμάκου (σε mg), στον οργανισμό του ανθρώπου, δίνεται από τη συνάρτηση $\Pi(t)$, όπου t είναι ο χρόνος μετά τη λήψη του φαρμάκου (σε ώρες).
- Δίνεται ότι $\Pi'(t) = 12 - 6t, t \geq 0$. Μια ώρα μετά από τη λήψη του φαρμάκου υπάρχουν 9 mg φαρμάκου στον οργανισμό του ανθρώπου.
- α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση Π δίνεται από τον τύπο $\Pi(t) = 12t - 3t^2, t \geq 0$.
- β) Να βρείτε:
- σε πόσες ώρες μετά τη λήψη του φαρμάκου υπάρχει στον οργανισμό του ανθρώπου η μέγιστη δόση του φαρμάκου,
 - τη μέγιστη δόση του φαρμάκου (σε mg), που υπάρχει στον οργανισμό του ανθρώπου,
 - σε πόσες ώρες μετά τη λήψη του, το φάρμακο αυτό ΔΕΝ θα υπάρχει στον οργανισμό του ανθρώπου.

(Γ) ΣΥΝΟΛΑ – ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ - ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Προτού ξεκινήσετε να ασχοληθείτε με τη λύση των επόμενων θεματικών ασκήσεων σας προτείνουμε να μελετήσετε τους σχετικούς ορισμούς, έννοιες και θεωρήματα που περιγράφονται στην ενότητα 3 του βιβλίου σας (Μέρος Β'). Καλή επιτυχία!

1. Δίνονται τα ψηφία 1,3,6,7,8,9.

Να βρείτε το πλήθος των τετραψήφιων αριθμών που μπορούν να σχηματιστούν με τα πιο πάνω ψηφία χωρίς επανάληψη ψηφίου.

2. Σε ένα σχολείο φοιτούν στη Β' Λυκείου 205 μαθητές. Οι 80 μαθητές από αυτούς επέλεξαν το μάθημα της Φυσικής, οι 65 επέλεξαν το μάθημα της Βιολογίας και οι 34 επέλεξαν και τα δύο μαθήματα. Να βρείτε πόσοι μαθητές δεν επέλεξαν κανένα από τα δύο αυτά μαθήματα

3. Δίνονται τα σύνολα $A=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ και $B=\{\epsilon,\omicron,\eta\}$.

Να βρείτε το πλήθος των λέξεων με πέντε γράμματα (με νόημα ή χωρίς νόημα) που μπορούν να σχηματιστούν, αν επιλέξουμε τυχαία τρία γράμματα από το σύνολο A και δύο γράμματα από το σύνολο B.

4. Δίνονται δύο ενδεχόμενα A, B του ιδίου δειγματικού χώρου Ω , με $P(A) = 35$, $P(A \cap B) = 14$ και $P(A/B) = 34$.

α) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες:

i. $P(A - B)$

ii. $P(A' \cup B')$

iii. $P(B/A)$

β) Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα.

5. Τα στοιχεία του συνόλου Ω είναι όλοι οι εξαψήφιοι αριθμοί που σχηματίζονται με τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, χωρίς επανάληψη.
- α) Να βρείτε το πλήθος των στοιχείων του συνόλου Ω .
 - β) Αν πάρουμε τυχαία ένα αριθμό από το σύνολο Ω , να βρείτε την πιθανότητα ο αριθμός που επιλέγηκε να είναι πολλαπλάσιο του 5.
6. Ένα μικρό καταφύγιο σκύλων φιλοξενεί οκτώ (8) αρσενικούς και έξι (6) θηλυκούς σκύλους. Μια μέρα φτάνει στο καταφύγιο μια φιλόζωη οικογένεια η οποία θέλει να υιοθετήσει τέσσερις (4) σκύλους.
- α) Να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή των σκύλων που θα υιοθετήσει η οικογένεια, χωρίς κανένα περιορισμό ως προς το φύλο.
 - β) Αν η οικογένεια επιλέξει τους τέσσερις (4) σκύλους στην τύχη, να υπολογίσετε τις πιθανότητες των πιο κάτω ενδεχομένων:
 - i. A: να επιλέξει ακριβώς ένα αρσενικό σκύλο,
 - ii. B: να επιλέξει το πολύ ένα θηλυκό σκύλο.
7. Η Αυγή κάθε βράδυ, είτε παρακολουθεί τηλεόραση είτε διαβάζει. Η πιθανότητα να παρακολουθεί τηλεόραση είναι 45. Όταν παρακολουθεί τηλεόραση η πιθανότητα να αποκοιμηθεί στην πολυθρόνα είναι 34, ενώ όταν διαβάζει η πιθανότητα να αποκοιμηθεί στην πολυθρόνα είναι 13.
- α) Να βρείτε την πιθανότητα κάποιο βράδυ η Αυγή να αποκοιμηθεί στην πολυθρόνα.
 - β) Δεδομένου ότι κάποιο βράδυ η Αυγή αποκοιμήθηκε στην πολυθρόνα, να βρείτε την πιθανότητα να παρακολουθούσε τηλεόραση.

8. Δίνεται η λέξη **ΔΙΑΜΑΝΤΙΑ**

- α) i) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.
ii) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης, που έχουν τα φωνήεντα σε συνεχόμενες θέσεις.
- β) Αν πάρουμε στην τύχη ένα από τους αναγραμματισμούς της λέξης **ΔΙΑΜΑΝΤΙΑ**,
να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:
i. A: Ο αναγραμματισμός να έχει τα φωνήεντα σε συνεχόμενες θέσεις.
ii. B: Ο αναγραμματισμός να μην έχει τα A σε συνεχόμενες θέσεις.

9. Δίνεται η λέξη **ΣΤΟΧΑΣΜΟΣ**.

- α) i) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.
ii) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης, που έχουν τα φωνήεντα σε συνεχόμενες θέσεις.
- β) i) Αν πάρουμε στην τύχη ένα από τους αναγραμματισμούς της λέξης **ΣΤΟΧΑΣΜΟΣ**, να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου:
 $A = \{\text{Ο αναγραμματισμός περιέχει τη λέξη ΣΤΟΧΟΣ}\}$
ii) Αν ο αναγραμματισμός περιέχει την λέξη **ΣΤΟΧΟΣ**, να βρείτε την πιθανότητα η λέξη **ΣΤΟΧΟΣ** να μην είναι στο τέλος του αναγραμματισμού.