

Ενότητα 1: Λογική**A. Ευθεία Απόδειξη**

A1. Να αποδείξετε ότι αν ο φυσικός αριθμός n είναι περιττός αριθμός τότε ο αριθμός $n^2 + 1$ είναι άρτιος.

A2. Αν οι θετικοί αριθμοί α, β είναι άρτιοι, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $3\alpha^2 - 3\beta^2$ διαιρείται με το 12.

A3. Αν $\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$.

A4. Να αποδείξετε ότι αν $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|x + y| = |x| + |y| \Leftrightarrow x, y \text{ ομόσημοι αριθμοί ή } x = 0 \text{ ή } y = 0.$$

B. Μέθοδος της εις άτοπον απαγωγής

B1. Να αποδείξετε ότι αν ο φυσικός αριθμός $5n + 4$ είναι περιττός τότε ο φυσικός αριθμός n είναι επίσης περιττός αριθμός.

B2. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+8}, x \neq -8.$$

Να αποδείξετε ότι $\forall x \in \mathbb{R} - \{-8\}, f(x) \neq 2$.

B3. Για κάθε πραγματικό αριθμό $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, να αποδείξετε ότι $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \geq 1$.

B4. Αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $|x| + |y| = 0$, τότε $x = y = 0$.

Γ. Μέθοδος της Μαθηματικής επαγωγής

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(\alpha) 1 + 5 + 9 + \dots + (4n - 3) = 2n^2 - n$$

$$(\beta) 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2 = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}$$

$$(\gamma) 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{n-1} = \frac{5^n - 1}{4}$$

$$(\delta) \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

Γ2. Να αποδείξετε ότι $\forall n \in \mathbb{N}$, ο αριθμός $(5^n + 3)$ είναι πολλαπλάσιο του 4.

Γ3. Να αποδείξετε ότι $\forall n \geq 3, 2^n > 2n + 1$.

Γ4. Να δείξετε ότι το 9 διαιρεί την παράσταση $A = 4^n + 15n - 1, \forall n \in \mathbb{N}$.