

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ -ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \sqrt{2-x}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = x + 1$.

Να βρείτε τους τύπους και το πεδίο ορισμού (ευρύτερο δυνατό) των συναρτήσεων:

(α) $\frac{f}{g}$

(β) $f \circ f$.

2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 1$ και $g(x) = \sqrt{x-3}$

(α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $\frac{f}{g}$

(β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $g \circ f$

(γ) Να υπολογίσετε το πιο κάτω όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - \sqrt{x+3})$$

3. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g και h με τύπους:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}, \quad g(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} \quad \text{και} \quad h(x) = \ln(x+2) \quad \text{αντίστοιχα.}$$

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f, g και h .

(β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $\frac{h}{f}$.

(γ) Να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες

(δ) Δίνεται η συνάρτηση $r(x) = -x^2 - 1$.

i. Να εξετάσετε, αν ορίζεται η συνάρτηση $g \circ r$.

ii. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{r(x)-r(1)}{x-1}$.

4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x - 5)$ και $g(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και το σύνολο τιμών της συνάρτησης g .

(β) Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{f}{g}$.

(γ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση g είναι τμηματική ή και περιττή συνάρτηση.

(δ) Να λύσετε την εξίσωση: $e^{f(x)} + \log_e x = x + \log 10$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow f([0, +\infty))$ με τύπο $f(x) = x^2 + 4x + 1$.

(α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

(β) Να βρείτε την αντίστροφη f^{-1} (τύπο και πεδίο ορισμού).

(γ) Να βρείτε την $(g \circ f)(x)$, αν η g ορίζεται από τον τύπο $g(x) = \ln(6 - |x|)$.
(τύπο και πεδίο ορισμού).

6. (α) Να βρείτε την συνάρτηση $f(x)$, έτσι ώστε να ισχύει $(f \circ g)(x) = x^2 + 2x + 2$
αν η συνάρτηση $g(x)$ έχει τύπο $g(x) = x + 1$.

(β) Δίνονται οι συναρτήσεις: $k(x) = \frac{x+2}{2x+3}$, $x \geq 5$ και $h(x) = \frac{2x+5}{4x^2-9}$.

Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

(i) $\left(\frac{h}{k}\right)(x)$ και (ii) $k^{-1}(x)$.

7. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, $h: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ όπου $\Gamma = [1, +\infty)$, με τύπους:

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad g(x) = \frac{\sqrt{x^2-x^4}}{x} \quad \text{και} \quad h(x) = x^2 - 2x$$

(α) Να δείξετε ότι η f είναι άρτια στο πεδίο ορισμού της.

(β) Να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f = g$

(γ) Να δείξετε ότι η αντίστροφη συνάρτηση της h υπάρχει και να την ορίσετε.