

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 - 5x + 2}{1 - x^4}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x + 4}{\sqrt{x^2 + x - 12}}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{\eta\mu(x - 2)}$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \cdot \eta\mu x}{x^3 + 2}$$

2. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x - 4}{x^2 - 3x - 4}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{x^2 + x - 2}}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4|x - 3| - 8}{|x - 2|}$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 + 27} - 6}$$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1}$, αν ισχύει ότι το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x) - x^2 + 3x - 2}{x - 1} = 5$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $r(x) = -x^2 - 1$. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{r(x) - r(1)}{x - 1}$.

5. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 3ae^{x+1} + x, & x \leq -1 \\ 2x^2 - \alpha x + 3\beta, & -1 < x < 0 \\ \beta \eta\mu x + \alpha \sigma\upsilon\nu x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε ότι η f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

6. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1}$, αν:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x) - x^2 + 3x - 2}{x - 1} = 5$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) \cdot \eta\mu(x - 1)}{(x - 1)^2} = 3$$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot f(x) - 1 + \sin x}{\eta\mu^2 x} = \frac{1}{2}$$

Να αποδείξετε ότι:

(α) $f(0) = 0$

(β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x} = 1$

8. (α) Να διατυπώσετε το Θεώρημα Bolzano.

(β) Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Bolzano, συνοδεύοντας την απάντησή σας με κατάλληλο σχήμα.

(γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\sin x + x \cdot \eta\mu x - x^2 = 0$ έχει:

i. τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $(0, \pi)$.

ii. τουλάχιστον δύο λύσεις στο διάστημα $(-\pi, \pi)$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} [x^2 f(x)] = 4$.

Να βρείτε τα όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ (β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{f(x)}$ (γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1}{x \cdot f(x) \cdot \eta\mu x}$

10. (α) Μία συνάρτηση f ορίζεται σε ένα διάστημα $\Delta \subseteq \mathbb{R}$. Να εξηγήσετε πότε η συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα σημείο $x_0 \in \Delta$.

(β) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^2 - 2x + 4\beta}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 6, & x = 2 \end{cases}$$

Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, αν γνωρίζετε ότι η f είναι συνεχής στο $x = 2$.

(γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Να χαρακτηρίσετε ως σωστές (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις.

i. Η f είναι ασυνεχής στο $x_0 = -4$.

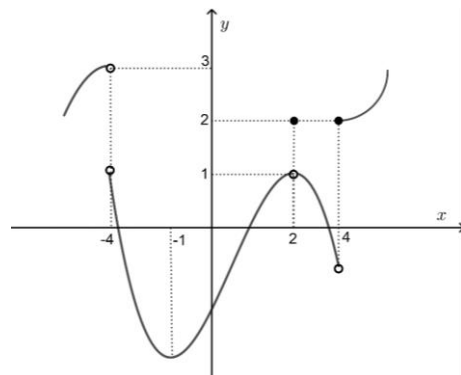
ii. $\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = 3$.

iii. Η f είναι ασυνεχής στο $x_0 = 2$.

iv. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = -1$.

v. $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 2$

vi. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$



11. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.
Να βρείτε:

α) τα όρια (αν υπάρχουν):

(i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

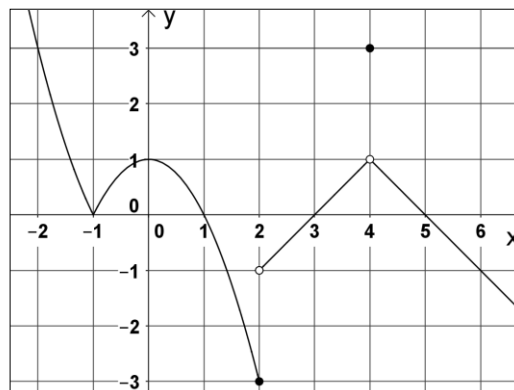
(ii) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

(iii) $\lim_{x \rightarrow +4} f(x)$

(iv) $\lim_{x \rightarrow +2} f(x)$

(v) $\lim_{x \rightarrow +2} [f(x-2)]$

(vi) $\lim_{x \rightarrow +6} \sqrt[3]{4 \cdot |f(x)| - 2 \cdot f^3(x) + 2}$



β) τις τιμές του x για τις οποίες η f δεν είναι συνεχής

12. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 2 \cdot x^2 - \lambda^2 \cdot x & , \quad x \leq 1 \\ 3 \cdot \eta\mu(x-1) + \lambda & , \quad x > 1 \end{cases} \quad \text{και } \lambda \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x = 1$.

13. Δίνεται μία συνάρτηση $f : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \cdot f(x) + x^2 + 1}{x^2 + 3} = 2$. Να βρείτε:

(a) το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ και

(b) το $\alpha \in \mathbb{R}$, αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cdot f(x) + \alpha \cdot x + 1}{x + 2} = 1$

14. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 2 & , \quad x < 1 \\ 2\sqrt{x} & , \quad x \geq 1 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1 & , \quad x \leq 1 \\ \frac{2x}{x-1} & , \quad x > 1 \end{cases}$$

α) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο $x_0 = 1$

β) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 2x}{g(x) - 1}$