

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
2018-19**

**ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΜΟΝΑΔΕΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ ΣΥΜΦΩΝΑ ΜΕ ΤΗΝ ΔΙΔΑΚΤΕΑ
ΥΛΗ ΚΑΙ ΤΟΝ ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟ ΤΟΥ ΥΠΠ.**

ΚΕΦΑΛΑΙΟ	ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΟΔΟΙ/ΣΥΝΟΛΟ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΠΕΡΙΟΔΩΝ	ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΜΟΝΑΔΕΣ ΣΤΟ ΕΞΕΤ. ΔΟΚΙΜΙΟ
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ	42/175	24/100
ΑΝΤΙΣΤΡ. ΤΡΙΓ. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ	5/175	2,8/100
ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ	27/175	15,4/100
ΣΕΙΡΕΣ	8/175	4,6/100
ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ	22/175	12,6/100
ΚΥΚΛΟΣ	15/175	8,6/100
ΠΑΡΑΒΟΛΗ	9/175	5,1/100
ΕΛΛΕΙΨΗ	9/175	5,1/100
ΣΥΝΟΛΑ	5/175	2,8/100
ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ	12/175	7/100
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ	14/175	8/100

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

- Απροσδιόριστες μορφές – Κανόνες του De l' Hospital
- Θεώρημα Rolle
- Θεώρημα Μεγίστης και Ελαχίστης τιμής
- Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού
- Μονοτονία συνάρτησης (Ορισμοί)
- Ακρότατα συνάρτησης (Ορισμοί)
- Μονοτονία – Ακρότατα συνάρτησης (Θεωρήματα)
- Κυρτότητα – Σημεία καμπής συνάρτησης
- Ασύμπτωτες
- Μελέτη – Γραφική παράσταση συνάρτησης
- Προβλήματα μεγίστων - ελαχίστων

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1ης ΕΝΟΤΗΤΑΣ (ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ):

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\pi - 2x} \quad \beta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\eta\mu x)}{x} \quad \gamma. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 1} \quad \delta. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + \ln x}{x^2 + 4} \quad \varepsilon.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x \quad \sigma\tau. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \frac{x-1}{x} \quad \zeta. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\eta\mu x} \right) \quad \eta. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^{x^2} - ax\eta\mu x - \beta \sin x}{x^2}$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}.$$

3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Rolle. (Σχολικό Βιβλίο, Τεύχος Α σελ.17)

4. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού. (Σχολικό Βιβλίο, Τεύχος Α σελ.24)
5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + 3x + 2 = 0$ έχει ακριβώς μία λύση στο $[-1,0]$.
6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 20x^3 - 25x^2 - x + 1$
- i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$ και μια, τουλάχιστον, στο διάστημα $(0,1)$.
- ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 60x^2 - 50x - 1 = 0$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(-1,1)$.
7. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & x \leq 0 \\ \gamma x^2 + 4x + 4, & x > 0 \end{cases}$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε να εφαρμόζεται το Θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[-1,1]$.
8. Να δείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 9x^2 - 2x + 9 = 0$ έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.
9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x(\ln x - 1)$. Να αποδείξετε ότι :
- α) Ισχύουν οι υποθέσεις του ΘΜΤ , για την $f(x)$ στο διάστημα $[1,e]$
- β) $1 < e^{\frac{1}{e-1}} < e$.
10. Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ και για οποιοδήποτε διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $\alpha \geq 0$, εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. και ότι ο αριθμός $\xi \in [\alpha,\beta]$, που

ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θ.Μ.Τ., είναι τέτοιος ώστε το $\sqrt{\xi}$ να είναι το κέντρο του διαστήματος $[\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}]$ δηλαδή $\sqrt{\xi} = \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{2}$.

11. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[1,4]$ για την οποία ισχύει $f(4x) =$

$4f(x) \forall x \in [1,4]$ και $f\left(\frac{1}{4}\right) = 1$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2, x_3 \in (1,4)$ τέτοια

ώστε $f'(x_1) + f'(x_2) + f'(x_3) = 12$. (Σχολικό βιβλίο Τεύχος Α, σελ.30)

12. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει αριθμός $\xi \in [1,3]$, που να ικανοποιεί τα συμπεράσματα του

Θ.Μ.Τ για την συνάρτηση $f(x) = \frac{2x-7}{x-2}$.

13. Πότε μία συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $\Delta \subseteq A$ με $\Delta \neq \{ \}$ θα ονομάζεται αύξουσα στο διάστημα Δ . Πότε θα ονομάζεται μονότονη στο Δ ;

14. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = x^4 + 2x + 5, x \in [2,4]$.

15. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = -x^3 - x + 2$ στο διάστημα $[-1,3]$.

16. Αν για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $[\alpha, \beta]$ ισχύει ότι $[f(x)]^2 +$

$x^2 = 1 + 2xf(x)$ να αποδείξετε ότι η f δεν έχει τοπικά ακρότατα. (σχολικό βιβλίο

Τεύχος Α, σελ. 51)

17. Η παράγωγος μίας συνάρτησης f είναι $f'(x) = -3(x-1)^5(x-3)^2(x-4)$. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο.

18. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των πιο κάτω συναρτήσεων:

α. $f(x) = x^2 - 4x - 5, x \in \mathbb{R}$

β. $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$

γ. $f(x) = |x+3|$

δ. $f(x) = \begin{cases} 4-x^2, & x \leq 1 \\ x+2, & x > 1 \end{cases}$

19. Να εξετάσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα την συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 3, x \in [1,4)$.

20. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
(σχολικό βιβλίο Τεύχος Α, σελίδα 57)

21. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα των πιο κάτω συναρτήσεων:

α. $f(x) = x \ln x, x > 0$

β. $f(x) = \frac{1}{16}(x+3)^2(x-2)^3$

γ. $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}, x > 0$

δ. $f(x) = \frac{2x+1}{(x-1)^2}$

ε. $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$

22. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x - 3, & x \leq 1 \\ x^2 - 6x + 7, & x > 1 \end{cases}$

β. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3, & x \leq 3 \\ x^2 - 8x + 22, & x > 3 \end{cases}$

- 23.** Εάν η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta \ln x$ έχει τοπικά ακρότατα στα σημεία με τετμημένες 1 και 3 να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων α και β . Ακολούθως να βρείτε το είδος των 2 ακροτάτων.
- 24.** Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^x - x + 1$.
- α. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης g
- β. Για την συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{e^x} + x$ να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$
- γ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν δέχεται οριζόντια εφαπτομένη
- 25.** Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ , εάν γνωρίζουμε ότι για την συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + \lambda$ ισχύει πως το τοπικό της ελάχιστο είναι αντίθετο από το τοπικό της μέγιστο.
- 26.** Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισώσεις.
- α. $e^x \geq x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ β. $e^{x-1} \geq 1 + \ln x, \forall x > 0$ γ. $2\ln x \leq x^2 - 1, \forall x > 0$
- 27.** Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = xe^x - 2e^x$ και ακολούθως να αποδείξετε ότι $1 + xe^{x-1} \geq 2e^x - 1 \forall x \in \mathbb{R}$.
- 28.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x x^{-\nu}, x > 0, \nu \in \mathbb{N}^*$.
- α. Να βρείτε τα ακρότατα της f
- β. Να αποδείξετε ότι $e^x \nu^\nu \geq x^\nu e^\nu \forall x > 0, \nu \in \mathbb{N}^*$

29. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ και ακολουθώντας να αποδείξετε ότι $x^e \leq e^x \forall x > 0$.

30. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 - (a - 1)x^2 + (a + 5)x - 2$. Να βρείτε τις τιμές του a για τις οποίες η f δεν έχει τοπικά ακρότατα. (Σχολικό βιβλίο Τεύχος Α, σελίδα 61).

31. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{-x} + x$ και $g(x) = x^3 + 6x^2$. Αν $x \in [-1, 2]$ να αποδείξετε ότι $f(x) < g(x)$.

32. Πότε μία συνάρτηση f είναι κυρτή (αντίστοιχα κοίλη) σε ένα διάστημα Δ ; (Σχολικό βιβλίο Τεύχος Α, σελίδα 63).

33. Να προσδιοριστούν τα διαστήματα στα οποία οι συναρτήσεις με τύπο $f(x) = x^4 + 6x^2 + 5$ και $g(x) = \frac{3x^2 - 2}{x^3}$ είναι κυρτές ή κοίλες και να βρεθούν τα σημεία καμπής των γραφικών τους παραστάσεων.

34. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2e^{x-a} - x^2$ έχει για κάθε τιμή του a ένα σημείο καμπής το οποίο βρίσκεται πάνω στην παραβολή με εξίσωση $y = -x^2 + 2$.

35. Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[-2, 2]$, για την οποία ισχύει $f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0$. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής.

36. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η συνάρτηση $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ με τύπο $f(x) =$

$$x^4 - \lambda x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 1 \text{ να είναι κυρτή σε όλο το } \mathcal{R}. \quad (\text{Σχολικό βιβλίο}$$

Τεύχος Α, σελίδα 74).

37. Να βρείτε τις τιμές του α ώστε η συνάρτηση $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ με τύπο

$$f(x) = 2x^4 + 4\alpha x^3 + 3(4\alpha - 3)x^2 + 1 \text{ να είναι κυρτή σε όλο το } \mathcal{R}.$$

38. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \ln x - \beta x^2 - x - 1$. Να βρείτε τις τιμές των α και β ώστε

η γραφική παράσταση της συνάρτησης να έχει σημείο καμπής για $x = 1$ και η εφαπτομένη της στο σημείο με $x = e$ να είναι παράλληλη με την ευθεία $y = x + 2$

39. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x$.

α. Να την μελετήσετε ως προς την κυρτότητα

β. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της στο $x = e$ και να δείξετε ότι

$$\ln x \geq 2 - \frac{e}{x}, \forall x > 0$$

40. Έστω μία συνάρτηση $f: [-1, 4] \rightarrow \mathcal{R}$ η οποία είναι κυρτή. Αν $f(1) = 2$, να δείξετε ότι $2f(4) + 3f(-1) > 10$.

41. Έστω μία συνάρτηση $y = f(x)$ για την οποία γνωρίζουμε ότι είναι 2 φορές παραγωγίσιμη και ότι $f'(x) > 0$ στο διάστημα $[-1, 4]$. Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι $f(1) = 2$ να αποδείξετε ότι $2f(4) + 3f(-1) > 10$

42. Να δώσετε τον ορισμό της κατακόρυφης, οριζόντιας και πλάγιας ασύμπτωτης της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης. (Σχολικό βιβλίο Τεύχος Α, σελίδα 78).

43. Πότε μία ευθεία της μορφής $y = \lambda x + \beta$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης $y=f(x)$. (Σχολικό βιβλίο Τεύχος Α, σελίδα 80).

44. Να βρείτε τις ασύμπτωτες, εάν υπάρχουν, των γραφικών παραστάσεων των πιο κάτω συναρτήσεων.

α. $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$

β. $f(x) = x^2 e^{-x}$

γ. $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{x-3}$

δ. $f(x) = \frac{\ln(x-1)}{x-2}$

ε. $f(x) = \ln(e^x + 1) - x$

στ. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 4}$

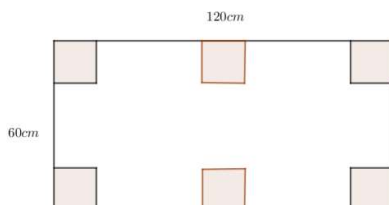
45. Να βρείτε την τιμή του a ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 2a - 1}{9x - a^2}$$

να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 1$.

46. Αν η ευθεία $y = 3x - 6$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ στο $-\infty$, να βρείτε την τιμή του a ώστε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{af(x) + 4x}{xf(x) - 3x^2 + 8x} = -1$.

47. Ένα κουτί συσκευασίας πίτσας κατασκευάζεται, αφαιρώντας 6 ίσα τετράγωνα από ένα κομμάτι χαρτόνι, σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου, διαστάσεων $60 \text{ cm} \times 120 \text{ cm}$, και διπλώνοντάς το κατάλληλα.



Να βρείτε τις διαστάσεις των τετραγώνων ώστε το κουτί να έχει τον μέγιστο δυνατό όγκο.

48. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί x, y τέτοιοι ώστε να έχουν άθροισμα 10. Να βρείτε τους δύο αριθμούς ώστε το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι μέγιστο.

49. Δίνονται τα σημεία A(0,3) και B(0,4). Να βρεθεί σημείο M της ευθείας $y=1$ έτσι ώστε η γωνία AMB να είναι μέγιστη.

50. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, και το σημείο $A(\frac{9}{2}, 0)$.

α. Να βρείτε το σημείο M της γραφικής παράστασης της f ώστε να απέχει από το A την μικρότερη απόσταση.

β. Να αποδείξετε ότι η εφαπτόμενη της στο M είναι κάθετη στην ευθεία AM

51. Ευθεία περνά από το σημείο (3,3) και τέμνει τους θετικούς ημιάξονες $οx$ και $οy$ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του αθροίσματος $S=(ΟΓ)+(ΟΔ)$.

52. Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας, τα ακρότατα και τις ασύμπτωτες να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

α. $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ β. $f(x) = \frac{x}{x^2-5x+4}$ γ. $f(x) = \frac{2x^2}{x+1}$ δ. $f(x) = \frac{4x}{(x+1)^2}$

ε. $f(x) = x \ln x$ στ. $f(x) = (x-3)e^x$ ζ. $f(x) = xe^{-x}$ η. $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2ης ΕΝΟΤΗΤΑΣ (ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ):

1. Να αποδείξετε ότι $\text{τοξημ}x + \text{τοξσυν}x = \frac{\pi}{2}$
2. Να λυθεί η εξίσωση $\varepsilon\varphi(\text{τοξημ}x) = 2$
3. Να υπολογίσετε το $\eta\mu\left(\text{τοξ\varepsilon}\varphi\left(\frac{1}{2}\right)\right)$.
4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{τοξσυν}(1-x)}{\sqrt{x}}$.

5. Να αποδείξετε ότι $\forall x \in [0,1]$ ισχύει $x \leq \text{τοξημ}x$.
6. Να βρείτε τα τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα των πιο κάτω συναρτήσεων:
- α. $f(x) = x - 2\text{τοξεφ}x$ β. $f(x) = \text{τοξσυν}(x^2)$ γ. $f(x) = \text{τοξημ}(e^x)$ (Σχολικό βιβλίο Τεύχος Α, σελίδα 133).
7. Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\text{τοξ} - (3x)}{5x}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{τοξημ}(x) - x}{x^3}$.
8. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \text{τοξημ}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ και $g(x) = 2\text{τοξεφ}(\sqrt{x})$.
- α. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = g'(x) + k, \forall x \geq 0, k \in \mathbb{R}$
- β. Να υπολογίσετε την τιμή του k .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3ης ΕΝΟΤΗΤΑΣ (ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ)

1. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω αόριστα ολοκληρώματα:

α. $\int x e^{x^2} dx$

β. $\int \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^6 x} dx$

γ. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+4}} dx$

δ. $\int \frac{2e^x}{1+e^{-x}} dx$

ε. $\int \frac{2x+7}{x^2-6x+34} dx$

στ. $\int (x+5)\sigma\upsilon\nu 2x dx$

ζ. $\int \frac{dx}{1-\eta\mu x+2\sigma\upsilon\nu}$

η. $\int \frac{\sigma\upsilon^2(\ln x)}{x} dx$

θ. $\int \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} - \frac{\eta\mu x}{x^2}\right) dx$

2. Αν $I_v = \int \frac{x^v}{1+x^2} dx$ να δείξετε ότι $I_v = \frac{x^{v-1}}{v-1} - I_{v-2}$

3. Να βρείτε τη συνάρτηση f η οποία παρουσιάζει σημείο καμπής στο σημείο για το οποίο $x=1$, τοπικό μέγιστο το $f(-1)$ και είναι $f'''(x)=2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4. Να βρείτε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύουν $f^2(x)f'(x)=x^2+1$, $x \geq 0$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
5. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = x^2 + 1$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το ολοκλήρωμα: $\int \frac{x^3}{(x^2 + 1)^2} dx$.
6. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = \sqrt{x}$, $x > 0$, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int \ln \sqrt{x} dx$
7. Να βρεθεί η συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για την οποία $f(x) > 0$ για κάθε x τέτοια ώστε $f'(x)(x^2 - x + 1) = (2x - 1)f(x)$ εάν γνωρίζουμε επιπλέον πως η εφαπτομένη της στο $x=2$ έχει κλίση 18.
8. Να βρεθεί η συνάρτηση $f(x)$ στις παρακάτω περιπτώσεις
- $f'(x) + 2xf^2(x) = 0, f(x) \neq 0, f(1) = 1$
 - $f'(x) + f(x) = 2$ και η γρ. παράσταση της f περνά από το $(1, e)$
 - $f'(x) - f(x) = 1$ και η γρ. παράσταση της f περνά από το $(1, 1)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4^{ης} ΕΝΟΤΗΤΑΣ (ΣΕΙΡΕΣ)

1. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω αθροίσματα:
- $\sum_{k=1}^{20} (2k + 3)$
 - $\sum_{k=1}^{30} 6k^2$
 - $\sum_{k=1}^n (2 \cdot 3^{k-1})$
2. Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω σειρές συγκλίνουν. Στην περίπτωση που συγκλίνουν να υπολογίσετε το άθροισμά τους.
- $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k$
 - $\sum_{k=1}^{\infty} (4)^k$
 - $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{v(v+1)}$
3. Να υπολογίσετε το μερικό άθροισμα των n πρώτων όρων των πιο κάτω σειρών:
- $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \dots$
 - $1 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 7 \cdot 8 + 10 \cdot 10 + \dots$
4. Να υπολογίσετε το άθροισμα $\sum_{k=11}^{40} 3k(2k - 2)$

5. Να υπολογίσετε το άθροισμα των n πρώτων όρων της πιο κάτω σειράς. Στη συνέχεια, να εξετάσετε κατά πόσο συγκλίνει

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{5}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots \quad (\text{Σχολικό βιβλίο Τεύχος Β, σελίδα 84}).$$

6. Να υπολογίσετε το άθροισμα $\sum_{k=n+1}^{3n} 2k(3k - 1)$

7. Να υπολογίσετε το άθροισμα της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^k - 3 \cdot 2^k}{5^k}$

ΕΝΟΤΗΤΑ 5: ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

- Ορισμός Ορισμένου Ολοκληρώματος
- Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού
- Ιδιότητες Ορισμένου Ολοκληρώματος
- Υπολογισμός Εμβαδού Επίπεδου χωρίου
- Υπολογισμός Όγκου στερεού εκ περιστροφής

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5ης ΕΝΟΤΗΤΑΣ: ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = 2x + 3$, είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[3, 5]$.
2. Να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} c dx = c(\beta - \alpha)$, $\alpha < \beta$
(Σχολικό βιβλίο Τεύχος Β, σελίδα 102).
3. Δίνεται η συνάρτηση $F(x) = \int_2^x \sqrt{t^2 - 1} dt$. Να υπολογίσετε
α. Το πεδίο ορισμού της
β. Να μελετήσετε την F ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα της.
4. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω ορισμένα ολοκληρώματα:
α. $\int_1^3 (3x^2 - 2x + 1) dx$ β. $\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$ γ. $\int_4^5 |x - 3| dx$
δ. $\int_0^3 \sqrt{9 - x^2} dx, x = 3\eta\mu\theta, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ε. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\varphi x dx$ στ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^2 x dx$
ζ. $\int_1^2 x e^x dx$ η. $\int_0^3 x e^{x^2} dx$ θ. $\int_1^3 x \ln x dx$
5. Έστω συνεχής συνάρτηση $f: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$.
α. Αν η f είναι άρτια στο $[-a, a]$, να δείξετε ότι: $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$
β. Αν η f είναι περιττή στο $[-a, a]$ να δείξετε ότι: $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.
(Σχολικό βιβλίο Τεύχος Β, σελίδα 112).

6. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[α, β]$ να δείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{2\alpha}^{2\beta} f\left(a + \beta - \frac{x}{2}\right) dx$$

7. Να αποδείξετε ότι: $2 \leq \int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} dx \leq \sqrt{5}$.

8. Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ και ισχύουν ότι

$$\int_1^4 f(x) dx = 9, \quad \int_3^4 f(x) dx = 11, \quad \int_1^8 f(x) dx = 13 \text{ να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:}$$

$$\alpha. \int_4^8 f(x) dx \quad \beta. \int_1^3 f(x) dx \quad \gamma. \int_3^8 f(x) dx \quad \delta. \int_3^1 f(x) dx$$

9. Αν $I_v = \int_0^2 x^v e^x dx, v \in \mathbb{N}^*$. Να αποδείξετε ότι: $I_v = 2^v e^2 - v I_{v-1}, \forall v \geq 2$.

10. Αν f μία συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ να δείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(a + \beta - x) dx$ και

$$\text{ακολουθώντας να υπολογίσετε } \int_2^3 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{5-x} + \sqrt{x}} dx.$$

11. α. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[α, β]$ να δείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(x) + f(a + \beta - x)] dx.$$

β. Χρησιμοποιώντας το πιο πάνω ή με οποιο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε το

$$\text{ολοκλήρωμα } \int_1^e \frac{2019^x}{2019^x + 2019^{1+e-x}} dx.$$

12. Να αποδείξετε την ανίσωση: $\frac{3(e-1)}{e^2} \leq \int_1^e \frac{1+2\ln x}{x^2} dx \leq e - 1$.

13. Έστω f συνεχής και ορισμένη στο $[0, a]$, $a > 0$, τέτοια ώστε για κάθε $x \in [0, a]$ να ισχύει $f(x) \geq 0$ και $f(x) + f(a - x) = \beta, \beta > 0$. Να βρείτε το εμβαδόν το χωρίου που περικλείεται από την C_f τον άξονα των x και τις ευθείες με εξισώσεις $x = a$ και $x = \beta$.

14. Να βρεθεί η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αν ισχύει ότι $f(x) = x + 2 \int_0^1 f(x) dx, \forall x \in \mathbb{R}$.

15. Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[0, \pi/2]$ με $f(\pi/2) = 3$ και

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + f''(x)] dx = 2 \text{ να υπολογίσετε το } f'(0).$$

16. Να βρεθεί η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αν ισχύει ότι $f(x) = \int_0^x f(t) dx + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

17. Δίνεται το ολοκλήρωμα $I_v = \int_1^{e^2} x^2 (\ln x)^v dx$, $v \in \mathbb{N}$.

α. Να αποδείξετε ότι $I_v = \frac{1}{3}e^3 - \frac{v}{3}I_{v-1}$

β. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^{e^2} x^2 (\ln x)^4 dx$.

18. Δίνεται το ολοκλήρωμα $I_v = \int_0^1 x^v e^{-x} dx$, $v \in \mathbb{N}$.

α. Να αποδείξετε ότι $I_v = -\frac{v+1}{e} + v(v-1)I_{v-2}$, $v > 2$

β. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x^3 e^{-x} dx$.

19. Αν η παράγωγος της f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ και επιπλέον ισχύει πως $f(0)=1$ και $f(1)=2$ να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α. $\int_0^1 x[2f(x) + xf'(x)] dx$ β. $\int_0^1 \frac{f'(x)-f(x)}{e^x} dx$

20. Αν η f συνεχής συνάρτηση με $f(1+x) + f(1-x) = x^2$ να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^2 f(x) dx = \frac{1}{3}.$$

21. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)} dx = \frac{1}{2}$.

22. Δίνεται το ολοκλήρωμα $I_k = \int_1^k \frac{1}{x^2+3x} dx$, $k > 0$.

α. Να υπολογίσετε το πιο πάνω ολοκλήρωμα συναρτήσει του k

β. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{k \rightarrow +\infty} I_k$.

23. Μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-2, 8]$ και τέτοια ώστε $f(6-x)=f(x)$ για κάθε $x \in [-2, 8]$. Αν $\int_{-2}^8 f(x) dx = 10$ να υπολογίσετε το $I = \int_{-2}^8 xf(x) dx$.

24. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει: $f(x) + f(1-x) = 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^1 f(x) dx$.

25. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι συνεχής και ισχύει $\alpha f(x) + \beta f(-x) = \gamma$ με

$\alpha + \beta \neq 0$ να αποδείξετε ότι: $\int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{4\gamma}{\alpha + \beta}$.

26. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x) + f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Ναδειχτεί ότι η συνάρτηση $h(x) = \int_0^x f^2(t)e^{2t} dt$ είναι γνησίως αύξουσα.

β. Να υπολογιστεί το $\int_0^1 f^2(x)e^{2x} dx$.

γ. Να βρεθεί ο τύπος της f αν είναι γνωστό ότι $f(0)=2019$.

27. Αν για κάθε $x \in [0, \pi]$ ισχύουν οι σχέσεις $f(x) = f(\pi-x)$ και $g(x) + g(\pi-x) = \pi$.

Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = \pi - \psi$ να αποδείξετε ότι

$$\int_0^\pi g(x) \cdot f(x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(x) dx \quad . \text{ Στη συνέχεια να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα}$$

$$\int_0^\pi \frac{x \eta \mu x}{1 + \sigma \upsilon \nu^2 x} dx$$

28. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g οι οποίες είναι συνεχείς στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, με $f(-x)=f(x)$ και $g(x)+g(-x)=1$, για κάθε πραγματικό αριθμό x .

(α) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = -x$, ή με άλλο τρόπο να δείξετε

$$\text{ότι } \int_{-a}^a f(x) \cdot g(x) dx = \int_0^a f(x) dx$$

(β) Χρησιμοποιώντας το πιο πάνω αποτέλεσμα ή με άλλο τρόπο, να

$$\text{υπολογίσετε το ολοκλήρωμα } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma \upsilon \nu x}{e^{2x} + 1} dx .$$

29. Να υπολογίσετε το εμβαδό μεταξύ της καμπύλης $\psi = -x^2 + 4x$ και της ευθείας $\psi = x$

30. Δίνεται η παραβολή $\psi^2 = 8x$.

α. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της $A(2, 4)$.

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή, την εφαπτομένη της στο σημείο A και τον άξονα των x .

31. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη με εξίσωση $\psi = 6x^2$, τις ευθείες $x = 1$, $x = 2$ και τον άξονα των x .

32. Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από την καμπύλη $\psi = x^2 + x - 6$ και τον άξονα των $\psi = 2x$.

33. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{2}{x}$, $x > 0$. Έστω A το χωρίο που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα των x και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$ και $x = e^2$. Να βρείτε την ευθεία $x = \lambda$ η οποία χωρίζει το χωρίο A σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

34. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $\psi = 3x - x^2$ και $\psi = 2$. Στη συνέχεια, να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται κατά την πλήρη περιστροφή του πιο πάνω χωρίου:

α. γύρω από τον άξονα των x και

β. γύρω από την ευθεία $\psi = 2$.

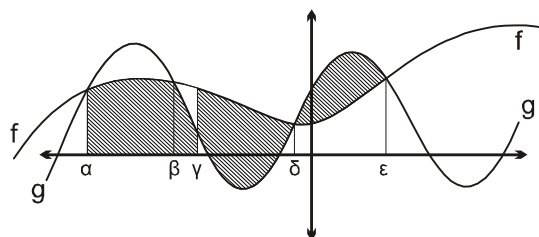
35. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται κατά την πλήρη περιστροφή του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες: $\psi = 1 + \ln x$, $\psi = 1$, $\psi = 2$ και $x = 0$, γύρω από τον άξονα των ψ .

36. Το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $\psi = 3x - x^2$, τον άξονα των x και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 3$, στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των x . Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται.

37. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y = e^x$, $y = \ln x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$.

38. Επίπεδο χωρίο που σχηματίζεται από την $y = 3x - x^2$ και τον άξονα των x περιστρέφεται πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα Oy . Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται.

39. Να εκφράσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους του σχήματος με την βοήθεια ολοκληρωμάτων των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$



40. Το χωρίο που ορίζεται από το διάγραμμα της συνάρτησης $y = \sqrt{x}$, τον άξονα των x και την ευθεία $x = 2$ χωρίζεται από την ευθεία $x = c$, $0 < c < 2$ σε δυο χωρία E_1 και E_2 . Τα πιο πάνω χωρία περιστρέφονται κατά 2π γύρω από τον άξονα των x και παράγουν στερεά με ίσους όγκους. Να βρείτε το c .
41. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από την ευθεία $y = 2$, του χωρίου του περικλείεται από το γράφημα της συνάρτησης $y = x - x^2$ και την ευθεία $y = 0$
42. Να υπολογισθούν οι όγκοι των στερεών που παράγονται με περιστροφή του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = \sqrt{x}$, και τις ευθείες $y = 0$ και $x = 4$,
α) γύρω από την ευθεία $x = 4$ και β) γύρω από την ευθεία $y = 2$.
43. Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται με περιστροφή γύρω από την $y = 4$ του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = x^2 - 2x$, και την ευθεία $y = x$.
44. Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται με περιστροφή του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή $y = \sqrt{x}$, και τις ευθείες $y = 0$ και $x = 1$, γύρω από την ευθεία $x = 2$.
45. Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται με περιστροφή γύρω από τον y -άξονα του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = 1/x$, και τις ευθείες $y = 0$, $x = 1$ και $x = 2$.
46. Να υπολογισθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$ και την ευθεία $y + x = 1$.
47. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $y = e^{2x}$, τους άξονες και την ευθεία $x = \ln 2$, όταν στραφεί πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των x .

48. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $y = x^2 - 1$ και την ευθεία $y = x - 1$, όταν στραφεί πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των y .

49. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln x - 1 + \frac{1}{x}, x > 0$. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα και ακολούθως να αποδείξετε ότι:

$$\int_{2017}^{2018} x^x dx > \int_{2017}^{2018} e^{x-1} dx.$$

50. Έστω V ο όγκος του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα $x'x$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$ και των ευθειών με εξισώσεις $y = 0, x = 2, x = \beta, 0 < \beta < 2$. Να υπολογίσετε την τιμή του β , ώστε $V = 3$ κυβικές μονάδες.

51. Συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $\mathbb{R}$, παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = 2$ και η καμπύλη της περνά από το σημείο $A(0,1)$. Αν ισχύει

$$\int_0^2 (2f'(x) + xf''(x)) dx = 3, \text{ να υπολογίσετε το } f(2).$$

52. Δίνονται δύο συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοιες ώστε $f(x) + f(-x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

α. Με τη βοήθεια της αντικατάστασης $x = -u$ ή με οποιοδήποτε άλλο

τρόπο, να δείξετε ότι $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = \int_0^{\alpha} g(x) dx$.

β. Να βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e\varphi^2 x}{1+3^x} dx$

ΕΝΟΤΗΤΑ 6: ΚΥΚΛΟΣ

- Εισαγωγή στις Κωνικές Τομές
- Εξίσωση κύκλου
- Σχετική θέση ευθείας και κύκλου
- Εξίσωση εφαπτομένης σε σημείο του κύκλου
- Εφαπτόμενες κύκλου από σημείο εκτός αυτού
- Σχετική θέση δύο κύκλων
- Μήκος εφαπτόμενου τμήματος – Δύναμη σημείου ως προς κύκλο – Θέση σημείου ως προς κύκλο
- Παραμετρικές εξισώσεις κύκλου

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 6^{ης} ΕΝΟΤΗΤΑΣ: ΚΥΚΛΟΣ

1. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου στις παρακάτω περιπτώσεις:
 - α. έχει κέντρο το $(-2,5)$ και ακτίνα 4 cm.
 - β. έχει διάμετρο την AB όπου $A(3,-1)$ και $B(4,2)$.
 - γ. έχει το κέντρο του στην ευθεία $3x - y = 5$ και περνά από τα σημεία $(1,3)$ και $(6, -2)$.
2. Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 1 = 0$.
 - α. Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου του και το μήκος της ακτίνα του
 - β. Να γράψετε τις παραμετρικές του εξισώσεις.
3. Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$.
 - α. Να βρείτε τη δύναμη του σημείου $A(6,-3)$ ως προς τον πιο πάνω κύκλο.
 - β. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση του σημείου A από τον κύκλο.
4. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου (K): $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$ που είναι κάθετες στην ευθεία $x-y=7$
5. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το $K(-1,2)$ και εφάπτεται της ευθείας $2x+y=5$.

6. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda x - (2\lambda + 10)y + 5\lambda + 15 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- α. Να αποδείξετε πως η πιο πάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
- β. Να γράψετε τις συντεταγμένες του κέντρου και την ακτίνα του συναρτήσει του λ
- γ. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στην οποία θα ανήκουν τα κέντρα των πιο πάνω κύκλων.
7. Κύκλος έχει κέντρο $K(4,2)$ και $R = 10$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που περνούν από την αρχή των αξόνων και να αποδειχθεί ότι αυτές τέμνονται κάθετα.
8. Δίνεται ο κύκλος $K: x^2 + y^2 = 1$ και το σημείο $\Gamma(3,0)$. Από το Γ φέρουμε ευθεία (ϵ) τέμνουσα προς τον κύκλο K που τον τέμνει στα σημεία A και B . Να βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση του μέσου M του AB για όλες τις πιθανές θέσεις της ευθείας (ϵ)
9. Κύκλος έχει κέντρο $K(2,4)$ και $R = \sqrt{10}$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που περνούν από την αρχή των αξόνων και να αποδειχθεί ότι αυτές τέμνονται κάθετα.
10. Κύκλος με κέντρο $K(\alpha, \beta)$ και ακτίνα R εφάπτεται εξωτερικά των δυο κύκλων $x^2 + y^2 = 4$ και $x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$. Να δείξετε ότι:
- α. η τετμημένη του κέντρου K είναι: $\alpha = \frac{R+6}{3}$.
- β. η εξίσωση του σχήματος στο οποίο ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου K είναι: $y^2 = 8(x - 1)(x - 2)$
11. Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $(x - \alpha)^2 + y^2 = R^2$ και το σημείο το $T(\alpha + R \sin \theta, R \eta \mu \theta)$. Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο T τέμνει τον άξονα των x στο σημείο A και τον άξονα των y στο σημείο B . Να βρείτε την εξίσωση του γεωμετρικού τόπου του μέσου M του AB .
12. Δίνεται κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = 3$. Να βρείτε την εξίσωση της χορδής του κύκλου, που έχει μέσο το σημείο $M(1,1)$.

13. Να βρείτε τις εξισώσεις των κύκλων που εφάπτονται της ευθείας $y=2x+3$ στο σημείο $A(-1,1)$ και έχουν ακτίνα ίση με $2\sqrt{5}$ μονάδες.
14. Δίνονται οι κύκλοι: $(K_1): x^2 + y^2 - 12x - 2y + 12 = 0$ και $(K_2): x^2 + y^2 - 4x = 0$. Να βρεθούν:
- Τα κέντρα και οι ακτίνες τους
 - Η εξίσωση του ριζικού τους άξονα.
 - Η εξίσωση του κύκλου που περνά από τα κοινά σημεία των (K_1) , (K_2) και από το σημείο $(2, 0)$.
15. Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = R^2$ και το σημείο του $T(R\sin\theta, R\eta\mu\theta)$.
- Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο T είναι $x\sin\theta + y\eta\mu\theta = R$.
 - Η εφαπτομένη του κύκλου στο T τέμνει τον άξονα OX στο A και τον OY στο B . Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B .
 - Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης στην οποία βρίσκεται ο Γ.Τ. της τέταρτης κορυφής Γ του ορθογωνίου $OBGA$.
16. Να αποδείξετε ότι αν η ευθεία $(\epsilon): \beta x + \alpha y = \alpha\beta$, $\alpha, \beta \neq 0$ εφάπτεται στον κύκλο $(K): x^2 + y^2 = \rho^2$ τότε ισχύει $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{\rho^2}$
17. Να βρείτε τη θέση της ευθείας $x-y+10=0$ ως προς τον κύκλο $x^2+y^2=1$, καθώς και τη θέση του σημείου $(1,-2)$ ως προς τον κύκλο $x^2+y^2-10x+8y=0$.
18. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που περνά από τα σημεία τομής των κύκλων: $x^2 + y^2 - 4y = 0$, $x^2 + y^2 = 8$ και το κέντρο του βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y = x + 1$
19. Δίνεται κύκλος C που διέρχεται από το σημείο $A(1,3)$ και εφάπτεται στον άξονα xx' . Αν T είναι το αντιδιαμετρικό του A στο κύκλο C , να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του σημείου T για κάθε κύκλο που περνά από το A και εφάπτεται του άξονα των xx' .
20. Να βρείτε το μήκος της κοινής εξωτερικής εφαπτομένης των κύκλων $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 4 = 0$ και $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$

ΕΝΟΤΗΤΑ 7: ΠΑΡΑΒΟΛΗ

- Ορισμός – Εξίσωση παραβολής
- Στοιχεία παραβολής
- Παραμετρικές εξισώσεις – Ανακλαστική ιδιότητα παραβολής
- Θέση σημείου ως προς παραβολή
- Θέση ευθείας ως προς παραβολή
- Εξίσωση εφαπτομένης και καθέτου σε σημείο της παραβολής

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 7ης ΕΝΟΤΗΤΑΣ: ΠΑΡΑΒΟΛΗ

1. Να δώσετε τον ορισμό της παραβολής. (Σχολικό Βιβλίο Τεύχος Γ, σελ.78)
2. Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, η παραβολή με εστία το σημείο $E(a,0)$, $a>0$ και διευθετούσα την ευθεία $x+a=0$ έχει εξίσωση $y^2 = 4ax$. (Σχολικό Βιβλίο Τεύχος Γ, σελ.79)
3. Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, η παραβολή με εστία το σημείο $E(0,a)$, $a>0$ και διευθετούσα την ευθεία $y+a=0$ έχει εξίσωση $x^2 = 4ay$. (Σχολικό Βιβλίο Τεύχος Γ, σελ.80)
4. Παραβολή έχει εστία το σημείο $(2, 0)$ και διευθετούσα την ευθεία $x = -2$.
 - a. Με βάση τον ορισμό της παραβολής να δείξετε ότι η εξίσωση της είναι $y^2 = 8x$
 - b. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο της $A(2,4)$
5. Τα σημεία $T(at^2, 2at)$ και $P(ar^2, 2ar)$ είναι δύο σημεία της παραβολής $y^2 = 4ax$. Αν η ευθεία TP περνά από το σημείο $\Delta(-a, 0)$.
 - a. Να δείξετε ότι $tr = 1$.
 - b. Να βρείτε την εξίσωση του σχήματος στο οποίο ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M του ευθυγράμμου τμήματος TP .

6. Δίδεται η παραβολή $\psi^2 = 20x$. Να βρεθούν:
- α. Οι συντεταγμένες της εστίας
 - β. Η εξίσωση της διευθετούσας
 - γ. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $(5,10)$
 - δ. Η εξίσωση της καθέτου στο $(5,10)$
 - ε. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $(5t^2, 10t)$ είναι η $t\psi = x + 5t^2$ και να βρεθεί η τιμή του t για την οποία η εφαπτομένη περνά από το $(-5,0)$
7. Να βρεθεί η εξίσωση της κάθετης της παραβολής $\psi^2 = 4\alpha x$ στο σημείο $P(\alpha\rho^2, 2\alpha\rho)$.
- Αν αυτή τέμνει τη παραβολή και στο Q και η γωνιά $\hat{POQ} = 90^\circ$ να δείξετε ότι $\rho^2 = 2$
8. Να λυθεί γραφικά το σύστημα: $x^2 < 4\psi$ $\psi^2 > 2x$
9. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής $y^2 = 8x$ που άγονται από το σημείο $(2,-3)$.
10. Δίνεται η παραβολή $\psi^2 = 16x$ και τα σημεία αυτής A και B . Να βρείτε την εξίσωση του σχήματος στο οποίο ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M της χορδής AB αν αυτή είναι παράλληλη προς την ευθεία $\psi = 2x - 5$.
11. Δίνεται η παραβολή $\psi^2 = 4\alpha x$ και τα σημεία $A(\alpha t^2, 2\alpha t)$ και $B(\alpha\rho^2, 2\alpha\rho)$ με $t > 0$ και $\rho < 0$.
- α. Αν η χορδή AB είναι εστιακή, να δείξετε ότι $t \cdot \rho = -1$
 - β. Να βρείτε τον γ.τ. του κέντρου βάρους του τριγώνου OAB (όπου O η αρχή των αξόνων)
 - γ. Από τα σημεία A και B φέρουμε ευθείες παράλληλες με τον άξονα των x , που τέμνουν την διευθετούσα της παραβολής στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Αν E είναι η εστία της παραβολής να δείξετε ότι η γωνία $\Gamma E \Delta = 90^\circ$
 - δ. Αν το εμβαδόν του τριγώνου $\Gamma E \Delta$ είναι ίσο με 36 τ.μ. και ισχύει η σχέση $t \cdot \rho = 2$, να βρείτε την τιμή του α .

12. Δίδεται η παραβολή $y^2 = 8ax$ και τα σημεία $A(2at^2, 4at)$ και $B(2ap^2, 4ap)$. Οι εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία A και B τέμνονται κάθετα.

a. Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής των εφαπτομένων είναι πάνω στην διευθετούσα της παραβολής

b. Να βρείτε την εξίσωση του Γ.Τ του μέσου M της χορδής AB.

13. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 12x$ με εστία E και A τυχαίο σημείο της διαφορετικό από το (0,0). Η εφαπτομένη της παραβολής στο A τέμνει τους άξονες x'x και y'y στα σημεία B και Γ αντίστοιχα.

a. Να δείξετε ότι η ΓΕ είναι η μεσοκάθετη του AB,

b. Αν Δ είναι το σημείο του άξονα x'x για το οποίο BE=ED να δείξετε ότι η AD είναι η κάθετη της παραβολής στο σημείο A.

c. Από το σημείο Γ να φέρετε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα x'x που τέμνει την ευθεία OA στο σημείο Z. Να βρείτε την εξίσωση του γεωμετρικού τόπου του σημείου Z.

14. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$ και το σημείο της $P(ap^2, 2p)$, $p > 0$. Φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα PA κάθετο στον άξονα Oψ (A σημείο του άξονα Oψ). Από το A φέρουμε ευθεία (ε) κάθετη στην OP (O η αρχή των αξόνων).

a. Να δείξετε ότι η (ε) τέμνει τον Oχ σε σταθερό σημείο B.

β. Αν Γ σημείο της παραβολής τέτοιο ώστε η ΓΟ να είναι κάθετη στην ΡΟ, να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΡΟΓ είναι $E = 4p + \frac{16}{p}$

γ. Να βρείτε για ποια τιμή του ρ το πιο πάνω εμβαδόν E, γίνεται ελάχιστο.

15. Οι εφαπτόμενες της παραβολής $y^2 = 4ax$ στα σημεία της $A(at^2, 2at)$ και

$B(ap^2, 2ap)$ τέμνονται στο σημείο Κ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του σημείου Κ, αν ισχύει ότι $t - p = 2$.

ΕΝΟΤΗΤΑ 8: ΕΛΛΕΙΨΗ

- Ορισμός – Εξίσωση έλλειψης
- Στοιχεία έλλειψης
- Ιδιότητες έλλειψης
- Θέση σημείου – Θέση ευθείας ως προς έλλειψη
- Παραμετρικές εξισώσεις έλλειψης
- Εξίσωση εφαπτομένης και καθέτου σε σημείο της έλλειψης

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 8ης ΕΝΟΤΗΤΑΣ: ΕΛΛΕΙΨΗ

1. Να δώσετε τον ορισμό της έλλειψης. (Σχολικό Βιβλίο Τεύχος Γ, σελ.111)
2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της έλλειψης με εστίες $E(\gamma, 0)$ και $E'(-\gamma, 0)$, $\gamma > 0$ και άθροισμα αποστάσεων του τυχαίου σημείου της από της εστίες ίσο με 2α , $\alpha > \gamma$ είναι η : $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$, $\alpha > \beta$. (Σχολικό Βιβλίο Τεύχος Γ, σελ.112)
3. Δίνεται η εξίσωση : $\frac{x^2}{\mu+2} + \frac{y^2}{3-\mu} = 1, \mu \in R - \{-2, 3\}$.
 - a. Να βρείτε για ποια τιμή του μ η εξίσωση παριστάνει κύκλο.
 - b. Να βρείτε για ποιες τιμές του μ η εξίσωση παριστάνει έλλειψη
 - c. Αν $\mu \in \left(-2, \frac{1}{2}\right)$, να αποδείξετε ότι η έλλειψη που προκύπτει έχει τις εστίες της στον άξονα των τεταγμένων.
4. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $3x^2 + 4y^2 = 12$ και εστίες E και E' .
 - a. Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου TEE' όταν το T είναι τυχαίο σημείο της έλλειψης
 - β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου PEE' όταν το P είναι σημείο της έλλειψης με συντεταγμένες $P(\kappa, 1)$. (Σχολικό Βιβλίο Τεύχος Γ, σελ.116)
5. Να βρείτε τις εξισώσεις των διευθετουσών της έλλειψης $5x^2 + 4y^2 = 20$.

6. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

a. Να υπολογίσετε τις αποστάσεις του σημείου $T(2,3)$ από τις εστίες E και E' της έλλειψης.

b. Να βρείτε τις εξισώσεις των διευθετουσών της έλλειψης.

(Σχολικό Βιβλίο Τεύχος Γ, σελ.120)

7. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$ με εστίες E και E' και Βτο σημείο τομής της

έλλειψης με τον θετικό ημιάξονα Ox . Αν το τρίγωνο BEE' είναι ισόπλευρο να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης.

8. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ και σημείο $P(3\sigma\upsilon\nu\theta, 2\eta\mu\theta)$ πάνω σε αυτή.

a. Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο P είναι

$$2\sigma\upsilon\nu\theta x + 3\eta\mu\theta y = 6$$

β. Η εφαπτομένη της έλλειψης στο P τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Γ και

Δ . Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Γ και Δ .

γ. Στα σημεία Γ και Δ φέρουμε ευθείες κάθετες στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα που τέμνονται στο σημείο T . Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης πάνω στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου T καθώς το σημείο P κινείται πάνω στην έλλειψη.

δ. Αν τα K και Λ είναι τα μέσα των χορδών PA' και PB' αντίστοιχα, όπου τα A' και B' είναι η κορυφές της έλλειψης με συντεταγμένες $A'(-3,0)$ και $B'(0,-2)$, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου P ώστε η ευθεία $K\Lambda$ να είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο P .

9. Δίνετε η έλλειψη $x^2 + 4y^2 = 4$. Σε τυχαίο σημείο της Σ ($2\sigma\upsilon\nu\theta$, $\eta\mu\theta$) φέρουμε την εφαπτομένη της έλλειψης . Από το κέντρο O της έλλειψης φέρουμε κάθετη στην εφαπτομένη , την OP (P σημείο της εφαπτομένης) . Από το Σ φέρουμε κάθετη στον άξονα OX , τη $\Sigma\Gamma$ (Γ σημείο του OX) . Η προέκταση της $\Gamma\Sigma$ τέμνει την προέκταση της OP σε σημείο T . Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος του σημείου T είναι έλλειψη .

10. Δίνεται το σημείο $E(4,0)$ και η ευθεία με εξίσωση $(\epsilon): x = \frac{25}{4}$.

α. Να δείξετε ότι το σύνολο των σημείων $T(x, y)$ του επιπέδου με την ιδιότητα $\frac{(TE)}{(TN)} = \frac{4}{5}$

όπου TN η απόσταση του σημείου T από την ευθεία (ϵ) , ανήκει στην έλλειψη με

$$\text{εξίσωση } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

β. Έστω $T(5\sigma\upsilon\nu\theta, 3\eta\mu\theta)$ ένα τυχαίο σημείο της έλλειψης και $A(\frac{8}{5}, 0)$ ένα σταθερό σημείο. Να υπολογίσετε τις τιμές του θ , $\theta \in [0, 2\pi)$, για τις οποίες η απόσταση TA γίνεται ελάχιστη.

11. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$ και σημείο $P(a\sigma\upsilon\nu\theta, b\eta\mu\theta)$ πάνω σε αυτή.

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση της κάθετης της έλλειψης στο σημείο P είναι:

$$a\eta\mu\theta \cdot x - b\sigma\upsilon\nu\theta \cdot y = (a^2 - b^2)\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta .$$

β. Αν κάθετη της έλλειψης στο P τέμνει τον άξονα των y στο σημείο B , να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος PB καθώς το P κινείται πάνω στην έλλειψη.

12. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $3x^2 + 2y^2 = 21$. Να υπολογίσετε την τιμή του A ,ώστε η ευθεία $Ax + 2y = 7$ να εφάπτεται της έλλειψης και στη συνέχεια να βρείτε το σημείο επαφής της έλλειψης με την ευθεία.

13. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες στα άκρα μιας διαμέτρου έλλειψης είναι πάντοτε παράλληλες.

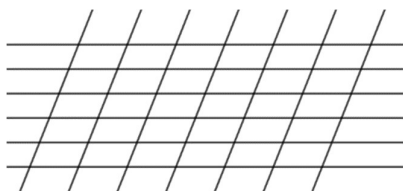
ΕΝΟΤΗΤΑ 10: ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

- Εισαγωγή στη Συνδυαστική
- Μεταθέσεις
- Διατάξεις
- Συνδυασμοί

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 10^{ης} ΕΝΟΤΗΤΑΣ: ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ

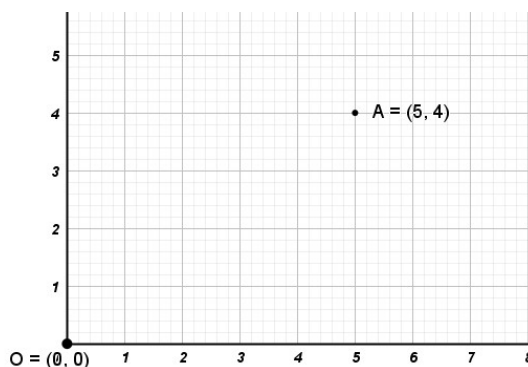
1. Πόσους τριψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5, 6 αν δεν επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίων;
2. Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ. Πόσοι από αυτούς αρχίζουν με Ε και τελειώνουν με Ε;
3. Με πόσους τρόπους μπορεί να επιλεγεί μία τριμελής επιτροπή από μία ομάδα 7 ατόμων;
4. Δίνεται η λέξη «Π Α Γ Κ Υ Π Ρ Ι Ε Σ» .
(α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.
(β) Να βρείτε πόσοι αναγραμματισμοί της πιο πάνω λέξης αρχίζουν με Π και τελειώνουν σε Π.
5. Σε μια διεθνή σύσκεψη συμμετέχουν 2 Έλληνες, 4 Γάλλοι και 5 Γερμανοί. Να βρείτε με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν σε ευθεία γραμμή, έτσι ώστε όλα τα μέλη της ίδιας εθνικότητας να κάθονται σε συνεχόμενες θέσεις.
6. Δίνεται η λέξη «ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ»
(α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.
(β) Να βρείτε πόσοι από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς αρχίζουν από Ι και τελειώνουν σε Ι και έχουν όλα τα σύμφωνα συνεχόμενα.
7. Πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ υπάρχουν; Πόσοι από αυτούς έχουν τα τρία Α συνεχόμενα ;
8. Σε ένα γραφείο εργάζονται 5 άνδρες και 6 γυναίκες.
a. Να βρείτε με πόσους τρόπους μπορεί να επιλεγεί μία τριμελής επιτροπή από τα άτομα που εργάζονται στο γραφείο.
b. Να βρείτε σε πόσους από αυτούς τους τρόπους η επιτροπή αποτελείται από άτομα του ίδιου φύλου.

9. Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης «ΧΡΟΝΟΜΕΤΡΟ» που δεν έχουν δυο «Ο» συνεχόμενα
10. Με ψηφία από το σύνολο $\{4, 5, 6, 7, 8\}$ σχηματίζουμε τριψήφιους φυσικούς αριθμούς χωρίς επανάληψη ψηφίου. Να βρείτε:
- το πλήθος των τριψήφιων φυσικών αριθμών που σχηματίζονται και
 - το άθροισμα όλων των τριψήφιων φυσικών αριθμών που σχηματίζονται.
11. Δίνεται η λέξη «Ε Λ Λ Η Ν Ι Κ Ε Σ» .
- Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.
 - Να βρείτε σε πόσους αναγραμματισμούς της πιο πάνω λέξης το Ν προηγείται του Ι, το Ι προηγείται του Κ και το Κ προηγείται του Η.
π.χ. «Ε Λ Ν Ε Σ Ι Λ Κ Η» και «Ν Ε Σ Ι Λ Κ Ε Η Λ» είναι δυο τέτοιοι αναγραμματισμοί.
12. Ένας υπάλληλος εργάζεται σ' ένα ξενοδοχείο μόνο πέντε μέρες την εβδομάδα.
- Πόσες διαφορετικές επιλογές έχει ως προς τις μέρες που θα εργαστεί, αν δεν υπάρχει κανένας περιορισμός στην επιλογή του.
 - Σε πόσες από αυτές τις επιλογές ο υπάλληλος θα εργαζόταν το πολύ μια μέρα από το Σαββατοκύριακο.
13. Να λύσετε την εξίσωση: $2 \binom{v}{3} = \Delta_2^v$
14. Πέντε ανδρόγυνα θα καθίσουν τυχαία γύρω από ένα κυκλικό τραπέζι. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν οι σύζυγοι να καθίσουν ο ένας πλάι στον άλλο;
15. Πόσα παραλληλόγραμμα μπορούν να σχηματιστούν σε ένα σχήμα το οποίο αποτελείται από 6 παράλληλες ευθείες οι οποίες τέμνονται από άλλες εφτά παράλληλες ευθείες.



16. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 9 όμοιες μπαλες σε 3 διαφορετικά κουτιά Α, Β και Γ ,αν:
- κάποιο ή κάποια κουτιά μπορεί να μείνει άδειο
 - το κάθε κουτί να περιέχει τουλάχιστον μία μπάλα
17. Με πόσους τρόπους μπορούν να χωριστούν 12 φοιτητές σε 4 ομάδες των 3 φοιτητών;

18. Ένα μυρμήγκι βρίσκεται την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και πρέπει να πάει στο σημείο $A(5,4)$ με την προϋπόθεση πως οι κινήσεις που μπορεί να κάνει είναι **πάνω** και **δεξιά** καθώς επίσης πρέπει να κινείται πάνω στο πλέγμα όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Με πόσους τρόπους μπορεί να πάει από το O στο A ;



19. Πόσες μη αρνητικές ακέραιες λύσεις έχει η εξίσωση: $x_1 + x_2 + x_3 = 10$.
20. Με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε δέκα μήλα σε επτά μαθητές ώστε οι δύο πρώτοι να πάρουν περιττό αριθμό και οι υπόλοιποι άρτιο; (δεν είναι απαραίτητο όλοι να πάρουν κάποιο μήλο)
21. Πόσες μη αρνητικές ακέραιες λύσεις έχει η εξίσωση :
- $$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 4$$
22. Να λύσετε την εξίσωση:
- $$3 \binom{2n}{3} = 22 \Delta_2^n$$
23. Με πόσους τρόπους 9 μαθητές μπορούν να χωριστούν σε τρεις ομάδες των 4, 3 και 2 μαθητών;
24. Πόσοι 3-ψήφιοι αριθμοί υπάρχουν με την ιδιότητα: το ψηφίο των μονάδων του να είναι μεγαλύτερο από το ψηφίο των δεκάδων και το ψηφίο των δεκάδων μεγαλύτερο από το ψηφίο των εκατοντάδων;

ΕΝΟΤΗΤΑ 11: ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

- Η έννοια της Πιθανότητας
- Πιθανότητες συνδυασμένων ενδεχομένων

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 11^{ης} ΕΝΟΤΗΤΑΣ: ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

1. Να βρείτε πόσοι είναι όλοι αναγραμματισμοί της λέξης ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ. Παίρνουμε στην τύχη ένα αναγραμματισμό. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
Α: Ο αναγραμματισμός να αρχίζει και να τελειώνει σε Ε
Β: Ο αναγραμματισμός να έχει το ένα Ε στο μέσο δεδομένου ότι αρχίζει και τελειώνει σε Ε
2. Αν πάρω στην τύχη ένα από τους αναγραμματισμούς της λέξης MAXIMUM να βρείτε την πιθανότητα να έχει το ένα Μ στην αρχή, το άλλο Μ στο τέλος και το άλλο στο μέσο.
3. Στο ασανσέρ μίας πολυκατοικίας με 10 ορόφους μπαίνουν 6 άτομα. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:
Α: Να κατεβούν όλοι σε διαφορετικούς ορόφους
Β: Να κατεβούν όλοι σε ένα όροφο
Γ: Να κατεβούν όλοι σε 2 ακριβώς ορόφους
4. Ποια η πιθανότητα μεταξύ 10 μαθητών 2 τουλάχιστον να έχουν γενέθλια την ίδια μέρα;
5. Ένα κουτί περιέχει 20 νομίσματα. Τα 14 είναι γνήσια και τα υπόλοιπα ψεύτικα. Παίρνουμε από το κουτί 2 νομίσματα. Ποια η πιθανότητα των ενδεχομένων
α) Α: ' Τα νομίσματα να είναι γνήσια'
β) Β: ' Το ένα νόμισμα γνήσιο και το άλλο ψεύτικο'
6. Δύο ομάδες, οι Α και Β, συμμετέχουν στη σειρά των τελικών του πρωταθλήματος πετοσφαίρισης. Νικήτρια της σειράς των τελικών είναι η ομάδα που θα πετύχει πρώτη 4 νίκες. Η πιθανότητα να κερδίσει η ομάδα Α έναν οποιονδήποτε αγώνα της σειράς των τελικών είναι $\frac{2}{3}$.
(α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου στη σειρά των τελικών να διεξαχθούν 6 αγώνες για να στεφθεί πρωταθλήτρια μία ομάδα.

(β) Δεδομένου ότι έχουν διεξαχθεί 6 αγώνες για να στεφθεί πρωταθλήτρια μία ομάδα, να υπολογίσετε την πιθανότητα η ομάδα αυτή να είναι η Α

7. Στον τελικό του πρωταθλήματος καλαθόσφαιρας ανδρών, προκρίθηκαν οι ομάδες Α και Β. Η ομάδα Α έχει πιθανότητα $2/3$ να κερδίσει την ομάδα Β σε κάθε αγώνα. Το πρωτάθλημα θα το κερδίσει η ομάδα που θα κερδίσει πρώτη τρεις αγώνες.
- α. Να βρείτε την πιθανότητα η ομάδα Α να κερδίσει το πρωτάθλημα.
- β. Αν η ομάδα Α κέρδισε το πρωτάθλημα, να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου η ομάδα Β να κέρδισε μόνο στον πρώτο αγώνα.
8. Σε ένα διαγωνισμό δεξιοτήτων οι διαγωνιζόμενοι θα περάσουν από 5 διαφορετικά στάδια δοκιμασίας. Η πιθανότητα ένας διαγωνιζόμενος να πετύχει σε ένα οποιοδήποτε στάδιο είναι $4/5$. Να υπολογίσετε την πιθανότητα των ενδεχομένων:
- (α) $A = \{\text{ο διαγωνιζόμενος να πετύχει σε τρία ακριβώς στάδια}\}$
- (β) $B = \{\text{ο διαγωνιζόμενος να πετύχει σε τρία ακριβώς συνεχόμενα στάδια}\}$
- (γ) $\Gamma = \{\text{ο διαγωνιζόμενος να πετύχει σε ένα τουλάχιστον στάδιο}\}$
9. Σε ένα κουτί Κ1 υπάρχουν 2 πράσινες και 5 μαύρες φανέλες και σε ένα άλλο κουτί Κ2 υπάρχουν 3 γαλάζιες και 4 μαύρες φανέλες. Από μία ομάδα 12 κοριτσιών και 8 αγοριών, επιλέγεται τυχαία ένα παιδί. Αν είναι κορίτσι θα πάρει 2 φανέλες από το κουτί Κ1 ενώ αν είναι αγόρι θα πάρει 2 φανέλες από το κουτί Κ2. Η επιλογή των δύο φανελών θα γίνει τυχαία χωρίς επανατοποθέτηση. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
- (α) $E1$: “να επιλεγεί αγόρι και να επιλέξει φανέλες διαφορετικού χρώματος”.
- (β) $E2$: “οι δύο φανέλες που θα επιλεγούν να είναι διαφορετικού χρώματος”.
- (γ) $E3$: “να έχει επιλεγεί αγόρι δεδομένου ότι οι δύο φανέλες που έχουν επιλεγθεί είναι διαφορετικού χρώματος”.
- (δ) $E4$: “να έχει επιλεγεί αγόρι δεδομένου ότι οι φανέλες που έχουν επιλεγθεί είναι και οι δύο γαλάζιες”.
10. Πότε δύο ενδεχόμενα ενός δ.χ ονομάζονται ασυμβίβαστα; (Σχολικό βιβλίο. Τεύχος Δ σελ. 73)
11. Πότε δύο ενδεχόμενα ενός δ.χ ονομάζονται αντίθετα; (Σχολικό βιβλίο. Τεύχος Δ σελ. 101)
12. Πότε δύο ενδεχόμενα ενός δ.χ θα είναι αντίθετα; Σχολικό Βιβ. Τευχ. Δ σελ.73)

13. Δίνεται η λέξη «ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ».

(α) (i) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης.

(ii) Αν επιλεγεί στη τύχη ένας από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων: Α: “ο αναγραμματισμός να περιέχει τα τρία Α συνεχόμενα” Β: “ο αναγραμματισμός να περιέχει τα τρία Α συνεχόμενα και τα δυο Τ σε μη διαδοχικές θέσεις”

(β) Να βρείτε πόσες λέξεις μπορούν να σχηματιστούν χρησιμοποιώντας τέσσερα από τα γράμματα της λέξης «ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ».

14. Να αποδείξετε ότι εάν Α, Β είναι δύο ανεξάρτητα ενδεχόμενα ενός δ.χ τότε και τα Α, Β' θα είναι ανεξάρτητα.

15. Να αποδείξετε ότι εάν Α, Β είναι δύο ανεξάρτητα ενδεχόμενα ενός δ.χ τότε και τα Α', Β' θα είναι ανεξάρτητα.

16. Αν για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δ.χ ισχύουν $3P(A')=P(A)$ και $2P(B)=1+P(A')$. Αν επιπλέον είναι $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$ να βρείτε τις πιθανότητες $P(A \cup B)$, $P(A/B)$ και $P(A-B)$.

17. Δύο μαθητές βρίσκονται σε διαφορετικές αίθουσες και προσπαθούν να λύσουν ένα πρόβλημα. Η πιθανότητα να λύσει το πρόβλημα ο μαθητής Β είναι $\frac{1}{3}$ και η πιθανότητα να το λύσει τουλάχιστον ένας είναι $\frac{1}{2}$. Να βρείτε τις πιθανότητες:

α) Να λύσει το πρόβλημα ο μαθητής Α

β) Τουλάχιστον ένας από τους μαθητές να μην λύσει το πρόβλημα

γ) Να λύσει το πρόβλημα μόνο ένας από τους μαθητές

ΚΑΛΟ ΔΙΑΒΑΣΜΑ ΚΑΙ ΚΑΘΕ ΚΑΛΟ ΣΤΗ ΖΩΗ ΣΑΣ

ΤΑΣΟΣ ΕΥΑΓΟΡΟΥ