

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ Βκατ

Απόλυτες τιμές:

1. Να λύσετε τις πιο κάτω ασκήσεις:

a) $|2\chi + 3| - 5 = 0$

b) $|\chi - 2| + 3 = 0$

c) $2|\chi - 1| = |3\chi - 4|$

d) $|\chi^2 + 1| - 2|\chi| - 4 = 0$

e) $\ln^2 \chi = 2|\ln \chi|$

f) $3|\chi - 1| - 7 = 1 - |\chi - 1|$

Συναρτήσεις:

1. Να βρείτε το Π.Ο. των συναρτήσεων:

a) $f(\chi) = \frac{2\chi}{\chi^2 - 3\chi + 2}$

b) $f(\chi) = \sqrt{\chi^2 - 9}$

c) $f(\chi) = \sqrt{\frac{\chi - 1}{\chi^2 - 4}}$

d) $\psi = \ln(2\chi + 3)$

e) $\psi = 2^{\sqrt{\chi - 3}}$

f) $\psi = \log_{\chi+1}(2 - 5\chi)$

g) $\psi = \frac{e^{2\chi+3}}{\chi - 2}$

h) $\psi = e^{\frac{3}{\chi-1}}$

2. Να βρείτε το Π.Τ. των συναρτήσεων:

a) $\psi = \frac{\chi + 3}{\chi - 1}, \chi \neq 1$

b) $\psi = \frac{\chi + 3}{\chi - 1}, \chi > 1$

c) $\psi = \chi^2 - 2\chi - 3$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+2}{x-4}$, με $x > 4$. Να βρείτε:
- το πεδίο τιμών, και
 - τον τύπο της f^{-1} .
4. Δίνεται η συνάρτηση $\psi = e^{\frac{x}{2}-1}$. Να βρείτε:
- Το πεδίο ορισμού της,
 - το πεδίο τιμών της και
 - τον τύπο της f^{-1} .
5. Να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση των συναρτήσεων, που δίνονται από τους πιο κάτω τύπους. Αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση, να βρείτε τον τύπο της και το πεδίο ορισμού της.
- $\psi = \sqrt{x+2}$
 - $\psi = x^2 + 1$
 - $\psi = \frac{x+2}{x-3}, x \neq 3$
 - $\psi = x^2 + 6x + 8, x \geq -3$
6. Για κάθε ένα από τα παρακάτω ζεύγη συναρτήσεων να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων: $f+g$, $3f-5g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $f \circ g$, $g \circ f$
- $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = x - 1$ και
 - $f(x) = \ln x$, $g(x) = x - 2$
7. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 5x + 4$ και $g(x) = 6x - K$. Να βρείτε το K ώστε $f \circ g = g \circ f$.

Όρια συναρτήσεων:

1. Να βρείτε τα όρια:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5x + 4}{-3x^2 + 6}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3x - 2}{x^2 - x - 1}$

c) $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{2\chi - 3}{\chi^2 + 4\chi - 1}$

d) $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} (\sqrt{\chi + 2} - \sqrt{\chi})$

e) $\lim_{\chi \rightarrow 3} \frac{\chi - 3}{\chi^2 - 9}$

f) $\lim_{\chi \rightarrow 2} \frac{\chi^2 - 3\chi + 2}{\chi^2 - 2\chi}$

g) $\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{\eta\mu\chi - \eta\mu 4\chi}{\chi}$

h) $\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2\chi}{\eta\mu 3\chi}$

i) $\lim_{\chi \rightarrow 3^+} \frac{\chi - 3}{|\chi^2 - 4\chi + 3|}$

j) $\lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\chi}{\chi^2}$

k) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{\chi + h} - \sqrt{\chi})}{h}$

l) $\lim_{\chi \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4\chi^2 - 1}}{\chi}$

m) $\lim_{\chi \rightarrow 1^+} \frac{\chi - 2}{\chi - 1}$

n) $\lim_{\chi \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{\chi}}{1 - \chi}$

o) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\chi + h)^2 - \chi^2}{h}$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \begin{cases} 4\chi + 3 & \text{αν } \chi \in (-\infty, 2) \\ -2\chi + 1 & \text{αν } \chi \in (2, +\infty) \end{cases}$

a) Να βρείτε τα $f(1)$ και $f(4)$

b) Να εξετάσετε αν υπάρχει $\lim_{\chi \rightarrow 2} f(\chi)$

c) Να παραστήσετε γραφικά την f .

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{αν } x < -1 \\ a^2x + 3 & \text{αν } x \geq -1 \end{cases}$. Να βρείτε το a ώστε το $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ να υπάρχει.

Πρόοδοι – (Α.Π. και Γ.Π.) :

1. Ο πρώτος όρος Α.Π. είναι το 3 και ο δέκατος – έκτος όρος της είναι το τριπλάσιο του πέμπτου όρου. Να βρείτε πόσοι όροι έχουν άθροισμα 168.
2. Σε αριθμητική πρόοδο το άθροισμα του τρίτου και του έκτου όρου είναι 25, ενώ ο έβδομος όρος είναι τετραπλάσιος του δεύτερου. Να βρεθεί το Σ_{20}
3. Αριθμητική και γεωμετρική πρόοδος έχουν τον ίδιο πρώτο όρο. Ο λόγος της Γ. Π. είναι ίσος με το $\frac{1}{4}$ της διαφοράς της Α.Π. Το Σ_{∞} της Γ.Π. είναι ίσο με το δεύτερο όρο της Α.Π. και το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της Α. Π. είναι 110. Να βρείτε τις προόδους.
4. Να βρείτε τα x και ψ αν οι αριθμοί $x+1$, $\psi+3$, $3\psi+2$ είναι διαδοχικοί όροι Α. Π. και οι αριθμοί x , $x+\psi$, $6\psi-3$, είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π.
5. Σε φθίνουσα Γ. Π. οι δύο πρώτοι όροι διαφέρουν κατά 2 και το άθροισμα των απείρων όρων της είναι 8. Να βρείτε τον έκτο όρο της προόδου.
6. Γεωμετρική Πρόοδος έχει $a_{31} = 2$. Να δείξετε ότι το γινόμενο των 61 πρώτων όρων της είναι 2^{61} .
7. Φθίνουσα Γ. Π. έχει πρώτον όρο το 3 και δεύτερο όρο το β . Αν το άθροισμα των απείρων όρων της είναι 6 να βρείτε το β .
8. Να βρείτε την Α.Π. της οποίας το άθροισμα όλων των όρων της εκτός του πρώτου ισούται με -36, το άθροισμα όλων των όρων της εκτός από του τελευταίου, ισούται με 0 και η διαφορά του έκτου όρου από τον δέκατο όρο ισούται με -16.
9. Αν $\ln \frac{25}{2}$, $\ln x$, $\ln 50$, ψ είναι διαδοχικοί όροι Α.Π. να βρείτε τα x και ψ .

10. Ο πρώτος όρος Α.Π. είναι a και ο τρίτος γ .

a) Να βρείτε τη διαφορά δ της προόδου συναρτήσει των a και γ .

b) Αν τα αθροίσματα $\Sigma_4, \Sigma_5, \Sigma_7$ της προόδου είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π., να

δείξετε ότι: $7a^2 = 13\gamma^2$

Εκθετική και Λογαριθμική συνάρτηση:

1. Να βρείτε το χ :

a) $\log_{\chi} 32 = 5$

b) $\log_2 \chi = 3$

c) $\log_4 8 = \chi$

d) $e^{-\ln \chi} = 4$

e) $\ln e^{\chi} = 2$

f) $\log_{\frac{1}{2}} \chi = 5$

g) $3^{\log_{\chi} 5} = 5$

h) $\log_{\chi} [\log_3 81] = 1$

2. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

a) $32^{\chi} = 16^{1-\chi}$

b) $5^{2\chi+3} = 5$

c) $3^{\chi} = 5^{\chi+1}$

d) $9^{\chi} - 2 \cdot 3^{\chi+1} - 27 = 0$

e) $\log(3 \cdot 9^{\chi} - 10 \cdot 3^{\chi} + 4) = 0$

f) $\log(4^{\chi+1} + 2) = \log 9 + \chi \log 2$

g) $a^{\chi} \cdot a^{3\chi} \cdot a^{5\chi} \dots a^{31\chi} = a^{16}$

h) $\log_2 \chi + \log_{\chi} 16 = 5$

i) $\log \chi = \log_5 2\chi$

j) $\log(\chi - 2) + \log(\chi - 3) = 1 + \log 3$

k) $2^{\chi+5} + 3^{\chi} = 5 \cdot 2^{\chi} + 3^{\chi+2}$

l) $4^x - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$

m) $\log(5^x - 2 \cdot 3^x) + \log 27 = \log 71 + x \log 3$

n) $\log_5 7 \cdot \log 5 = 2 \log x$

o) $\log(3 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 4) = 0$

p) $\log_3 x = \log_9(2x + 3)$

q) $\log(4^{x+1} + 1) = \log 5 + x \log 2$

r) $\log[\log(10^{x-1} + 2) + 1] = \log 2 + \log x$

3. Να δείξετε ότι $\log_x a$, $\log_{x^2} a$, $\log_{x^4} a$ είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π. και να βρείτε το Σ_∞ .

4. Αν $3^{1+\sin x + \sin^2 x + \dots} = 9$ με $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, να βρείτε το x .

5. Αν το x είναι η μεγαλύτερη από τις ρίζες της εξίσωσης

$$\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης $x + \log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x + \dots$

6. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

a) $\psi = \ln \frac{3x-1}{x+2}$

b) $\psi = \log_{x+1}(2-5x)$

7. Αν οι θετικοί αριθμοί a , β , γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου να δείξετε ότι οι αριθμοί $\ln a$, $\ln \beta$, $\ln \gamma$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και αντίστροφα.

8. Αριθμητικής προόδου ο πρώτος όρος είναι $\log a$ και ο δεύτερος όρος είναι $\log \beta$.

Να δείξετε ότι το άθροισμα των n πρώτων όρων της είναι: $\Sigma_n = \frac{1}{2} \log \frac{\beta^{n(n-1)}}{a^{n(n-3)}}$.

Παράγωγοι:

1. Με βάση τον ορισμό της παραγώγου να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

a) $f(\chi) = \chi^2 + 3\chi$

b) $\psi = \sqrt{\psi}$

2. Να βρείτε τις παραγώγους των πιο κάτω συναρτήσεων:

a) $\psi = 3t^2 + 6t - 1$

b) $\psi = (2e^x - 3)\chi^2$

c) $\psi = \frac{1-2\chi}{\chi^3 + 1}$

d) $\psi = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu\theta}{1 + \eta\mu\theta}$

e) $f(t) = t \cdot \varepsilon\phi t$

f) $\psi = \frac{\sigma\tau\epsilon\mu\chi}{1 + \sigma\phi\chi}$

g) $\psi = \chi^2 \sigma\upsilon\nu 4\chi$

h) $\psi = \varepsilon\phi^4 5\chi$

i) $\psi = e^{\eta\mu^3\chi}$

j) $\psi = \sqrt{2 + \sigma\upsilon\nu 3\chi}$

k) $\psi = \ln \frac{1 - \varepsilon\phi\chi}{\varepsilon\phi^2\chi}$

l) $\psi = e^{2\chi} \ln(\chi^2 + 1)$

m) $\chi^2 - \psi^2 + \chi\psi = 3$

n) $\psi = \chi^{\ln\chi}$

o) $\psi = 2^{\chi^2+1}$

p) $\psi = 5^{\eta\mu^3\chi}$

3. Αν $\psi = e^{-\chi} \cdot \sigma\upsilon\nu 2\chi$ να δείξετε ότι: $\frac{d^2\psi}{d\chi^2} + 2\frac{d\psi}{d\chi} + 5\psi = 0$.

4. Αν $\chi^2 + \psi^2 = 2\psi$ να δείξετε ότι: $\psi'' = \frac{1}{(1-\psi)^3}$.
5. Αν $\psi = \frac{1}{2}\epsilon\phi^2\chi + \ln(\sigma\upsilon\nu\chi)$ να δείξετε ότι: $\psi' = \epsilon\phi^3\chi$.
6. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $\chi^2 - 2\chi\psi - \psi^2 - \chi = 0$ στο σημείο της με τετμημένη $\chi = 1$ και $\psi < 0$.
7. Να βρείτε της εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης της καμπύλης:
- a) $\chi^2 + \psi^2 = R^2$ στο σημείο $(1, 4)$
- b) $\chi\psi = 2$ στο σημείο με $\chi = \frac{1}{2}$.
8. Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης: $\frac{\chi^2}{9} + \frac{\psi^2}{4} = 1$ στο σημείο $A(3\sigma\upsilon\nu\theta, 2\eta\mu\theta)$ είναι η $2\sigma\upsilon\nu\theta \cdot \chi + 3\eta\mu\theta \cdot \psi = 6$.
9. Δίνεται η καμπύλη: $\psi = \chi \cdot e^{\chi^2}$:
- a) Να βρείτε της εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο $\chi=0$.
- b) Αν $\psi' - \psi^2 = e^{\chi^2} - 3\chi^2$ να δείξετε ότι: $\chi^2 = \ln 3$ ή $\chi = 0$.
10. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $\psi = \ln(1 - \sigma\upsilon\nu\chi)$. Να δείξετε ότι:
- a) $\frac{d^2\psi}{d\chi^2} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\chi - 1}$
- b) $\frac{d^2\psi}{d\chi^2} + e^{-\psi} = 0$.

Πολυώνυμα:

1. Αν τα πολυώνυμα $f(\chi) \equiv a\chi^3 + b\chi^2 + \gamma + 8$ και $g(\chi) \equiv 5\chi^3 + (a-2)\chi^2 + 2a - 3b$ είναι ίσα, να υπολογίσετε τους αριθμούς a, b, γ .
2. Αν $5\chi^2 + 3\chi - 7 \equiv A(\chi-2)(\chi-1) + B(\chi-2)(\chi+3) + \Gamma(\chi-1)(\chi+3)$, να υπολογίσετε τα A, B, Γ .
3. Να προσδιορίσετε ακέραιο πολυώνυμο 4^{ου} βαθμού αν ισχύει: $f(\chi) - f'(\chi) \equiv \frac{\chi^4}{24}$.

4. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x)$, $3^{\text{ου}}$ βαθμού. Να βρεθούν οι συντελεστές του $1^{\text{ου}}$ βαθμίου και του $2^{\text{ου}}$ βαθμίου όρου του καθώς και ο σταθερός όρος του αν γνωρίζουμε ότι: $8f(x) - f(2x) \equiv 18x + 14$.
5. Να εξετάσετε αν το 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου $f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 5$. Να κάνετε τη διαίρεση $(x^3 + 3x^2 + x - 5) : (x - 1)$. Ποιο είναι το πηλίκο και το υπόλοιπο;
6. Αν το πολυώνυμο $f(x) \equiv x^3 + ax^2 + bx + 4$ δέχεται ως ρίζες τους αριθμούς 1 και 2 να βρείτε τους αριθμούς a και b .
7. Να προσδιορίσετε το πολυώνυμο $2^{\text{ου}}$ βαθμού αν γνωρίζουμε ότι έχει ρίζες το 2, -3 και $f(5) = 24$.
8. Το πολυώνυμο $f(x) \equiv x^3 - x^2 + ax + b$ δέχεται ρίζα το -2 . Όταν διαιρεθεί με το $x - 1$ αφήνει υπόλοιπο 3. Να βρείτε τα a και b .
9. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων τα κλάσματα:
- $\frac{5x - 1}{x(x^2 - 1)}$
 - $\frac{3x - 2}{(x^2 + 4)(x + 2)}$
 - $\frac{5x^2 - x + 4}{x^3 + 2x}$
 - $\frac{5x^2 + 4x - 7}{(x^2 - x - 6)(x + 2)}$
 - $\frac{2x^2 + 8x + 7}{x^2 + 5x + 6}$
 - $\frac{3x^2 - 2x + 1}{x^2(1 - x)}$
 - $\frac{x^3 + x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4}$

10. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα $f(x) \equiv \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^2(1-x)}$.

Στη συνέχεια να βρείτε $f'(x)$ και $f''(2)$.

11. Αν $f(x) \equiv \frac{5x+1}{(x-1)(x+2)}$ να βρείτε την $f'(x)$.

12. Αν $\frac{x^2-1}{x^2-4} \equiv \Pi(x) + \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$, να βρείτε τα $\Pi(x)$ και τα A και B.

Ευθεία:

1. Δίνονται τα σημεία $A(2, 5)$, $B(0, 2)$ και $\Gamma(8, 1)$:
 - a) Να δείξετε ότι η AB είναι κάθετη στην ΑΓ.
 - b) Να βρείτε την εξίσωση της ΒΓ.
 - c) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Ε της ΑΓ.
 - d) Να δείξετε ότι $AE = AB$.
 - e) Να βρείτε την απόσταση του σημείου Β από την ΑΓ.
 - f) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ ώστε το ΑΒΓΔ να είναι παραλληλόγραμμο.
2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία:
 - a) περνά από το σημείο $A(0, -2)$ και είναι παράλληλη με την ευθεία $2x - 3y = 1$.
 - b) περνά από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ευθεία $x - 3y + 2 = 0$
 - c) περνά από το σημείο $A\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$ και είναι παράλληλη με τον άξονα των x
 - d) περνά από το σημείο $B(-4, -3)$ και είναι παράλληλη με τον άξονα των y.
3. Τριγώνου ΑΒΓ δίνονται οι συντεταγμένες των κορυφών $A(1, 0)$, $B(0, 2)$ και $\Gamma(6, 5)$. Να βρείτε:
 - a) το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές του
 - b) το εμβαδόν του τριγώνου
 - c) την εξίσωση της διαμέσου ΑΜ

- d) την εξίσωση της μεσοκάθετης της AB.
- e) τις συντεταγμένες του κέντρου βάρους του τριγώνου.
- f) το συμμετρικό του σημείου $A(1, 0)$ ως προς τη ΒΓ.
4. Δίνονται τα σημεία $A(-3, 1)$, $B(1, 7)$ και η ευθεία $(\varepsilon): 3\kappa\chi + 5\psi + \kappa - 2 = 0$. Να βρείτε:
- a) το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB.
- b) την τιμή του κ ώστε η (ε) να είναι παράλληλη με την AB.
- c) την τιμή του κ ώστε η (ε) να περνά από το μέσο του AB.
5. Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): (\lambda + 1)\chi + 2\lambda\psi = 12$. Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ ώστε η (ε) :
- a) να είναι παράλληλη με την ευθεία $5\chi - \psi = 15$.
- b) να είναι κάθετη στην ευθεία $10\chi - 7\psi = 3$.
- c) να σχηματίζει με τους άξονες O χ και O ψ τρίγωνο εμβαδού 3τ.μ..

Τριγωνομετρία:

1. Να δείξετε ότι:

a) $\frac{\eta\mu 3\alpha}{\eta\mu\alpha} - \frac{\sigma\upsilon\nu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = 2$

b) $\frac{1 + \eta\mu 2\alpha - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 + \eta\mu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \varepsilon\varphi\alpha$

c) $\frac{\eta\mu 7\chi - 2\eta\mu 3\chi - \eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu 7\chi - 2\sigma\upsilon\nu 3\chi + \sigma\upsilon\nu\chi} = \varepsilon\varphi 3\chi$

d) $\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta - \eta\mu(\alpha + \beta) = 4\eta\mu\frac{\alpha}{2}\eta\mu\frac{\beta}{2}\eta\mu\frac{\alpha + \beta}{2}$

e) $\eta\mu 2\alpha + 2\eta\mu^2(45 - \alpha) = 1$

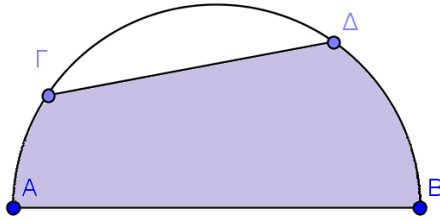
2. Να δείξετε ότι: $\frac{1 - 2\eta\mu^2 15^\circ}{2\sigma\upsilon\nu^2 22,5^\circ - 1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

3. Αν $\varepsilon\varphi\chi = 2$ να βρείτε: (α) $\eta\mu 2\chi$ και (β) $\sigma\upsilon\nu(60^\circ + 2\chi)$.

4. Αν μεταξύ των στοιχείων ενός τριγώνου $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση $\beta \sin A = \alpha \sin B$ να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.
5. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν οι σχέσεις $\hat{B} - \hat{\Gamma} = 90^\circ$ και $\frac{\beta + \gamma}{\alpha} = \sqrt{2}$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου.
6. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση $\eta\mu 2A + \eta\mu 2B = \eta\mu 2\Gamma$ να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
7. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση $\eta\mu B = 2\eta\mu \Gamma \sin A$ να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.
8. Να λύσετε τις εξισώσεις:
 - a) $\eta\mu(\chi + 10^\circ) = \eta\mu(4\chi - 20^\circ)$
 - b) $\eta\mu\left(2\chi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin \chi$, όπου $\chi \in [0, 2\pi]$
 - c) $\sin 3\chi + 3\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - 3\chi\right) = 2$
 - d) $\sin(\chi + 10^\circ) = \frac{2\varepsilon\phi 20^\circ}{1 + \varepsilon\phi^2 20^\circ}$
 - e) $\eta\mu 2\chi = 2\varepsilon\phi \chi$
 - f) $\sin 3\chi + \sin \chi = \eta\mu 2\chi$
 - g) $\sin 2\chi - \sin \chi + 1 = 0$, όπου $\chi \in [0, 2\pi]$
 - h) $\sqrt{3}\eta\mu \chi + \sin \chi = 0$
 - i) $\eta\mu 2\chi + \sin 2\chi = \sqrt{2}$
 - j) $\sin 2\chi - 4\sin \chi - 5 = 0$
 - k) $\sigma\phi \chi + \varepsilon\phi \chi = 5\sigma\tau\epsilon\mu \chi$
 - l) $4^{\sin^2 \chi} = 2^{2 + \eta\mu 2\chi}$
 - m) $1 + \sin \chi + \sin^2 \chi + \dots = 2$

Γεωμετρία:

1. Δίνεται ημικύκλιο με διάμετρο $AB = 2R$ και χορδή $\Delta\Gamma = \lambda_3$. Να βρείτε το εμβαδόν και την περίμετρο του σκιασμένου μέρους συναρτήσει του R .



2. Σε ημικύκλιο με διάμετρο $AB = 2R$ δίνεται χορδή $A\Gamma = \lambda_6$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μεικτογράμμου τριγώνου $AB\Gamma$ συναρτήσει της ακτίνας ημικυκλίου.
3. Σε περιφέρεια κύκλου (K, R) παίρνουμε τόξα $AB = 60^\circ$ και $A\Gamma = 90^\circ$ έτσι ώστε η γωνία $\Gamma AB > 90^\circ$. Να υπολογίσετε συναρτήσει της ακτίνας R το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις χορδές AB , $A\Gamma$ και το τόξο $B\Gamma$.
4. Δίνεται ημικύκλιο με διάμετρο $AB = 2R$. Στο B φέρνουμε την εφαπτόμενη BD και από το A χορδή $A\Gamma = \lambda_4$. Η προέκταση της $A\Gamma$ τέμνει την εφαπτόμενη BD στο E . Να βρείτε το εμβαδόν του μεικτογράμμου τριγώνου $BE\Gamma$ συναρτήσει του R .
5. Δίνεται ημικύκλιο με διάμετρο AB και Γ σημείο της περιφέρειας του ημικυκλίου τέτοιο ώστε $\hat{\Gamma AB} = 30^\circ$ και $B\Gamma = a \text{ cm}$. Αν E_1 είναι το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος της χορδής $B\Gamma$ και E_2 το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος της χορδής $A\Gamma$ να δείξετε ότι: $E_2 - E_1 = \frac{1}{6}\pi a^2 \text{ cm}^2$.
6. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει περίμετρο βάσης 48 cm και εμβαδό παράπλευρης επιφάνειας 288 cm . Αν υπολογίσετε το παράπλευρο ύψος, τον όγκο της πυραμίδας και τη γωνία που σχηματίζει η παράπλευρη έδρα με τη βάση της πυραμίδας.
7. Σε κανονική τετραγωνική πυραμίδα οι παράπλευρες έδρες σχηματίζουν με τη βάση γωνία 60° . Αν το παράπλευρο ύψος είναι $8a$ να βρείτε τον όγκο και την ολική επιφάνεια της πυραμίδας.

8. Κανονική πυραμίδα έχει βάση τετράγωνο πλευράς $2a$. Οι παράπλευρες ακμές της σχηματίζουν με τη βάση γωνία 45° . Να υπολογίσετε το εμβαδό και τον όγκο της πυραμίδας συναρτήσει του a .
9. Η ακμή της βάσης κανονικής τριγωνικής πυραμίδας είναι $2a$ cm και το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας της $2a^2\sqrt{3}$ cm². Να υπολογίσετε τον όγκο της πυραμίδας και τη γωνία που σχηματίζει κάθε παράπλευρη έδρα της με το επίπεδο της βάσης της.
10. Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας κυλίνδρου είναι 80π cm² και η ακτίνα βάσης του είναι ίση με τα $\frac{2}{5}$ του ύψους του. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας.
11. Κύλινδρος και κώνος έχουν την ίδια ακτίνα βάσης και η κυρτή επιφάνεια του κυλίνδρου είναι ίση με την ολική επιφάνεια του κώνου. Αν το ύψος του κυλίνδρου είναι $u=9a$ cm και η γενέτειρα του κώνου $\lambda=13a$ cm να υπολογίσετε τον όγκο του κώνου.
12. Κώνος έχει εμβαδόν κυρτής επιφάνειας 15π cm² και ακτίνα βάσης ίση με τα $\frac{3}{5}$ της γενέτειράς του. Να βρείτε το εμβαδόν κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου που έχει όγκο τετραπλάσιο από τον όγκο του κώνου και ύψος ίσο με την ακτίνα της βάσης του κώνου.
13. Κώνος έχει εμβαδόν κυρτής επιφάνειας 60π cm² και $3\lambda=5R$. Να υπολογίσετε τον όγκο κυλίνδρου που έχει την ίδια ακτίνα και το ίδιο ύψος με τον κώνο.
14. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με $AB=AG=2a$ και $A=120^\circ$. Το τρίγωνο στρέφεται ολόκληρη στροφή γύρω από τον άξονα $\chi B\psi \perp AB$ στο σημείο B. Να βρείτε τον όγκο και το εμβαδόν του παραγόμενου στερεού.
15. Θεωρούμε δύο διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα $AB=4$ cm και $BΓ=6$ cm μίας ευθείας (ϵ) και προς το ίδιο μέρος της (ϵ) κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ABΔ και BΓΕ. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της επιφάνειας

του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του τετράπλευρου ΑΔΕΓ γύρω από την ευθεία (ε).

16. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $AB = 4a \text{ cm}$, $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ και Κ, Λ τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα. Το τρίγωνο στρέφεται κατά γωνία 2π γύρω από τον άξονα χΓψ παράλληλο της ΑΒ.

α) Να δείξετε ότι το εμβαδό E_1 της επιφάνειας του στερεού που παράγει η ΚΒ είναι τριπλάσιο από το εμβαδόν E_2 που παράγει η ΚΓ κατά την περιστροφή.

β) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την περιστροφή του τετράπλευρου ΑΒΚΛ.

17. Ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) έχει $B\Gamma = 4a \text{ cm}$, $\hat{B} = 30^\circ$. Με πλευρά την ΑΓ κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΔΓ έξω από το τρίγωνο ΑΒΓ. Το σχήμα στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την πλευρά ΑΒ του τριγώνου ΑΒΓ. Να βρείτε συναρτήσει του a τον όγκο και το εμβαδόν του παραγόμενου στερεού. Αν το εμβαδόν είναι $64\pi \text{ τ.μ.}$ να υπολογίσετε το a .

18. Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $A\Delta = 4a \text{ cm}$, $AB = a \text{ cm}$, $\Delta\Gamma = 4a \text{ cm}$ και $BE \perp \Delta\Gamma$. Αν V_1 και V_2 είναι οι όγκοι που δημιουργούν τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΑΒΔ αντίστοιχα κατά την περιστροφή τους γύρω από την ΑΔ να δείξετε ότι: $V_1 = 18 V_2$ και $E_{B\Gamma} = \frac{25}{8} E_{BE}$.