

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

ΕΝΟΤΗΤΑ 2: ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3: ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΕΝΟΤΗΤΑ 4: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

**ΕΝΟΤΗΤΑ 5: ΟΡΙΟ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ**

ΕΝΟΤΗΤΑ 6: ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 7: ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ-ΤΟΠΟΙ

ΕΝΟΤΗΤΑ 8: ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

**ΕΝΟΤΗΤΑ 9: ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ - ΕΓΓΡΑΨΙΜΑ -
ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ- ΠΕΡΙΓΡΑΨΙΜΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ-
ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ-ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ**

ΕΝΟΤΗΤΑ 10: ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 11: ΣΤΕΡΕΑ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ

1. Να αποδείξετε ότι $x + y \geq 2\sqrt{xy}, \forall x, y \in \mathbb{R}$
2. Αν $\alpha < \beta$ να αποδείξετε ότι $\alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} < \beta$
3. Αν οι αριθμοί x, y είναι ακέραιοι να αποδείξετε ότι το κλάσμα $\frac{x^2 + x}{y^2 + y}$ απλοποιείται.
4. Να αποδείξετε ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αριθμός.
5. Αν $x^2 + 1 = y^2$ να δείξετε ότι $\frac{1+y}{x} = \frac{x}{y-1}$
6. Να αποδείξετε τα παρακάτω με την μέθοδο της τέλει επαγωγής:
 - a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + v^2 = \frac{v(v+1)(2v+1)}{6}$, για κάθε $v \in \mathbb{N}$
 - b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + v^3 = \left[\frac{v(v+1)}{2} \right]^2$, για κάθε $v \in \mathbb{N}$
 - c) Ο αριθμός $9^{v+1} - 8v - 9$ είναι πολλαπλάσιο του 64, για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$
 - d) Ο αριθμός $7^{2v} + 16v - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 64 για κάθε $v \in \mathbb{N}$

ΕΝΟΤΗΤΑ 2: ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις

- a) $|2x + 3| - 5 = 0$
- b) $|x - 2| + 3 = 0$
- c) $2|x - 1| = |3x - 4|$
- d) $|x^2 + 1| - 2|x| - 4 = 0$
- e) $\ln^2 x = 2|\ln x|$
- f) $3|x - 1| - 7 = 1 - |x - 1|$

2. Να συμπληρώσετε τις πιο κάτω συνεπαγωγές χωρίς απόλυτα:

- a) $|x| \leq 3 \Rightarrow$ _____
- b) $|a| = |\beta| \Rightarrow$ _____
- c) $|y| = 3 \Rightarrow$ _____
- d) $|\alpha| = -\alpha \Rightarrow$ _____

e) $|x| > 2 \Rightarrow$ _____

3. Να λύσετε τις πιο κάτω ανισώσεις:

a) $|x - 2| < 3$

b) $|2x + 3| > 1$

4. Αν $\left| \frac{\alpha - 2\kappa\beta}{2\kappa\alpha - \beta} \right| < 1$ και $|\kappa| > \frac{1}{2}$ να αποδείξετε ότι $|\alpha| > |\beta|$

5. Να απλοποιήσετε την παράσταση $\eta\mu x \sqrt{\eta\mu^2 x} - \sigma\upsilon\nu x \sqrt{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, $\frac{3\pi}{x} < x < 2\pi$

6. Να γράψετε την παράσταση $A = |X^2 + 2X - 15| - 3X + 7$ χωρίς απόλυτα για όλες τις πραγματικές τιμές του x .

7. Να υπολογίσετε την μικρότερη τιμή του M , για την οποία ισχύει: $\left| \frac{1}{x} \right| \leq M, \forall x \in [2, 7]$

8. Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση $\left| \frac{6\alpha}{9\alpha^2 + 1} \right| \leq 1$

ΕΝΟΤΗΤΑ 3: ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

A. ΝΟΜΟΣ ΗΜΙΤΟΝΩΝ - ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΩΝ - ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

1. Σε τρίγωνο ABΓ είναι $\hat{A} = 30^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$ και $\beta = 10\sqrt{2}$ cm, να βρεθεί η πλευρά α του τριγώνου.

2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ αν $\alpha = 6$ cm, $\beta = 8\sqrt{3}$ cm, και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.

3. Να υπολογίσετε τις γωνίες τριγώνου ABΓ που έχει πλευρές $\alpha = 4$ cm, $\beta = 4$ cm, και $\gamma = 4\sqrt{3}$ cm.

4. Να επιλυθεί το τρίγωνο ABΓ αν $\alpha = 2$ cm, $\gamma = \sqrt{3}$ cm και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.

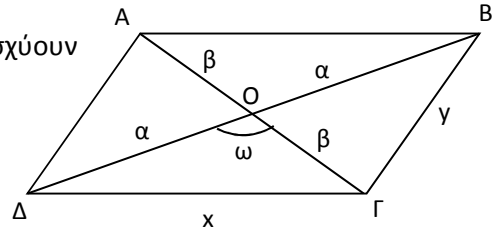
5. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ABΓ ισχύει η σχέση :

$$\frac{\sigma\upsilon\nu A}{\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu B}{\beta} + \frac{\sigma\upsilon\nu \Gamma}{\gamma} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2\alpha\beta\gamma}.$$

6. Αν σε τρίγωνο ABΓ ισχύει η σχέση $\beta \sigma\upsilon\nu \Gamma = \gamma \sigma\upsilon\nu B$ να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

7. Να δείξετε ότι για το εμβαδόν E τριγώνου $ABΓ$ ισχύει : $E = \frac{\alpha^2 \cdot \eta\mu B \cdot \eta\mu \Gamma}{2\eta\mu A}$

8. Να αποδείξετε ότι για το διπλανό παραλληλόγραμμο ισχύουν οι ισότητες:
- $x^2 + y^2 = 2\alpha^2 + 2\beta^2$
 - $E_{\#AB\Gamma\Delta} = 2\alpha\beta\eta\mu\omega$



Β. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΑΣ 2

ΤΟΞΩΝ

1. Να υπολογίσετε χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής τις παραστάσεις:

$\alpha) \sin 15^\circ \sin 30^\circ - \eta\mu 15^\circ \eta\mu 45^\circ$

$\beta) \sin 170^\circ \sin 50^\circ + \eta\mu 170^\circ \eta\mu 50^\circ$

$\gamma) \eta\mu 110^\circ \eta\mu 70^\circ - \sin 110^\circ \sin 70^\circ$

$\delta) \sin \frac{7\pi}{12} \sin \frac{\pi}{12} - \eta\mu \frac{7\pi}{12} \eta\mu \frac{\pi}{12}$

$\epsilon) \frac{\epsilon\phi 10^\circ + \epsilon\phi 20^\circ}{1 - \epsilon\phi 10^\circ \epsilon\phi 20^\circ}$

$\sigma\tau) \eta\mu(60 - \chi) \sin(30 + \chi) + \eta\mu(30 + \chi) \sin(60 - \chi)$

2. Να αποδείξετε ότι:

$\alpha) \sin(\chi + \frac{\pi}{4}) + \sin(\chi - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \sin \chi$ $\beta) \eta\mu(\chi + \frac{\pi}{3}) + \eta\mu(\chi - \frac{\pi}{3}) = \eta\mu \chi$

$\gamma) \sin^2(\chi - \frac{\pi}{4}) - \sin^2(\chi + \frac{\pi}{4}) = 2\eta\mu \chi \sin \chi$ $\delta) \epsilon\phi \alpha + \epsilon\phi \beta = \frac{\eta\mu(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$

$\epsilon) (\eta\mu \alpha + \sin \alpha)(\eta\mu \beta + \sin \beta) = \eta\mu(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$

$\sigma\tau) (\sin \alpha - \eta\mu \alpha)(\sin 2\alpha - \eta\mu 2\alpha) = \sin \alpha - \eta\mu 3\alpha$

$\zeta) \epsilon\phi(45 - \alpha) = \frac{\sin \alpha - \eta\mu \alpha}{\sin \alpha + \eta\mu \alpha}$. Ακολουθως να βρείτε την $\epsilon\phi 15^\circ$.

3. Αν $\sin(\alpha + \beta) = 0$ να αποδείξετε ότι $\eta\mu(\alpha + 2\beta) = \eta\mu \alpha$

4. Αν $\eta\mu\alpha = \frac{3}{5}$ με $90 < \alpha < 180$ και $\sigma\upsilon\nu\beta = -\frac{5}{13}$ με $180 < \beta < 270$ να υπολογίσετε τα $\eta\mu(\alpha+\beta)$ και $\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)$
5. Αν $\alpha+\beta = 45^\circ$ να αποδείξετε ότι $(1+\epsilon\phi\alpha)(1+\epsilon\phi\beta) = 2$
6. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\frac{\eta\mu A + \eta\mu(B-\Gamma)}{\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)} = \epsilon\phi B$ να αποδείξετε ότι $A=90^\circ$.
7. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν:

$$\alpha) \sigma\phi A \sigma\phi B + \sigma\phi B \sigma\phi \Gamma + \sigma\phi \Gamma \sigma\phi A = 1$$

$$\beta) \frac{\sigma\upsilon\nu A}{\eta\mu B \eta\mu \Gamma} + \frac{\sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu \Gamma \eta\mu A} + \frac{\sigma\upsilon\nu \Gamma}{\eta\mu A \eta\mu B} = 2$$

Γ. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΔΙΠΛΑΣΙΟΥ ΤΟΞΟΥ

1. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha \quad \beta) \frac{\eta\mu 2\alpha}{1-\eta\mu^2\alpha} = 2\epsilon\phi\alpha \quad \gamma) \sigma\phi\alpha - \epsilon\phi\alpha = 2\sigma\phi 2\alpha$$

$$\delta) \sigma\phi\alpha + \epsilon\phi\alpha = 2\sigma\tau\epsilon\mu 2\alpha \quad \epsilon) \frac{\eta\mu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \epsilon\phi\alpha \quad \sigma\tau) \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \eta\mu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \eta\mu 2\alpha} = \epsilon\phi\alpha$$

$$\zeta) \frac{1+\epsilon\phi\alpha\epsilon\phi 2\alpha}{\epsilon\phi\alpha + \sigma\phi\alpha} = \frac{\epsilon\phi 2\alpha}{2} \quad \eta) \frac{3-4\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu 4\alpha}{3+4\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu 4\alpha} = \epsilon\phi^4\alpha$$

$$\theta) \epsilon\phi(45-\alpha) = \frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\eta\mu 2\alpha} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} - \epsilon\phi 2\alpha \quad (\text{Ακολουθώντας να βρείτε την } \epsilon\phi 15^\circ)$$

$$\iota) \frac{2\sigma\upsilon\nu\chi}{1+\sigma\upsilon\nu 2\chi} \cdot \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\chi}{\eta\mu 2\chi} = \tau\epsilon\mu\chi \cdot \epsilon\phi\chi \quad \kappa) \frac{2\eta\mu 2\chi - \eta\mu 4\chi}{2\eta\mu 2\chi + \eta\mu 4\chi} = \epsilon\phi^2\chi$$

$$\lambda) \frac{\eta\mu 2\chi}{1+\sigma\upsilon\nu 2\chi} \cdot \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\chi}{2\sigma\upsilon\nu^2\chi} = \epsilon\phi^3\chi \quad \mu) \sigma\upsilon\nu^2(45-\alpha) + \eta\mu^2(45+\alpha) = \eta\mu 2\alpha + 1$$

$$\nu) \eta\mu^4\frac{\pi}{8} + \sigma\upsilon\nu^4\frac{3\pi}{8} = \frac{3}{4} \quad \xi) 1 - \sigma\upsilon\nu 4\chi = 8\eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi$$

2. Αν $\eta\mu 2\chi + \sigma\upsilon\nu 2\chi = -\frac{7}{5}$ να βρείτε την τιμή της $\epsilon\phi\chi$.

3. Αν $2\chi + \gamma = 45^\circ$ να δείξετε ότι $\frac{1-2\epsilon\phi\chi - \epsilon\phi^2\chi}{1+2\epsilon\phi\chi - \epsilon\phi^2\chi} = \epsilon\phi\gamma$

4. Αν $\epsilon\phi\alpha = \sigma\phi\beta + 2\epsilon\phi\beta$ να δείξετε ότι $2\epsilon\phi(\alpha-\beta) = \sigma\phi\beta$
5. Αν $\tan\theta - \epsilon\phi\theta = \alpha$ να δείξετε ότι $\epsilon\phi\frac{\theta}{2} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$
6. Αν $\eta\mu\theta = \frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu}$ να δείξετε ότι $\sigma\phi^2(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}) = \frac{\lambda}{\mu}$
7. Αν $\eta\mu\alpha = \frac{7}{10}$ και $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ να βρείτε το $\sin 2\alpha$. Σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται η γωνία 2α και γιατί.
8. Να αποδείξετε ότι $\epsilon\phi(30+\frac{\alpha}{2}) \cdot \epsilon\phi(30-\frac{\alpha}{2}) = \frac{2\sin\alpha-1}{2\sin\alpha+1}$.
9. Να αποδείξετε ότι $\eta\mu^2(\frac{\pi}{8}-\chi) + \sin^2(\frac{\pi}{8}+\chi) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\eta\mu 2\chi$
10. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να δείξετε ότι $\epsilon\phi 2A + \epsilon\phi 2B + \epsilon\phi 2\Gamma = \epsilon\phi 2A \cdot \epsilon\phi 2B \cdot \epsilon\phi 2\Gamma$

Δ. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ: ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΣΕ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΑ

1. Να δείξετε ότι: $\frac{\eta\mu\alpha - \eta\mu 5\alpha + \eta\mu 9\alpha - \eta\mu 13\alpha}{\sin\alpha - \sin 5\alpha - \sin 9\alpha + \sin 13\alpha} = \sigma\phi 4\alpha$
2. Να δείξετε ότι: $\frac{\sin 2\chi \sin 3\chi - \sin 2\chi \sin 7\chi + \sin \chi \sin 10\chi}{\eta\mu 4\chi \eta\mu 3\chi - \eta\mu 2\chi \eta\mu 5\chi + \eta\mu 4\chi \eta\mu 7\chi} = \sigma\phi 6\chi \sigma\phi 5\chi$

Ε. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Να λύσετε τις εξισώσεις:

- a. $\eta\mu(\chi + 10^\circ) = \eta\mu(4\chi - 20^\circ)$
- b. $\eta\mu\left(2\chi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\chi, \text{ όπου } \chi \in [0, 2\pi]$
- c. $\sin 3\chi + 3\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - 3\chi\right) = 2$
- d. $\sin(\chi + 10^\circ) = \frac{2\epsilon\phi 20^\circ}{1 + \epsilon\phi^2 20^\circ}$
- e. $\eta\mu 2\chi = 2\epsilon\phi\chi$
- f. $\sin 3\chi + \sin\chi = \eta\mu 2\chi$

g. $\sin 2\chi - \sin \chi + 1 = 0$, όπου $\chi \in [0, 2\pi]$

h. $\sqrt{3}\eta\mu\chi + \sin\chi = 0$

i. $\sin 2\chi - 4\sin\chi - 5 = 0$

j. $\sigma\phi\chi + \epsilon\phi\chi = 5\sigma\tau\epsilon\mu\chi$

κ. $4^{\sin^2\chi} = 2^{2+\eta\mu^2\chi}$

l. $1 + \sin\chi + \sin^2\chi + \dots = 2$

ΣΤ. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

1. Να λυθούν οι ανισώσεις

α. $2\eta\mu 2\chi > \sqrt{3}$ στο $[0, 2\pi]$

β. $2\sin\chi - \sqrt{3} > 0$ στο $[0, 2\pi]$

2. Να βρεθεί το Πεδίο ορισμού των συναρτήσεων

α. $y = \sqrt{2\sin\chi - 1}$

β. $y = \sqrt{\eta\mu\chi + 1}$

γ. $y = \sqrt{2\sin 4\chi + 5}$

ΕΝΟΤΗΤΑ 4: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε το Π.Ο. των συναρτήσεων:

a. $f(\chi) = \frac{2\chi}{\chi^2 - 3\chi + 2}$

b. $f(\chi) = \sqrt{3 - \sqrt{5 - \chi}}$

c. $f(\chi) = \sqrt{\frac{\chi - 1}{\chi^2 - 4}}$

d. $\psi = \ln(2\chi + 3)$

e. $\psi = 2^{\sqrt{\chi-3}}$

f. $\psi = \log_{\chi+1}(2-5\chi)$

g. $\psi = \frac{e^{2\chi+3}}{\chi-2}$

h. $\psi = e^{\frac{3}{\chi-1}}$

2. Να βρείτε το Σύνολο Τιμών των συναρτήσεων:

a. $\psi = \frac{\chi+3}{\chi-1}, \chi \neq 1$

b. $\psi = \frac{\chi+3}{\chi-1}, \chi > 1$

c. $\psi = \chi^2 - 2\chi - 3$

d. $f(\chi) = \sqrt{5 - \sqrt{2 - x}}$

e. $f(\chi) = \frac{3e^x - 2}{2e^x + 4}$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \frac{\chi+2}{\chi-4}$, με $\chi > 4$. Να βρείτε:

a. το πεδίο τιμών, και

b. τον τύπο της f^{-1} .

4. Δίνεται η συνάρτηση $\psi = e^{\frac{\chi}{2}-1}$. Να βρείτε:

a. Το πεδίο ορισμού της,

b. το Σύνολο τιμών της και

c. τον τύπο της f^{-1} .

5. Να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση των συναρτήσεων, που δίνονται από τους πιο κάτω τύπους. Αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση, να βρείτε τον τύπο της και το πεδίο ορισμού της.

a. $\psi = \sqrt{\chi+2}$

b. $\psi = \chi^2 + 1$

c. $\psi = \frac{\chi+2}{\chi-3}, \chi \neq 3$

d. $\psi = \chi^2 + 6\chi + 8, \chi \geq -3$

6. Για κάθε ένα από τα παρακάτω ζεύγη συναρτήσεων να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων: $f+g$, $3f-5g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $f \circ g$, $g \circ f$

a. $f(\chi) = \chi^2 - 1$, $g(\chi) = \chi - 1$ και

b. $f(\chi) = \ln \chi$, $g(\chi) = \chi - 2$

7. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 5x + 4$ και $g(x) = 6x - K$. Να βρείτε το K ώστε

$$f \circ g = g \circ f.$$

8. Αν $f(x) = x + 2$ και $g(x) = \frac{x^2 - 4}{|x| - 2}$, να εξετάσετε αν $f = g$. Αν $f \neq g$, να

προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, για το οποίο $f(x) = g(x)$.

9. Δίνονται οι συναρτήσεις $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, και $g : [3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους:

$$f(x) = 3x - 2 \text{ και } g(x) = \sqrt{x - 3}. \text{ Να ορίσετε τις συναρτήσεις } fog \text{ και } gof.$$

10. Δίδεται η συνάρτηση $g(x) = x + 2$. Να βρείτε τη συνάρτηση f αν $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$(g \circ f)(x) = 5 - 3x$$

11. Δίνεται η συνάρτηση $\psi = x^2 - 2x - 3$, $x \geq 1$. Να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση. Αν ορίζεται, να βρείτε τον τύπο της και το πεδίο ορισμού της.

12. Να εξετάσετε αν είναι άρτιες ή περιττές οι πιο κάτω συναρτήσεις

α. $f(x) = \frac{x^3 - \eta\mu x}{x^2 - 4}$

β. $f(x) = \frac{|x| + x^4}{\sqrt{x^2 - 16}}$

13. Αν $f(x) = x^2 + 2$, $x > 0$ να υπολογίσετε το $f(7)$ και $f^{-1}(f(7))$

ΕΝΟΤΗΤΑ 5: ΟΡΙΟ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω περιπτώσεις αν είναι επιτρεπτές διαφορετικά θα γράψετε δίπλα μη επιτρεπτή ή απροσδιόριστη.

$$\alpha) \frac{1}{-\infty} = \quad \beta) (-\infty)^{20} = \quad \gamma) \frac{1}{0^+} = \quad \delta) (-\infty)^{2013} =$$

$$\epsilon) 5^{-\infty} = \quad \zeta) \frac{-\infty}{-\infty} = \quad \sigma\tau) 7^{+\infty} = \quad \eta) 0^0 =$$

$$\theta) (-\infty) \cdot \infty = \quad \iota) (+\infty) \cdot 0 = \quad \kappa\alpha) \frac{0}{0} = \quad \iota\beta) \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} =$$

2. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$a. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x})$$

$$b. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{x}$$

$$c. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 5} - 2}$$

$$d. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1} + \sqrt{9x^2 + 2}}{\sqrt{25x^2 + 3}}$$

$$e. \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{|x^2 - 3x - 10|}{x - 5}$$

$$f. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{x}$$

$$g. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 1}}{x}$$

$$h. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+5} - \sqrt{x}}$$

$$i. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{2013} + 2x^{2011} + 3x^{2009}}{x^{2015} + 4x^{2013} + 5x^{2010}}$$

$$j. \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - 2}{4 + x + \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{x}}}$$

3. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} xf(x) = 3$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} [g(x) + x] = -2$ να υπολογίσετε το όριο μ.1,5

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 g(x) + x^3 f(x) + x^3}{x^3 f(x)}$$

4. Να ελέγξετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς την συνέχεια τους στο σημείο που δίνεται

α. $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x > 1 \\ 3x^2-2, & x \leq 1 \end{cases}$ στο $x = 1$

β. $f(x) = \begin{cases} -1+2x^2, & x \geq 3 \\ 3x-4, & x < 3 \end{cases}$ στο $x = 3$

5. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \frac{3\alpha}{x^3} + 1, & 0 < x \leq 2 \\ \frac{1 - \sqrt{x-1}}{x^2 - 4}, & x > 2 \end{cases}$

Να προσδιοριστεί το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

6. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} + \alpha \cdot \sin(\pi x) & , x \leq 1 \\ \alpha x^2 - 3x + 2\beta & , 1 < x \leq 2 \\ \ln(x-1) + \eta\mu(\pi x) + \beta - 1 & , x > 2 \end{cases}$

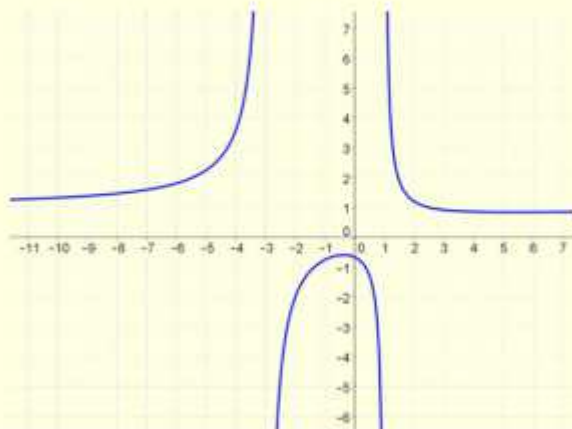
Να βρεθούν οι τιμές των α και β ώστε η f να είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της.

7. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln x - 2$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $[6, 8]$.

Να προσδιορίσετε την πιο πάνω ρίζα σε προσέγγιση ενός δεκαδικού ψηφίου

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα πιο κάτω όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$	(β) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
(γ) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$	(δ) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
(ε) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$	(στ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
(ζ) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$	(η) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$
(θ) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$	(ι) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$



8.

Δίνονται συναρτήσεις f και g , ορισμένες στο $\mathbb{R}$, τέτοιες ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3$$

Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + g(x))$

(β) $\lim_{x \rightarrow 2} |f(x) - g(x)|$

(γ) $\lim_{x \rightarrow 2} (3f^{10}(x) - 2g^3(x))$

(δ) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{(f(x) \cdot g(x))}$

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 5x - 2a + 1, & x \leq 1 \\ a^2x + 7x, & x > 1 \end{cases}$$

Να βρείτε την τιμή του a , ώστε να υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3\eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu x - 1 = 0$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $(0, \pi)$.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2\sqrt{x} + 5x + 1 = 3x^2 - \frac{96}{x}$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $(4, 16)$.

ΕΝΟΤΗΤΑ 6: ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

1. Να βρεθούν οι τέσσερις πρώτοι όροι των ακολουθιών

a) $a_\nu = 2\nu + 1$

b) $a_\nu = (-1)^\nu |3 - \nu|$

c) $a_1 = 1, a_{\nu+1} = a_\nu^2 + 2$

2. Να βρείτε τον νιοστό όρο της ακολουθίας που ορίζετε αναδρομικά

$$a_1 = 1, a_{\nu+1} = a_\nu + 3$$

3. Να ελέγξετε τις παρακάτω ακολουθίες ως προς την μονοτονία τους

a) $a_\nu = -3\nu + 4$

b) $a_\nu = 4^\nu - 3$

4. Να βρείτε το άθροισμα $\sum_{k=1}^4 (3 - 2^k)$
5. Δίνεται η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = 2 - \frac{1}{2^n}$
(α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα.
(β) Να βρείτε ποιοι πραγματικοί αριθμοί αποτελούν άνω φράγμα για την ακολουθία.
(γ) Να βρείτε το ελάχιστο άνω φράγμα.
6. Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο κάτω ακολουθίες είναι συγκλίνουσες ή όχι.
(α) $a_n = 4n - 2$ (β) $a_n = \frac{3n + 1}{2n + 1}$ $a_n = \frac{n^3 - 2n}{n^2 - 2n + 2}$
(γ) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$ (δ) $a_n = \frac{n \ln n}{n^3}$ (ε) $a_{n+1} = a_n + 2, \quad a_1 = 1$

ΕΙΔΙΚΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ (ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ - ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ)

1. Οι αριθμοί $X - 2$, $X + 2$ και $2X - 1$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
α) Να βρείτε το X
β) Αν ο αριθμός $X - 2$ είναι ο δεύτερος όρος της αριθμητικής προόδου, να υπολογίσετε το άθροισμα των δέκα πρώτων όρων της
2. Σε μια γεωμετρική πρόοδο είναι : $\alpha_4 = 8$ και $\alpha_7 = 64$.
α) Να σχηματίσετε την πρόοδο
β) Να υπολογίσετε το άθροισμα των οχτώ πρώτων όρων της
3. Σε αριθμητική πρόοδο ο 19^{ος} όρος είναι 60 και ο 9^{ος} όρος είναι διπλάσιος του τέταρτου όρου της.
α) Να σχηματίσετε την πρόοδο
β) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{13} + \dots + \alpha_{20}$
4. Να βρείτε τις τιμές του x αν ισχύει: $x^2 + 4x^2 + 7x^2 + \dots + 67x^2 = 7038$
5. Σε φθίνουσα γεωμετρική πρόοδο ο τέταρτος όρος της είναι 5 και ο έβδομος όρος της $\frac{5}{27}$.

α) Να σχηματίσετε τη γεωμετρική πρόοδο.

β) Ποιος όρος της είναι ίσος με τα $\frac{2}{9}$ του αθροίσματος των απείρων όρων της ;

6. Απόλυτα φθίνουσα Γεωμετρική πρόοδος και Αριθμητική πρόοδος έχουν τον ίδιο πρώτον όρο και ο λόγος της Γεωμετρικής προόδου λ ισούται με τη διαφορά της Αριθμητικής προόδου δ. Ο δεύτερος όρος της Γεωμετρικής προόδου ισούται με τον 13ον όρο της Αριθμητικής προόδου και το άθροισμα των άπειρων όρων της Γεωμετρικής προόδου ισούται με . Να βρείτε:

α) τις δύο προόδους

β) το πλήθος των όρων της Αριθμητικής προόδου που πρέπει να προσθέσουμε για να πάρουμε άθροισμα ίσο με μηδέν.

7. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} + \dots = 32$$

8. Το άθροισμα των 10 πρώτων όρων Α.Π. είναι 85 και το άθροισμα των 16 πρώτων όρων της είναι 280. Να σχηματίσετε την πρόοδο και να βρείτε τον 20ον όρο της.

9. Σε Α.Π. ο 7ος όρος της είναι τετραπλάσιος του 2ου όρου της και ο 4ος όρος της είναι 11. Να σχηματιστεί η πρόοδος.

10. Ο 5ος όρος Α.Π. είναι 10 και είναι ο μεσαίος όρος. Να βρεθεί το άθροισμα όλων των όρων της Α.Π.

11. Σε φθίνουσα Γ.Π. ο πρώτος όρος της είναι διπλάσιος του λόγου της και το άθροισμα των απείρων όρων της είναι 2. Να βρεθεί η πρόοδος.

12. Να βρείτε τα χ και ψ αν οι αριθμοί $\chi + 1$, $\psi + 3$, $3\psi + 2$ είναι διαδοχικοί όροι Α.Π. και οι αριθμοί χ , $\chi + \psi$, $6\psi + 3$ είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π.

13. Ο πρώτος όρος Γ.Π είναι 5 και ο 6ος 160. Να βρείτε το άθροισμα των 6 πρώτων όρων της.

14. Φθίνουσα Γ.Π. και Α.Π. έχουν τον ίδιο πρώτο όρο και η διαφορά της Α.Π. ισούται με τον λόγο της Γ.Π. Ο 5ος όρος της Α.Π. είναι -1 και το άθροισμα των απείρων όρων της Γ.Π. είναι ίσο με τον δεύτερο όρο της Α.Π.. Να βρεθούν οι δυο πρόοδοι.

15. Σε Α.Π. $a_3 = 7$ και $a_7 = 19$, να βρείτε την Α.Π. και το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της.

16. Να βρείτε το άθροισμα: $\alpha + \beta + \frac{\beta^2}{\alpha} + \frac{\beta^3}{\alpha^2} + \dots$, όπου $\alpha > \beta > 0$.

17. Οι τέσσερεις από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 είναι οι τέσσερεις πρώτοι όροι αύξουσας Α.Π. και οι υπόλοιποι είναι οι τέσσερεις πρώτοι όροι φθίνουσας Γ.Π. Να βρείτε τον εκατοστό όρο της Α.Π. και το άθροισμα των απείρων όρων της Γ.Π.

18. Σε Α.Π. $\delta = 5$ και ισχύει $a_{\mu+\nu} = a_{\mu} + a_{\nu}$. Να βρείτε την πρόοδο.
19. Το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων απολύτως φθίνουσας Γ.Π. είναι 65 και το άθροισμα των απείρων όρων 81. Να βρείτε την πρόοδο.
20. Να δείξετε ότι: $\frac{\eta\mu 3\chi + \eta\mu \chi}{2\eta\mu 2\chi} = \sigma\upsilon\nu\chi$. Στη συνέχεια να δείξετε ότι η ακολουθία $4\eta\mu\chi, 2\eta\mu 2\chi, \eta\mu 3\chi + \eta\mu \chi, \dots$, όπου $\chi \neq \kappa\pi$ και $\chi \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, είναι απόλυτα φθίνουσα Γ.Π. Να δείξετε επίσης ότι: $\Sigma_{\infty} = 4\sigma\phi \frac{\chi}{2}$.

ΕΝΟΤΗΤΑ 7: ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ-ΤΟΠΟΙ

1. Δίνεται ένας κύκλος (O, ρ) .
α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μέσων M των ακτινών του κύκλου
β) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των μέσων M των χορδών του κύκλου (O, ρ) που είναι παράλληλες προς μια διάμετρο AB αυτού.
2. Δίνεται κύκλος (O, ρ) . Αν N τυχαίο σημείο του κύκλου και M σημείο στην προέκταση της ακτίνας ON έτσι ώστε $ON = NM$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του σημείου M όταν το σημείο N κινείται πάνω στον κύκλο (O, ρ) .
3. Δίνεται κύκλος με κέντρο O και σταθερό σημείο A εκτός αυτού. Αν σημείο B κινείται πάνω στον κύκλο να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του μέσου M του AB .
4. Να κατασκευάσετε γεωμετρικά ένα ευθύγραμμο τμήμα x με μήκος $x = \sqrt{12}$.

ΕΝΟΤΗΤΑ 8: ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

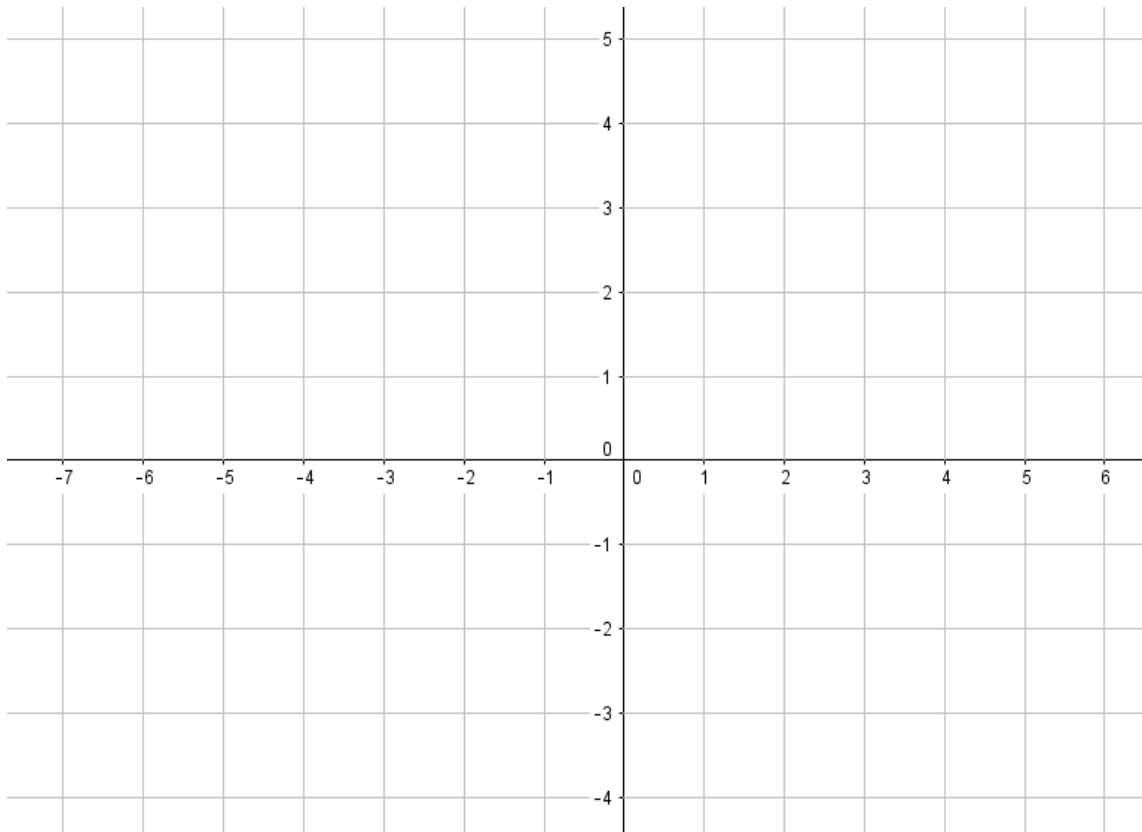
1. Στο ίδιο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων να κάνετε τη γραφική παράσταση των

συναρτήσεων $f(x) = 3^x$, $g(x) = -3^x + 2$, $h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

(Να φαίνονται καθαρά για κάθε μία τα όποια σημεία τομής με τους άξονες)

2. Στο ίδιο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων να κάνετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων $f(x) = \ln x$, $g(x) = \ln(x-3)$.

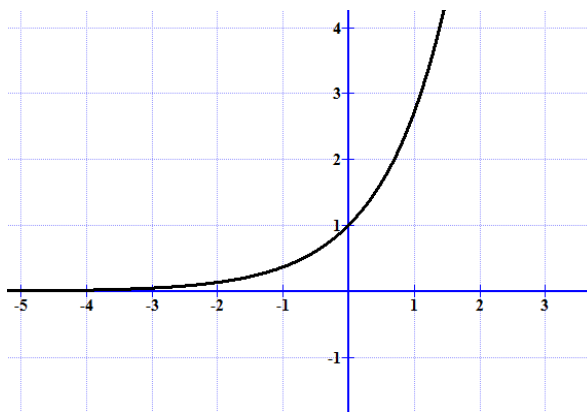
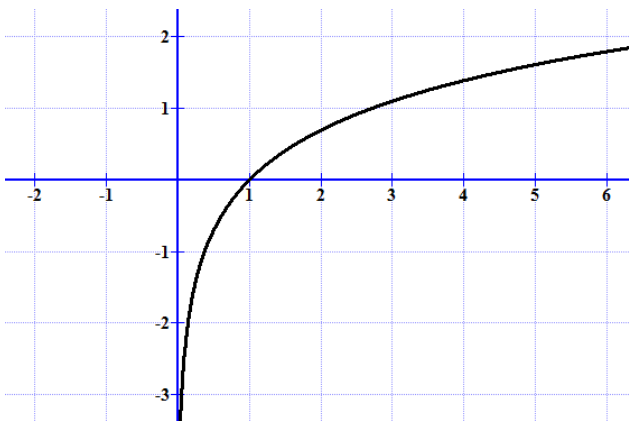
(Να φαίνονται καθαρά για κάθε μία τα όποια σημεία τομής με τους άξονες)



3. Δίνετε η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{a+1}{3-a}\right)^x$. Να βρείτε τις τιμές του a για τις οποίες η

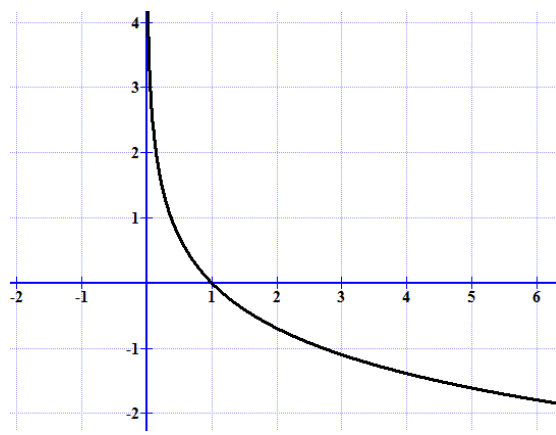
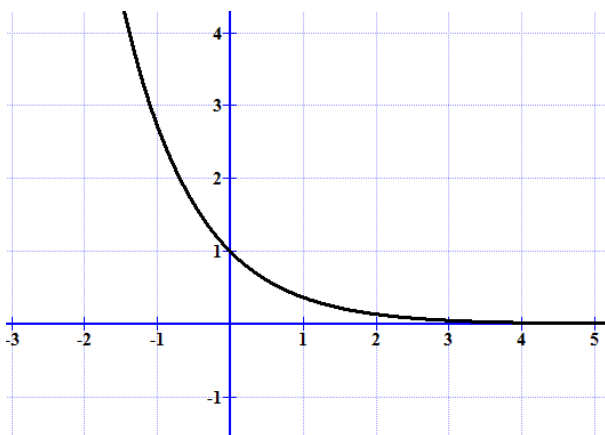
συνάρτηση είναι μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση

4. Να αναγνωρίσετε ποιες από τις συναρτήσεις $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $y = \ln x$, $y = \ln \frac{1}{x}$ παριστάνουν οι παρακάτω γραφικές παραστάσεις .(μ1,5)



.....

.....



.....

.....

5. Να βρείτε το χ :

a) $\log_{\chi} 32 = 5$

b) $\log_2 \chi = 3$

c) $\log_4 8 = \chi$

d) $e^{-\ln \chi} = 4$

e) $\ln e^{\chi} = 2$

f) $\log_{\frac{1}{2}} \chi = 5$

g) $3^{\log_{\chi} 5} = 5$

h) $\log_x [\log_3 81] = 1$

6. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

a) $32^x = 16^{1-x}$

b) $5^{2x+3} = 5$

c) $3^x = 5^{x+1}$

d) $9^x - 2 \cdot 3^{x+1} - 27 = 0$

e) $\log(3 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 4) = 0$

f) $\log(4^{x+1} + 2) = \log 9 + x \log 2$

g) $a^x \cdot a^{3x} \cdot a^{5x} \cdot \dots \cdot a^{31x} = a^{16}$

h) $\log_2 x + \log_x 16 = 5$

i) $\log x = \log_5 2x$

j) $\log(x-2) + \log(x-3) = 1 + \log 3$

k) $2^{x+5} + 3^x = 5 \cdot 2^x + 3^{x+2}$

l) $4^x - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$

m) $\log(5^x - 2 \cdot 3^x) + \log 27 = \log 71 + x \log 3$

n) $\log_5 7 \cdot \log 5 = 2 \log x$

o) $\log(3 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 4) = 0$

p) $\log_3 x = \log_9 (2x + 3)$

q) $\log(4^{x+1} + 1) = \log 5 + x \log 2$

r) $\log[\log(10^{x-1} + 2) + 1] = \log 2 + \log x$

7. Να δείξετε ότι $\log_x a$, $\log_{x^2} a$, $\log_{x^4} a$ είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π. και να βρείτε το Σ_{∞} .

8. Αν $3^{1+\sin x + \sin^2 x + \dots} = 9$ με $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, να βρείτε το x .

9. Αν το x είναι η μεγαλύτερη από τις ρίζες της εξίσωσης

$$\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$$

να βρείτε την τιμή της παράστασης $x + \log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x + \dots$

10. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

a) $\psi = \ln \frac{3x-1}{x+2}$

b) $\psi = \log_{x+1} (2-5x)$

11. Αν οι θετικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου να δείξετε ότι οι αριθμοί $\ln \alpha, \ln \beta, \ln \gamma$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και αντίστροφα.

12. Αριθμητικής προόδου ο πρώτος όρος είναι $\log \alpha$ και ο δεύτερος όρος είναι $\log \beta$. Να δείξετε

ότι το άθροισμα των n πρώτων όρων της είναι: $\Sigma_n = \frac{1}{2} \log \frac{\beta^{n(n-1)}}{\alpha^{n(n-3)}}$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha (\log x)^4 + 8(\log x)^2 \log(100x)$, $x > 0$ και $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Αν $f(10) = 25$, να αποδείξετε ότι $\alpha=1$.

β) Για την τιμή $\alpha=1$,

(i) να αποδείξετε ότι η $f(x)$ γράφεται στη μορφή $f(x) = (\log^2 x + 4 \log x)^2$

(ii) να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

14. Να αποδείξετε ότι

α. $\log_2 (\log_2 \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}) = \log_2 7 - 3$

β. $(0.2)^{\log_{\sqrt{5}} (\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots)} = 4$

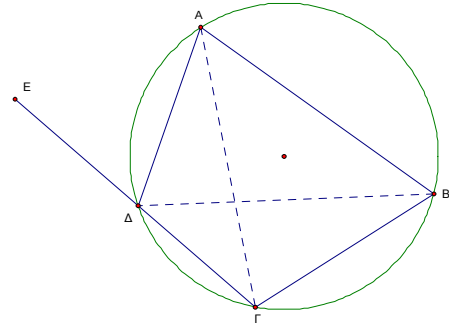
15. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i) $x + \log(1+2^x) \leq x \log 5 + \log 6$

ii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+x} < \frac{1}{4}$

**ΕΝΟΤΗΤΑ 9: ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ - ΕΓΓΡΑΪΜΑ -
ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ- ΠΕΡΙΓΡΑΪΜΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ-
ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ-ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ**

1. Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Φέρουμε δύο τέμνουσες ΓΑΔ και ΕΒΖ των κύκλων (Τα Γ και Ε είναι σημεία του ενός κύκλου και τα Δ και Ζ σημεία του άλλου κύκλου). Να δείξετε ότι $ΓΕ \parallel ΔΖ$. (Υπόδειξη: Να φέρετε την κοινή χορδή ΑΒ)



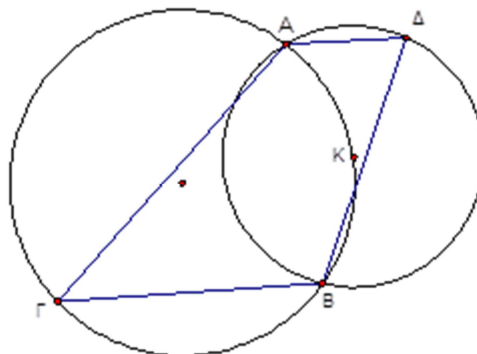
2. Στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι $AB=AG$ και Ε είναι τυχαίο σημείο πάνω στην προέκταση της ΓΔ. Να αποδείξετε ότι η ΑΔ είναι διχοτόμος της $\angle BAE$.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Ρ σημείο του ύψους ΑΔ του τριγώνου. Φέρουμε τις ΡΕ και ΡΖ κάθετες αντίστοιχα στις ΑΒ και ΑΓ (Ε και Ζ τα ίχνη των καθέτων στις ΑΒ και ΑΓ). Να αποδείξετε ότι:
(α) Το ΑΕΡΖ είναι εγγράψιμο (β) $\angle APZ = \angle G$ και (γ) το ΒΓΖΕ είναι εγγράψιμο.

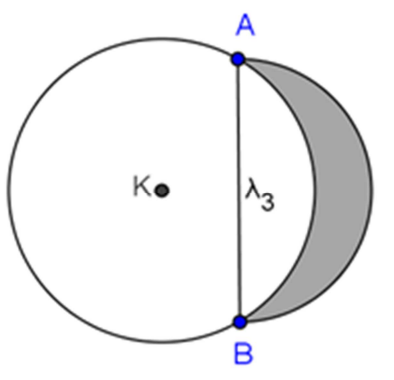
4. Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο Ε. Από σημείο Ζ της κοινής εσωτερικής εφαπτομένης τους φέρουμε δύο τέμνουσες ΖΑΒ και ΖΔΓ (Α, Β σημεία του ενός κύκλου και Δ, Γ σημεία του άλλου κύκλου). Να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

5. Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και τραπέζιο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σ' αυτόν ($AB \parallel ΓΔ$). Αν Ε είναι το σημείο τομής των μη παραλλήλων πλευρών του, να αποδείξετε ότι το ΑΟΓΕ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

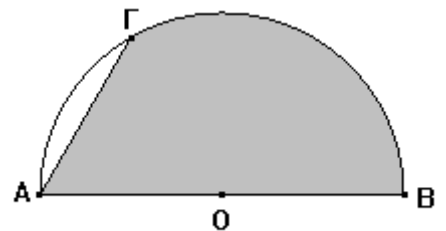
6. Στο πιο κάτω σχήμα οι δύο κύκλοι τέμνονται στα Α και Β και το κέντρο Κ του ενός κύκλου βρίσκεται πάνω στον άλλο. Αν Γ και Δ είναι τυχαία σημεία των δύο κύκλων, να αποδειχτεί ότι $2\angle A + \angle G = 180^\circ$.



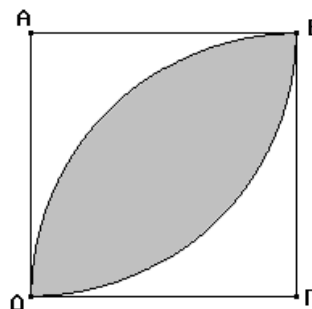
1. Δίνεται κύκλος με περίμετρο 6π cm. Ένας κυκλικός τομέας του έχει εμβαδόν $3\pi \text{ cm}^2$. Να βρείτε:
 - i. την ακτίνα του κύκλου.
 - ii. την γωνιά του κυκλικού τομέα .
 - iii. την περίμετρο του κυκλικού τομέα.
2. Σε κύκλο με κέντρο K και ακτίνα 6 cm, να φέρετε μία χορδή του $AB = \lambda_3$. Με διάμετρο την AB να γράφουμε ημικύκλιο έξω από τον κύκλο όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου σχήματος .



3. Δίνεται κύκλος (K,R) . Πάνω στην περιφέρεια παίρνουμε χορδές $AB = \lambda_3$ και $B\Gamma = \lambda_4$. Να υπολογίσετε , συναρτήσει του R , την περίμετρο και το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ABΓ. (Να κάνετε το σχήμα.)
4. Στο διπλανό σχήμα το ABΓ είναι ημικύκλιο με διάμετρο την AB . Αν η χορδή ΑΓ είναι ίση με λ_6 και η ακτίνα του ημικυκλίου είναι ίση με 6 cm να βρείτε το εμβαδόν και την περίμετρο του σκιασμένου μέρους του διπλανού σχήματος .



5. Στο πιο κάτω σχήμα το ABΓΔ είναι τετράγωνο με πλευρά 8 cm. Να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου σχήματος .



ΕΝΟΤΗΤΑ 10: ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. Με βάση τον ορισμό της παραγώγου να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

a) $f(x) = x^2 + 3x$

b) $\psi = \sqrt{x}$

2. Να βρείτε τις παραγώγους των πιο κάτω συναρτήσεων:

a) $\psi = 3t^2 + 6t - 1$

b) $\psi = (2e^x - 3)x^2$

c) $\psi = \frac{1-2x}{x^3+1}$

d) $\psi = \frac{1-\sin\theta}{1+\eta\mu\theta}$

e) $f(t) = t \cdot \varepsilon\phi t$

f) $\psi = \frac{\sigma\tau\epsilon\mu x}{1+\sigma\phi x}$

g) $\psi = x^2 \sigma\upsilon\nu 4x$

h) $\psi = \varepsilon\phi^4 5x$

i) $\psi = e^{\eta\mu^3 x}$

j) $\psi = \sqrt{2+\sigma\upsilon\nu 3x}$

k) $\psi = \ln \frac{1-\varepsilon\phi x}{\varepsilon\phi^2 x}$

l) $\psi = e^{2x} \ln(x^2 + 1)$

m) $x^2 - \psi^2 + x\psi = 3$

n) $\psi = x^{\ln x}$

o) $\psi = 2^{x^2+1}$

p) $\psi = 5^{\eta\mu^3 x}$

3. Αν $\psi = e^{-x} \cdot \sigma\upsilon\nu 2x$ να δείξετε ότι: $\frac{d^2\psi}{dx^2} + 2\frac{d\psi}{dx} + 5\psi = 0$.

4. Αν $\chi^2 + \psi^2 = 2\psi$ να δείξετε ότι: $\psi'' = \frac{1}{(1-\psi)^3}$.

5. Αν $\psi = \frac{1}{2}\epsilon\phi^2\chi + \ln(\sigma\upsilon\nu\chi)$ να δείξετε ότι: $\psi' = \epsilon\phi^3\chi$.

6. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $\chi^2 - 2\chi\psi - \psi^2 - \chi = 0$ στο σημείο της με τετμημένη $\chi = 1$ και $\psi < 0$.

7. Να βρείτε της εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης της καμπύλης:

a) $\chi^2 + \psi^2 = R^2$ στο σημείο $(1, 4)$

b) $\chi\psi = 2$ στο σημείο με $\chi = \frac{1}{2}$.

8. Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης: $\frac{\chi^2}{9} + \frac{\psi^2}{4} = 1$ στο σημείο

$A(3\sigma\upsilon\nu\theta, 2\eta\mu\theta)$ είναι η $2\sigma\upsilon\nu\theta \cdot \chi + 3\eta\mu\theta \cdot \psi = 6$.

9. Δίνεται η καμπύλη: $\psi = \chi \cdot e^{\chi^2}$:

a) Να βρείτε της εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο $\chi=0$.

b) Αν $\psi' - \psi^2 = e^{\chi^2} - 3\chi^2$ να δείξετε ότι: $\chi^2 = \ln 3$ ή $\chi = 0$.

10. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $\psi = \ln(1 - \sigma\upsilon\nu\chi)$. Να δείξετε ότι:

a) $\frac{d^2\psi}{d\chi^2} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\chi - 1}$

b) $\frac{d^2\psi}{d\chi^2} + e^{-\psi} = 0$.

11. Η εφαπτομένη της καμπύλης $\alpha x^2 + \beta x\psi^2 = \ln(x^2 - 3) + 1$ στο σημείο $A(2, -1)$ είναι παράλληλη με την ευθεία $x + \psi = 5$. Να βρείτε τα α και β .

12. Αν η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $\phi(\chi) = 5 - \alpha\chi +$ στο σημείο της $A(1, \gamma)$ είναι $41\chi - 2\psi - 45 = 0$, να βρείτε τα α, β, γ .

13. Η πλευρά a (σε cm) ενός τετραγώνου δίνεται συναρτήσει του χρόνου t (σε sec) από τη σχέση $a(t) = t^2 + 1, t > 0$.

ΓΕΝΙΚΗ

(α) Να αποδείξετε ότι τη χρονική στιγμή t το εμβαδόν $E(t)$ του τετραγώνου μεταβάλλεται με ρυθμό $E'(t) = 4t(t^2 + 1)$.

(β) Να βρείτε τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται το εμβαδόν του τετραγώνου τη στιγμή $t_0 = 1$ sec.

14.

Ένα σώμα κινείται πάνω σε άξονα και η θέση του τη χρονική στιγμή t (σε sec) δίνεται από τον τύπο $x(t) = t^3 - 9t^2 + 24t + 5$, με $t \in [0, 6]$. Να βρείτε:

- (α) τον ρυθμό μεταβολής της μετατόπισης του σώματος (την ταχύτητα) τη στιγμή $t_1 = 5$ sec
- (β) τον ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας του σώματος (την επιτάχυνση) τη στιγμή $t_2 = 4$ sec
- (γ) ποιες χρονικές στιγμές το σώμα είναι στιγμιαία ακίνητο

15

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας της καμπύλης με εξίσωση $y^2 - 6x^2 + 4y + 19 = 0$ στο σημείο της $A(2, 1)$.

16

Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση των παραμετρικών καμπυλών:

(α) $\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{t} \end{cases}, \quad t \in [0, +\infty)$

(β) $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - 2t \end{cases}, \quad t \in [0, 1]$

(γ) $\begin{cases} x = 3t \\ y = 9t^2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$

(δ) $\begin{cases} x = \tan^2 t - 1 \\ y = \tan t \end{cases}, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

(ε) $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t^2 + 7 \end{cases}, \quad t \in [-3, 10]$

17.

Παραμετρική καμπύλη ορίζεται από τις εξισώσεις:

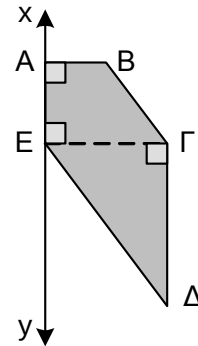
$$\begin{cases} x = t - \eta\mu t \\ y = 2 + \sigma\upsilon\nu t \end{cases}, \quad t \in [0, \pi]$$

(α) Να υπολογίσετε την τιμή της $\frac{dy}{dx}$ για $t = \frac{\pi}{3}$.

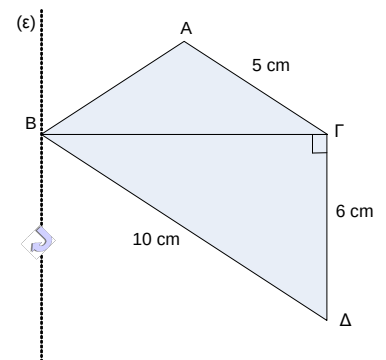
(β) Να βρείτε την παράγωγο $\frac{d^2y}{dx^2}$.

ΕΝΟΤΗΤΑ 11: ΣΤΕΡΕΑ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

1. Στο διπλανό σχήμα $AE=4\text{ cm}$, $B\Gamma=5\text{ cm}$, $\Gamma\Delta=8\text{ cm}$, $\Delta E=10\text{ cm}$, $\widehat{E\Gamma\Delta}=90^\circ$ και οι AB , $E\Gamma$ είναι κάθετες στον άξονα xy . Το σκιασμένο μέρος του σχήματος περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα xy . Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο του παραγόμενου στερεού.

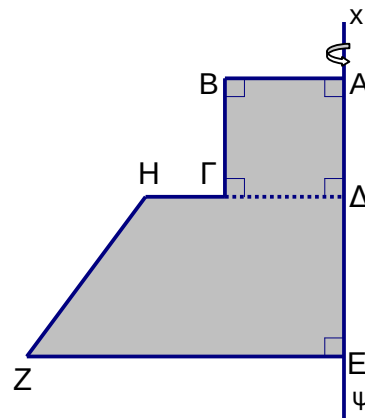


2. Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές τρίγωνο ($AB = A\Gamma = 5\text{ cm}$) και το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο ($\widehat{\Gamma} = 90^\circ$, $B\Delta = 10\text{ cm}$, $\Gamma\Delta = 6\text{ cm}$). Το σκιασμένο σχήμα $A\Gamma\Delta B$ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία (ϵ) η οποία περνά από το σημείο B και είναι παράλληλη με την ευθεία $\Gamma\Delta$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.



3. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο με πλευρά 3 cm και το τετράπλευρο ΔHZE

ορθογώνιο τραπέζιο ($\widehat{\Delta} = \widehat{E} = 90^\circ$), με $\Delta H=5\text{ cm}$, $EZ=8\text{ cm}$ και $HZ=5\text{ cm}$. Το σκιασμένο μέρος του σχήματος περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα $χψ$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται



4. Δίνεται κώνος με όγκο $V = 324\pi\text{ cm}^3$ και ακτίνα βάσης 9 cm . Να υπολογίσετε:
 (α) Το ύψος του κώνου ($υ$).
 (β) Το μήκος της γενέτειρας του (λ).
 (γ) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του ($E_{ολ}$).
5. Το εμβαδόν της βάσης κυλίνδρου είναι $25\pi\text{ m}^2$ και ο όγκος του $800\pi\text{ m}^3$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου.