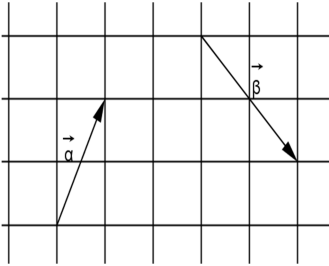


ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ (5-ΩΡΟ)

ΚΑΛΟ ΔΙΑΒΑΣΜΑ

- A. Διανύσματα
- B. Ευθεία
- C. Ρίζες Πραγματικών Αριθμών
- D. Κύκλος
- E. Τριγωνομετρία
- F. Συνάρτηση $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$
- G. Θεώρημα Θαλή - Ομοιότητα
- H. Ορίζουσες
- I. Στατιστική
- J. Γραμμικά Συστήματα

Α.Διανύσματα

- Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ και $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 2\kappa - 3\mu \\ \kappa + 3\mu \end{pmatrix}$ με $\kappa, \mu \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε:
 - Τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.
 - Το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$.
 - Να βρείτε τις τιμές των κ και μ έτσι ώστε τα διανύσματα $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ να είναι ίσα.
 - Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και το μέτρο του.
 - Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$, όπου $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$.
 - Αν $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.
- 
- Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}$. Να βρείτε την γωνία που σχηματίζουν τα 2 διανύσματα.
 - Εάν τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 3 \\ \kappa - 3 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} \kappa \\ -2 \end{pmatrix}$ είναι κάθετα να υπολογίσετε την τιμή του κ .
 - Δίνονται τα σημεία A(2,3), B(-1,4), και Γ(-2,7). Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ ώστε το τετράπλευρο ABΓΔ να είναι παραλληλόγραμμο.
 - Δίνονται τα σημεία A(2,4) και B(-3,8). Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ (το οποίο βρίσκεται στο AB) και ισχύει ΑΓ=3ΓΒ
 - Εάν τα σημεία A(-4,5), B(1,-3) και Γ(λ-3,1) είναι συνευθειακά, να βρείτε την τιμή του λ.
 - Αν $\vec{\alpha} = (2,3)$, $\vec{\beta} = (-1,1)$ και $\vec{\gamma} = (-2,3)$ να υπολογιστούν τα:
 - $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$, $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$, $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$
 - $|\vec{\alpha}|$, $|\vec{\beta}|$, $|\vec{\gamma}|$
 - $\vec{\beta} \cdot (2\vec{\alpha} - \vec{\gamma})$
 - $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$

10. Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση .

α) Για ποιιά τιμή του κ τα διανύσματα $\vec{u}(3,-2)$, $\vec{v}(\kappa,4)$ είναι παράλληλα;

- (1) $\kappa = -3$ (2) $\kappa = 6$ (3) $\kappa = -6$ (4) $\kappa = 3$

β) Δίνεται το διάνυσμα $\vec{u}(4,-3)$ που είναι κάθετο στο διάνυσμα:

- (1) $\vec{v}(-3,4)$ (2) $\vec{v}(6,8)$ (3) $\vec{v}(-6,8)$ (4) $\vec{v}(3,-4)$

γ) Αν $A(\kappa,-2)$, $B(1,\lambda)$ όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ και οι συντεταγμένες του $\vec{AB}$

είναι $\vec{AB}(3,5)$ τότε οι τιμές των κ και λ είναι :

- (1) $\begin{matrix} k = -2 \\ \lambda = 3 \end{matrix}$ (2) $\begin{matrix} k = 2 \\ \lambda = -7 \end{matrix}$ (3) $\begin{matrix} k = 4 \\ \lambda = 7 \end{matrix}$ (4) $\begin{matrix} k = -2 \\ \lambda = 7 \end{matrix}$

δ) Το μέτρο του διανύσματος $\vec{w}(2\sin 3\theta, 2\eta\mu 3\theta)$ είναι ίσο με

- (1) 3 (2) 4 (3) 6 (4) 2

11. Δίνονται $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

α) Να υπολογίσετε την παράσταση $(4\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} + 6\vec{\beta})$

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$

12. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2\lambda + \mu)\vec{i} + (-\lambda - 3\mu + 2)\vec{j}$ και $\vec{\beta} = (2\mu + 5)\vec{i} + (4\lambda + \mu - 4)\vec{j}$.

α) Για ποιες τιμές των λ και μ τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ίσα;

β) Για ποιες τιμές των λ και μ το $\vec{\beta}$ είναι μηδενικό διάνυσμα;

γ) Για ποιες τιμές των λ και μ το $\vec{\alpha}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα των $x'x$.

B. Ευθεία

1. Δίνονται τα σημεία $A(2,3)$ και $B(-1,4)$. Να βρείτε:

α) την κλίση της ευθείας AB

β) την εξίσωση της ευθείας AB

γ) την εξίσωση ευθείας που είναι κάθετη στην AB και περνά από το μέσο της

δ) την απόσταση του σημείου $\Gamma(1,1)$ από την ευθεία AB

ε) τη γωνία A του τριγώνου ABΓ

στ) το εμβαδό του τριγώνου ABΓ

2. Τρίγωνο ABΓ έχει εξίσωση ύψους ΒΔ: $4x - \psi + 4 = 0$ και εξίσωση διαμέσου ΒΜ: $2x - 3\psi + 2 = 0$.

Αν $A(-2,3)$ να βρείτε:

α) την εξίσωση της πλευράς ΑΓ

β) τις συντεταγμένες της κορυφής Γ

3. Τραπεζίο ABΓΔ (AB//ΓΔ) έχει κορυφές $B(2,3)$ και $\Gamma(4,-1)$ και εξίσωση της πλευράς ΑΔ

$x + 2\psi + 16 = 0$. Η πλευρά ΓΔ σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$.

α) Να βρείτε:

ι) την εξίσωση της ΓΔ

ιι) τις κορυφές Α και Δ

ιιι) το εμβαδό του τραπεζίου

β) Να δείξετε ότι το τραπέζιο είναι ισοσκελές.

4. α) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών (ϵ_1) : $3x+4\psi-11=0$ και (ϵ_2) : $2x-3\psi+4=0$.

β) Να βρείτε το μέσο του ευθύγραμμο τμήμα AB με $A(2, 3)$ και $B(4, -1)$.

γ) Να βρείτε το μήκος του AB.

δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το μέσο του AB και το σημείο τομής

των ευθειών (ϵ_1) και (ϵ_2) .

5. Δίνεται παραλληλόγραμμο $OABΓ$ όπου O η αρχή των αξόνων και $B(4,3)$. Η πλευρά $ΟΓ$ έχει εξίσωση $\psi = 3\chi$ και η πλευρά $BΓ$ είναι παράλληλη με τον άξονα $O\chi$. Να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες των κορυφών Γ και A

β) τις συντεταγμένες του σημείου Δ , που βρίσκεται στην προέκταση της πλευράς AB προς το

B , έτσι ώστε το εμβαδόν του τριγώνου $O\Delta\Delta$ να είναι διπλάσιο του εμβαδού του

παραλληλόγραμμου $OABΓ$.

6. Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$, με $A(-1, 4)$, $B(2, 3)$ και $\Gamma(-2, 5)$. Να βρείτε:

α) το εμβαδόν του τριγώνου $ABΓ$,

β) την απόσταση της κορυφής A από την ευθεία $BΓ$.

7. Αν $M(\alpha, \beta)$ τυχαίο σημείο του ορθοκανονικού συστήματος $xO\psi$ να αντιστοιχίσετε καθένα από τα σημεία της **Στήλης Α** με μία μόνο συμμετρία της **Στήλης Β**.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $A(\beta, \alpha)$	α. Συμμετρικό ως προς τον $x'x$
2. $B(-\alpha, -\beta)$	β. Συμμετρικό ως προς τον $\psi'\psi$
3. $\Gamma(\alpha, -\beta)$	γ. Συμμετρικό ως προς το $O(0,0)$
4. $\Delta(-\alpha, \beta)$	δ. Συμμετρικό ως προς την $\psi = x$ (*)

8. Δίνεται η ευθεία $(\epsilon): (\lambda + 1)\chi + 2\lambda\psi = 12$. Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ ώστε η (ϵ) :

a. να είναι παράλληλη με την ευθεία $5\chi - \psi = 15$.

b. να είναι κάθετη στην ευθεία $10\chi - 7\psi = 3$.

c. να σχηματίζει με τους άξονες $O\chi$ και $O\psi$ τρίγωνο εμβαδού 3τ.μ..

9. Τρίγωνο $\overset{\Delta}{A}B\Gamma$ έχει κορυφές τα σημεία $A(3, 5)$, $B(2, 3)$ και $\Gamma(5, -1)$.

a. Να αποδείξετε ότι η $A\Gamma$ έχει εξίσωση: $3\chi + \psi - 14 = 0$.

b. Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους $B\Delta$ του τριγώνου $\overset{\Delta}{A}B\Gamma$.

c. Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου AM του τριγώνου $\overset{\Delta}{A}B\Gamma$.

d. Να υπολογίσετε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι πλευρές $A\Gamma$ και AB .

C. ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ-ΔΙΑΤΑΞΗ

1. Να κάνετε τις πράξεις:

$$(α) \sqrt[3]{54} : \sqrt[3]{2} - (\sqrt[7]{1})^7 + \sqrt{18} \cdot \sqrt{2} =$$

$$(β) \sqrt[4]{\sqrt{90} - 3} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{90} + 3} =$$

$$(γ) 4 \cdot 125^{\frac{1}{3}} + 3 \cdot 16^{\frac{3}{4}} - \left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}} - 5 \cdot 49^{\frac{1}{2}} =$$

$$(δ) \frac{\sqrt{25} \cdot 8^{\frac{1}{3}} \cdot 81^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[6]{64}} =$$

$$(ε) \sqrt[5]{\alpha^2} \cdot \alpha^{\frac{3}{4}} \cdot \alpha^{\frac{1}{2}} = \quad \alpha \geq 0$$

$$(στ) \sqrt[5]{\chi^2} \div \sqrt[10]{\chi^3} = \quad \chi > 0$$

2. Να μετατρέψετε τα πιο κάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

$$α. \frac{5}{\sqrt{3}} \quad β. \frac{7}{3\sqrt{2}} \quad γ. \frac{2}{\sqrt{7}+1} \quad δ. \frac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{3}-1}$$

3. Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης $\chi^2 - 3\chi\psi + \psi^2$ για $\chi = 1 + \sqrt{3}$ και $\psi = 1 - \sqrt{3}$.

4. Ποιοι από τους πιο κάτω ισχυρισμούς είναι σωστοί και ποιοι λανθασμένοι ;
Σημειώστε με Σ ή Λ αντίστοιχα:

α)	$\sqrt[n]{\chi} + \sqrt[n]{\psi} = \sqrt[n]{\chi + \psi}$ όπου $\chi \geq 0, \psi \geq 0$	
β)	$\sqrt[n]{\chi} \cdot \sqrt[n]{\psi} = \sqrt[n]{\chi \cdot \psi}$ όπου $\chi \geq 0, \psi \geq 0$	
γ)	$(\sqrt[n]{\chi})^p = \chi^{\frac{p}{n}}, \quad \chi \geq 0, \quad p, n \text{ θετικοί ακέραιοι αριθμοί}$	
δ)	Αν $\chi^n = \alpha$ με $\alpha < 0$ και n περιττός τότε η εξίσωση είναι αδύνατη	

5. Να συγκρίνετε τις πιο κάτω ρίζες και να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

$$\alpha = \sqrt[4]{5}, \beta = \sqrt{2}, \gamma = \sqrt[8]{20}$$

6. Να αποδείξετε ότι $\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^2 = 16$

7. Να υπολογιστεί η παράσταση: $A = \frac{3}{\sqrt{8}-\sqrt{5}} + \sqrt{18} - \sqrt{125} + \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$

8. Να γραφτούν οι παρακάτω παραστάσεις με την μορφή ενός ριζικού:

a. $\sqrt{3^3\sqrt{3^4\sqrt{3}}}$

b. $\sqrt[5]{2\sqrt{2^3\sqrt{2}}}$

c. $\sqrt[4]{2^3\sqrt{2\sqrt{2}}}$

d. $\sqrt[3]{2^5\sqrt{2^4\sqrt{3\sqrt{2}}}}$

9. Να δειχθεί ότι οι αριθμοί $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}-1} + \frac{1}{\sqrt{3}+1}$ και $\beta = \sqrt[3]{3\sqrt{3}}$ είναι ίσοι.

10. Αν $1 \leq x \leq 4$ να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$A = \sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{16 - 8x + x^2}$$

11. Αν $1 \leq x \leq 4$ να αποδείξετε ότι $-1 \leq 2x - 3 \leq 5$.

12. Αν $x > 4$ να δείξετε ότι $x^2 + 3x - 28 > 0$.

13. Αν $\alpha > 3$ και $\beta < 2$ να δείξετε ότι $3\alpha - 2\beta > 5$.

14. Να δειχθεί ότι οι αριθμοί $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}-1} + \frac{1}{\sqrt{3}+1}$ και $\beta = \sqrt[3]{3\sqrt{3}}$ είναι ίσοι

15. Αν $A = 2x - 1$ και $B = 3\psi + 2$,

α) να λύσετε την εξίσωση $A^{\frac{3}{2}} + 3 = 30$, $x \geq \frac{1}{2}$

β) Αν $1 < A < 13$ και $8 < B < 17$,

i) να αποδείξετε ότι $1 < x < 7$ και $2 < \psi < 5$

ii) να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

$$x \cdot \psi, x - 2\psi \text{ και } \frac{x}{\psi}$$

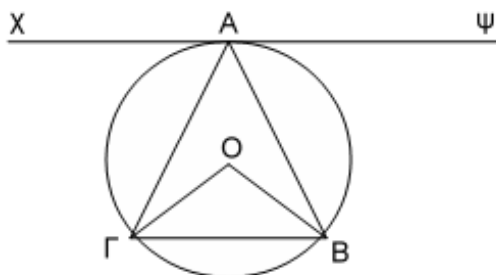
16. Να βρεθεί η τετραγωνική ρίζα του αριθμού $7 + 4\sqrt{3}$

D.ΚΥΚΛΟΣ

1. Τετράπλευρο ABΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο και είναι $\hat{A}B = 110^\circ$, $\hat{B}\Gamma = 60^\circ$, $\hat{\Gamma}\Delta = 100^\circ$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετράπλευρου καθώς και τις γωνίες των διαγωνίων του.
2. Από σημείο Σ εκτός κύκλου φέρουμε εφαπτομένη ΣΑ του κύκλου (Α σημείο επαφής) και την τέμνουσα ΣΓΒ (Γ, Β σημεία κύκλου). Αν $AB = SA$ να δείξετε ότι $\triangle A\Gamma\Sigma$ ισοσκελές.
3. Δίνεται κύκλος με διάμετρο AB και $\hat{B}\Gamma = 100^\circ$. Οι εφαπτομένες του κύκλου στα σημεία Α και Γ τέμνονται στο σημείο Ε. Αν Δ σημείο του μικρού τόξου ΒΓ να υπολογίσετε τη γωνιά $\hat{B}\Delta\Gamma$ και τις γωνίες των τριγώνων $\triangle AB\Gamma$ και $\triangle A\epsilon\Gamma$.

4.

Δεδομένα	Ζητούμενα
ΧΑΨ εφαπτομένη	α) γωνίες του
$\hat{B}\hat{A}\hat{\Psi} = 65^\circ$	$\triangle AB\Gamma$
$\hat{\Gamma}\hat{O}\hat{B} = 124^\circ$	β) $\hat{\Gamma}\hat{A}\hat{X}$
Ο κέντρο κύκλου	γ) $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$



7. Δίνεται κύκλος με ακτίνα $R = 4$. Από σημείο A που απέχει από το κέντρο $\delta = 6$ φέρνουμε τέμνουσα στο κύκλο στα B και Γ ώστε $AB = 3$. Να υπολογιστεί το μήκος της χορδής $B\Gamma$
8. Δίνεται κύκλος (O, R) με $R = 8\text{cm}$ και σημείο P που απέχει από το O , 12cm . Η τέμνουσα PA ορίζει στον κύκλο χορδή $AB = 2\text{cm}$. Πόσο είναι το μήκος του AP
9. Από εξωτερικό σημείο M κύκλου, φέρνουμε την εφαπτομένη MK και την τέμνουσα MBA . Αν $MA = 2MK$, να αποδείξετε ότι $AB = 3BM$.
10. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) στο οποίο φέρνουμε το ύψος AD . Αν τυχαία ευθεία διέρχεται από το Γ και τέμνει το ύψος στο M και τον κύκλο στο σημείο H , να αποδείξετε ότι $GM \cdot GH = GA^2$

Ε. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

1. Δίνεται ότι $\eta\mu\chi = -\frac{4}{5}$ και $\epsilon\phi\chi > 0$. Να υπολογίσετε όλους τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας χ .

2. Δίνεται ότι $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{9}{15}$ και $180^\circ < \theta < 270^\circ$.

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\frac{12\sigma\phi\theta - 15\eta\mu\theta}{18\epsilon\phi\theta}$.

3. Να αποδειχθούν οι ταυτότητες που ακολουθούν:

a. $\sigma\phi^2\chi - \sigma\upsilon\nu^2\chi = \sigma\phi^2\chi \cdot \sigma\upsilon\nu^2\chi$, $\sigma\upsilon\nu^2\chi \cdot (1 + \epsilon\phi^2\chi) + \eta\mu^2\chi \cdot (1 + \sigma\phi^2\chi) = 2$

b. $\eta\mu^2\chi = \frac{\epsilon\phi^2\chi}{1 + \epsilon\phi^2\chi}$

c. $\sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\phi\theta = \sigma\phi\theta(1 + \eta\mu\theta)$

d. $\frac{1}{1 + \eta\mu\chi} + \frac{1}{1 - \eta\mu\chi} = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}$

e. $1 - \frac{\sigma\upsilon\nu^2\chi}{1 + \eta\mu\chi} = \eta\mu\chi$

4. Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$\frac{\eta\mu 135^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 120^\circ + \sigma\upsilon\nu 135^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu(-120^\circ)}{\epsilon\phi(-120^\circ) + \epsilon\phi 135^\circ}$$

5. Να υπολογίσετε τη γωνία θ αν $0^\circ < \theta < 90^\circ$ και

$$\frac{\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \theta) \cdot \eta\mu(90^\circ + \theta) \cdot \eta\mu(90^\circ - \theta)}{\sigma\upsilon\nu(-\theta) \cdot \eta\mu(180^\circ - \theta) \cdot \epsilon\phi(90^\circ + \theta)} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

6. Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$\frac{\eta\mu(\pi - \omega) \cdot \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)}{\epsilon\phi(\pi + \omega) \cdot \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) \cdot \eta\mu(-\omega)}$$

7. Αν $\chi + \psi = 90^\circ$ να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \eta\mu^2\chi + \eta\mu^2\psi$

8. Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$\frac{-\eta\mu(180^\circ - \chi) \cdot \sigma\phi(180^\circ - \chi) \cdot \sigma\upsilon\nu\chi + \eta\mu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}$$

9. Αν $\chi = 1 + \eta\mu\theta$, $\psi = 1 - \sigma\upsilon\nu\theta$, $0^\circ < \theta < 90^\circ$ και $\chi^2 + \psi^2 = 3$ να δείξετε ότι $\theta = 45^\circ$.

10. Δίδεται η εξίσωση: $(\sigma\upsilon\nu\theta) \cdot \chi^2 - 2\chi + \sigma\upsilon\nu\theta = 0$, ($\sigma\upsilon\nu\theta \neq 0$), με ρίζες χ_1, χ_2 . Να δείξετε ότι:

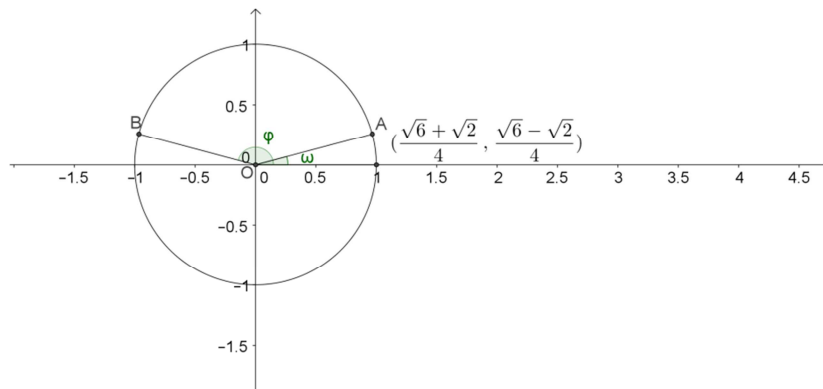
a. $\frac{2}{\chi_1} + \frac{2}{\chi_2} = 4\tau\epsilon\mu\theta$

b. $\chi_1^2 + \chi_2^2 = (1 + 2\epsilon\phi^2\theta)$

11. Αν ισχύει $\chi = 2\sigma\tau\epsilon\mu\theta$ και $\psi = 3\sigma\phi\theta$, να δείξετε ότι $9\chi^2 - 4\psi^2 = 36$

12. Να δείξετε ότι
$$\frac{\eta\mu(\pi + \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cdot \epsilon\phi(-\theta) \cdot \tau\epsilon\mu(90 + \theta)}{\sigma\upsilon\nu(270 - \theta) \cdot \sigma\phi(270 + \theta)} = -1$$

13. Χρησιμοποιώντας τον πιο κάτω τριγωνομετρικό κύκλο να υπολογίσετε το $\eta\mu\omega$, $\sigma\upsilon\nu\omega$ και $\epsilon\phi\omega$ (με ρητό παρονομαστή). Ακολουθώς αν $\phi = 180 - \omega$, και αφού βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου B να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς $\eta\mu\phi$, $\sigma\upsilon\nu\phi$ και $\sigma\phi\phi$ (με ρητό παρονομαστή).
(β.11)

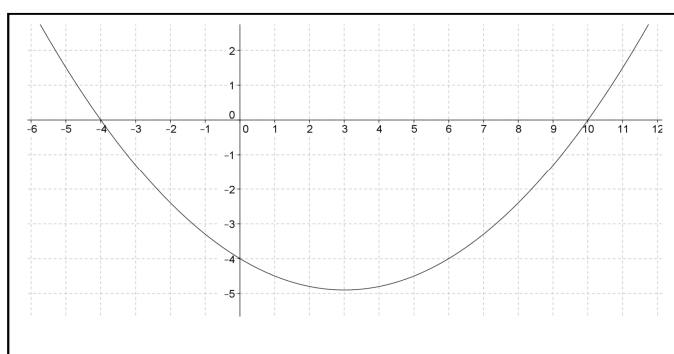


F. Η Συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + c$

Εξισώσεις β' βαθμού

Ανισώσεις βαθμού μεγαλύτερου ίσου του 2 και κλασματικές

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:
 - a) $2x^2 + 5x - 3 = 0$
 - b) $3x^2 - 4x + 1 = 0$
2. Στο σχήμα που ακολουθεί δίνεται η γραφική παράσταση (Γ.Π.) της συνάρτησης: $f(x) = ax^2 + bx + c$ όπου $a \neq 0$



Να βρείτε:

- a) το πρόσημο του a και τις τιμές $f(-2)$, $f(0)$, $f(3)$, $f(5)$
 - b) την τιμή του c (τεταγμένη επί της αρχής)
 - c) τις ρίζες, το S και το P της εξίσωσης: $ax^2 + bx + c = 0$
 - d) την τιμή του a και την τιμή του b
 - e) τον τύπο της συνάρτησης
 - f) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της Γ.Π. της f
 - g) τις συντεταγμένες της κορυφής της Γ.Π. της f
 - h) το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της συνάρτησης
 - i) τις τιμές $f(-3)$, $f(1)$, $f(6)$
 - j) τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) > 0$
 - k) τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) \leq 0$
3. Να βρείτε το είδος των ριζών των εξισώσεων:
 - a) $x^2 + 7 = 0$
 - b) $4x^2 + 4x + 1 = 0$
 - c) $3x^2 - 10x + 1 = 0$
 4. Αν x_1 και x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $4x^2 - 8x + 3 = 0$ τότε να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:
 - a) $x_1 + x_2$
 - b) $x_1 x_2$
 - c) $12x_1 x_2 - 4x_1 - 4x_2$

d) $\frac{1}{2x_1 - 1} + \frac{1}{2x_2 - 1}$

e) $x_1^2 + x_2^2$

5. Να βρείτε δύο αριθμούς x_1 και x_2 τέτοιου ώστε: $x_1 \geq x_2$ και $x_1 + x_2 = 5$ και $x_1 x_2 = 7$.

6. Να κατασκευάσετε εξίσωση β' βαθμού με ρίζες:

a) $x_1 = 3$ και $x_2 = -7$

b) $x_1 = \frac{1 - \sqrt{3}}{3}$ και $x_2 = \frac{1 + \sqrt{3}}{3}$

c) $x_1 = 3\alpha$ και $x_2 = -\alpha$

d) $x_1 = 2\alpha - \beta$ και $x_2 = \alpha + 2\beta$

7. Να βρείτε την τιμή ή τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση: $(\lambda + 1)x^2 + \lambda x + \lambda - 1 = 0$

- a) είναι πρώτου βαθμού ως προς x
- b) είναι δευτέρου βαθμού ως προς x
- c) έχει πραγματικές ρίζες
- d) δεν έχει πραγματικές ρίζες
- e) έχει ρίζες αντίθετες
- f) έχει ρίζες αντίστροφες
- g) το γινόμενο των ριζών είναι μεγαλύτερο του 2

8. Να κάνετε την γραφική παράσταση των συναρτήσεων

a) $f(x) = (x - 3)^2 - 16$

b) $f(x) = -x^2 + 2x + 8$

Να φαίνονται ευκρινώς τα σημεία τομής με τους 2 άξονες συντεταγμένων, ο άξονας συμμετρίας και το ακρότατο σημείο κάθε συνάρτησης.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (k - 6)x^2 - 3kx + 8$, $k \in \mathbb{R}$.

- a) Για ποια τιμή του πραγματικού k , η εξίσωση έχει μία μόνο λύση;
- b) Να δείξετε ότι για κάθε πραγματική τιμή του k η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο λύσεις άνισες.
- c) Να βρείτε την τιμή του k για την οποία η $f(x) = 0$:

i. Έχει αντίθετες ρίζες.

ii. Έχει αντίστροφες ρίζες.

- d) Αν $k = 1$ να βρείτε τις τιμές του για τις οποίες η γραφική παράσταση της f δεν βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

10. Να απλοποιήσετε την παράσταση: $\frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 3x - 2}$

11. Για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το πρόσημο των τριωνύμων

i) $x^2 - 2x - 15$

ii) $4x^2 - 4x + 1$

iii) $x^2 - 4x + 13$

12. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i) $x^2 - x - 2 > 0$ ii) $2x^2 - 3x - 5 < 0$ iii) $x^2 + 4 > 4x$ iv) $x^2 + 9 \leq 6x$

13. Να βρεθούν οι τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $2x - 1 < x^2 - 4 < 12$

14. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$, $a \neq 0$. Να βρείτε:

α. Το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της $f(x)$.

β. Το πρόσημο του a .

γ. Το πρόσημο της διακρίνουσας.

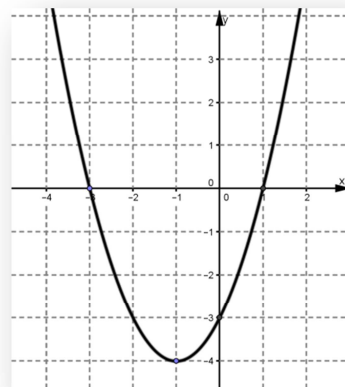
δ. Τις συντεταγμένες της κορυφής της.

ε. Τις λύσεις (ρίζες) της εξίσωσης $f(x) = 0$.

στ. Να βρείτε το πρόσημο της $f(-\frac{2}{3})$.

ζ. Τις τιμές των α, β και γ .

η. τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) \geq 0$.



15. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{x^2 - 6x - 40}{(1-x)^2} \leq 0$.

16. Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, $a \neq 0$, να αποδείξετε ότι $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{a}$ και $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{a}$.

17. (α) Να γράψετε την παράσταση $A = \frac{4x^2 - 2x}{2x^2 + x - 1}$ στην πιο απλή μορφή της.

(β) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{(x+1)^2 \cdot (x+2)}{x^2 - 5x + 6} \geq 0$.

18. Να λύσετε το σύστημα:

$$2x + \psi = 1$$

$$x^2 - 2x\psi - \psi^2 = 7$$

19. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{2x^2 - x - 1}$

20. Δίνεται η εξίσωση $(1 + \epsilon\phi^2\theta) \cdot x^2 - \epsilon\phi\theta \cdot x - 1 = 0$, $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, με ρίζες x_1, x_2 .

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες

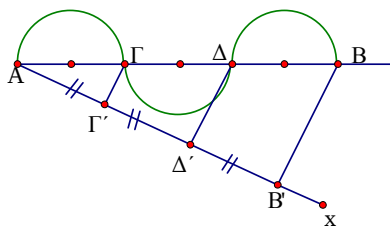
β) Να δείξετε ότι $x_1 + x_2 = \eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\upsilon\theta$

γ) Αν το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης είναι ίσο με $-\frac{1}{4}$, να βρείτε την τιμή της

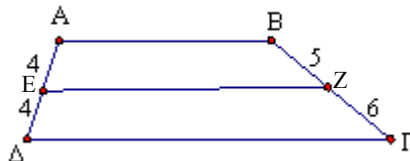
γωνίας θ .

G. ΘΕΩΡΗΜΑ ΘΑΛΗ – ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

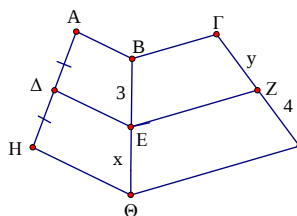
1. Αν $BB' \parallel \Gamma\Gamma' \parallel \Delta\Delta'$ και η διάμετρος $\Gamma\Delta$ του δεύτερου ημικυκλίου είναι 4cm, τότε να βρείτε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB .



2. Στο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος, η EZ είναι παράλληλη προς τις βάσεις του ;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

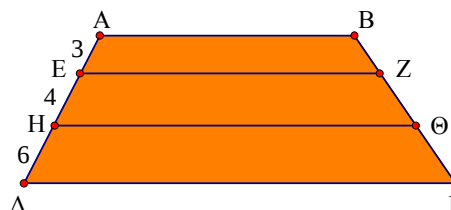


3. Στο διπλανό σχήμα είναι $AB \parallel \Delta E \parallel H\Theta$ και $B\Gamma \parallel EZ \parallel \Theta I$
Αν $A\Delta = \Delta H$, να υπολογίσετε τα x και y .



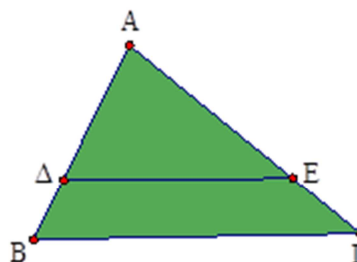
4. Αν $AB, EZ, H\Theta, \Delta\Gamma$ είναι παράλληλες, να συμπληρώσετε τις ισότητες

α) $\frac{BZ}{\Theta\Gamma} =$ β) $\frac{Z\Theta}{Z\Gamma} =$ γ) $\frac{B\Theta}{B\Gamma} =$



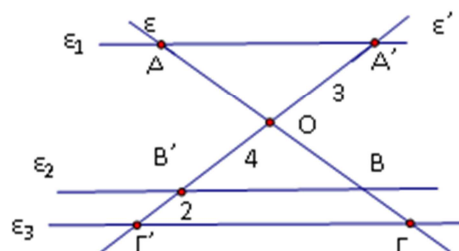
5. Αν $\Delta E \parallel B\Gamma$, να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

α) $\frac{\Delta B}{E\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$ β) $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{E\Gamma}{A\Gamma}$
γ) $\frac{AB}{A\Delta} = \frac{A\Gamma}{E\Gamma}$ δ) $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{A\Gamma}{A\Gamma}$



6. Στο διπλανό σήμα είναι $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2 \parallel \epsilon_3$.
Να υπολογίσετε τους λόγους

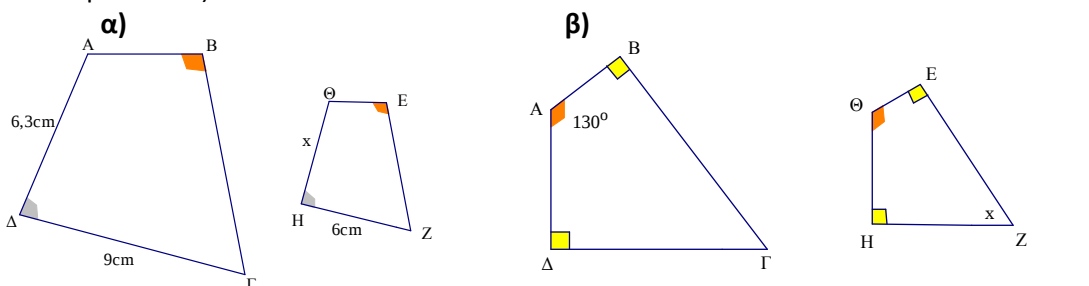
α) $\frac{OB}{B\Gamma}$ β) $\frac{B\Gamma}{O\Gamma}$ γ) $\frac{OA}{OB}$ δ) $\frac{AB}{B\Gamma}$



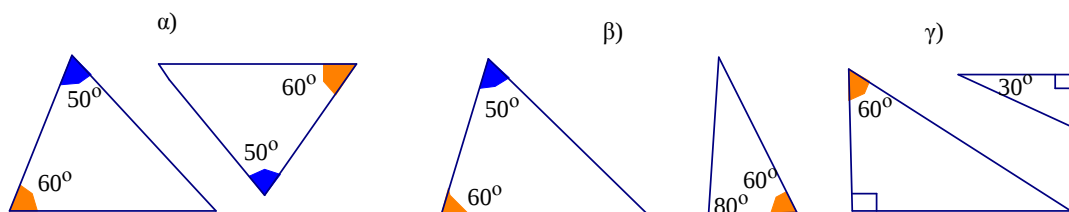
7. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες

- α) Δύο τετράγωνα είναι όμοια
- β) Δύο ορθογώνια είναι όμοια
- γ) Αν δύο πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες είναι όμοια
- δ) Δύο ρόμβοι είναι σχήματα όμοια
- ε) Αν δύο πολύγωνα είναι ίσα τότε είναι όμοια
- στ) Δύο κανονικά πολύγωνα είναι όμοια

8. Αν τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ είναι όμοια να βρείτε το x σε κάθε μία από τις περιπτώσεις.



9. Ποια από τα παρακάτω ζεύγη τριγώνων είναι όμοια;



10. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

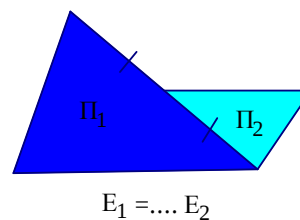
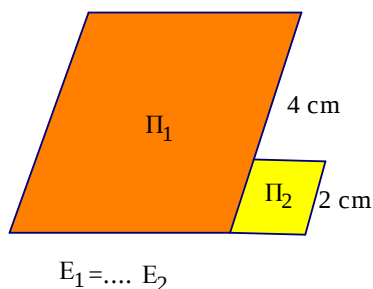
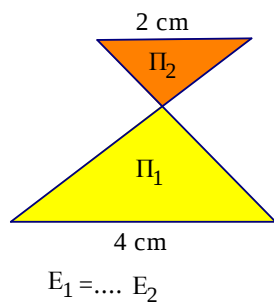
- α) Δύο ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια
- β) Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία οξεία γωνία ίση, είναι όμοια
- γ) Δύο όμοια τρίγωνα έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες
- δ) Δύο ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα είναι όμοια
- ε) Αν δύο ισοσκελή τρίγωνα έχουν μία γωνία 40° , είναι όμοια
- στ) Ο λόγος των περιμέτρων δύο ομοίων τριγώνων ισούται με τον λόγο ομοιότητας

11. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) και ΑΔ το ύψος του. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ είναι όμοια. Αν $ΔΒ = 4\text{cm}$ και $ΔΓ = 9\text{cm}$, να βρείτε το μήκος του τμήματος ΑΔ.

12. Στις κάθετες πλευρές $ΑΒ = 8\text{cm}$ και $ΑΓ = 12\text{cm}$ ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ να πάρετε αντιστοίχως τα σημεία Δ και Ε ώστε $ΑΔ = 2\text{cm}$ και $ΑΕ = 3\text{cm}$. Να αποδείξετε ότι

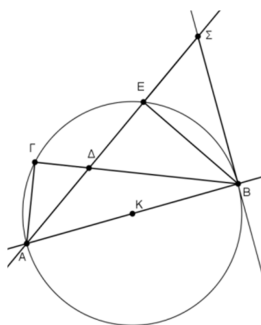
- α) $ΔΕ \parallel ΒΓ$
- β) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια

13. Αν τα πολύγωνα Π_1 και Π_2 είναι όμοια να συμπληρώσετε τη σχέση που συνδέει τα εμβαδά τους.



14. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με διάμετρο AB . Στο σημείο B φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου. Η διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$ τέμνει την $B\Gamma$ στο Δ , τον κύκλο στο E και την εφαπτομένη στο Σ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να δείξετε ότι ισχύουν οι πιο κάτω σχέσεις:

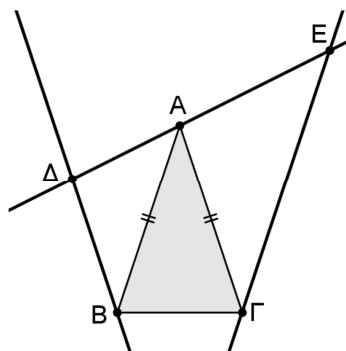
- α. $(A\Delta)(B\Sigma) = (\Gamma\Delta)(A\Sigma)$
 β. $(B\Sigma)(\Gamma\Delta) = (E\Sigma)(A\Delta)$



15. Δίνεται κύκλος με κέντρο K και ακτίνα R . Στην προέκταση της διαμέτρου AB (προς το μέρος του B) παίρνουμε σημείο Γ . Από το Γ φέρουμε την εφαπτομένη $\Gamma\Delta$ (Δ το σημείο επαφής) του κύκλου και την κάθετη ΓE στην $A\Gamma$ όπου E το σημείο τομής της κάθετης με την προέκταση της $A\Delta$. Να δείξετε ότι: α) $(A\Delta)(AE) = (AB)(A\Gamma)$ β) $(\Gamma\Delta)^2 = (A\Gamma)(\Gamma B)$
 γ) $(\Gamma A)^2 - (A\Delta)(AE) = (\Gamma\Delta)^2$

16. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και μια ευθεία ϵ που περνάει από το A και δεν τέμνει το τρίγωνο σε άλλο σημείο. Από το B φέρνουμε παράλληλη προς την $A\Gamma$ που τέμνει την ϵ στο Δ και από το Γ παράλληλη προς την AB που τέμνει την ϵ στο E .

Να δείξετε ότι: $(AB)^2 = (B\Delta) \cdot (\Gamma E)$.



Η.ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

1. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες:

$$\alpha) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix} \quad \beta) \begin{vmatrix} \eta\mu\chi & -\sigma\upsilon\nu\chi & 0 \\ \epsilon\phi\chi & \sigma\phi\chi & -1 \\ \sigma\upsilon\nu\chi & -\eta\mu\chi & 0 \end{vmatrix} \quad \gamma) \begin{vmatrix} x^3 & a^2+1 & 1 \\ a^3 & x^2+1 & 1 \\ 1 & x^2+a^2 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Αν $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{Z}$, να δείξετε ότι ο αριθμός $\begin{vmatrix} \kappa & 3 & 2 \\ \lambda & 7 & 6 \\ \mu & 8 & 8 \end{vmatrix}$ είναι πολλαπλάσιο του 8

3. Να λύσετε τις εξισώσεις

a) $\begin{vmatrix} x & 4 \\ 7 & x-3 \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} 5 & x & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ x+2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$

4. Αν $f(x) = \begin{vmatrix} \eta\mu\chi & 0 & 1 \\ 1 & \eta\mu\chi & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ να βρείτε την μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η $f(x)$

5. Να λύσετε την ανίσωση $\begin{vmatrix} x & 4 & x \\ 4 & x & 4 \\ x & 4 & 2 \end{vmatrix} > 0$

6. Να δείξετε ότι $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$

I. ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

1. Πιο κάτω παρουσιάζονται οι βαθμοί δυο μαθητών A και B σε πέντε διαγωνίσματα των Μαθηματικών $A: 12, 20, 19, 8, 15$ $B: 18, 16, 17, 14, x$
Αν ο μέσος όρος των βαθμολογιών των διαγωνισμάτων του B είναι κατά δύο μονάδες μεγαλύτερος από τον μέσο όρο βαθμολογιών των διαγωνισμάτων του A να υπολογίσετε την τιμή του x .
2. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τον αριθμό των ωρών που ένας μαθητής μελετούσε ημερησίως για τις εξετάσεις κατά τις τελευταίες 20 μέρες.

Αριθμός ωρών x_i	Αριθμός ημερών f_i
5	2
6	1
7	2
8	3
9	5
11	3
12	4

Να βρείτε:

- α) την επικρατούσα τιμή και τη διάμεσο των παρατηρήσεων,
 - β) τη μέση τιμή των ωρών της μελέτης του μαθητή,
 - γ) την τυπική απόκλιση (s), με προσέγγιση δύο δεκαδικών ψηφίων, των ωρών μελέτης του μαθητή.
 - δ) Τον συντελεστή μεταβολής του δείγματος
3. Ο μέσος όρος της ηλικίας 5 παιδιών είναι 9. Οι τρεις από αυτούς έχουν ηλικίες 8, 10 και 12. Να βρείτε τις ηλικίες των δύο άλλων αν ο ένας είναι κατά 1 χρόνο μεγαλύτερος του άλλου.
 4. Το μέσο βάρος 10 μαθητών, 6 κοριτσιών και 4 αγοριών είναι 54 κιλά. Το μέσο βάρος των κοριτσιών είναι 50 κιλά. Να βρεθεί το μέσο βάρος των αγοριών.
 5. Ο μέσος μισθός των 13 υπαλλήλων μιας εταιρίας είναι 750 ευρώ. Αν ένας υπάλληλος με μισθό 780 ευρώ αφυπηρέτησε και στη θέση του προσλήφθηκε νέος υπάλληλος με μισθό 520 ευρώ, ποιος ο νέος μέσος μισθός των υπαλλήλων;
 6. Σε ένα διαγώνισμα η μέση τιμή της βαθμολογίας για το τμήμα A' ήταν 16,5 και η τυπική απόκλιση 3,2. (α) Να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβλητότητας. (β) Να συγκρίνετε την ομοιογένεια των βαθμών του τμήματος A' με τους αντίστοιχους βαθμούς του τμήματος B' που είχε τον ίδιο μέσο όρο, αλλά η τυπική απόκλισή του ήταν 1,5.