

## Επαναληπτικές Ασκήσεις – Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου

### Ενότητα 1: Αλγεβρικές παραστάσεις – Ταυτότητες

1. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) 2\chi(\chi^2-3\chi+5) - 10\chi + 8\chi^2 =$$

$$\epsilon) (2\chi-5\psi)(3\chi+2\psi) =$$

$$\beta) (3\chi+2)^2 =$$

$$\sigma\tau) (6\chi^4\psi^3-9\chi^2\psi) \div 3\chi\psi =$$

$$\gamma) (\alpha\beta + \gamma)(\alpha\beta - \gamma) =$$

$$\zeta) (2\alpha^5\omega^2)(6\alpha^2\omega) =$$

$$\delta) (2\chi+5)(\chi-2) - 3\chi + 10 =$$

$$\eta) (-9\chi^2\psi) \div (+3\chi\psi) =$$

2. Να κάνετε τις διαιρέσεις :

$$\alpha) (15\chi^3-14\chi^2+7\chi+6) \div (5\chi+2)$$

$$\beta) (6\chi^3+5\chi^2+9\chi+4) \div (2\chi+1)$$

3. Να βρείτε τα αναπτύγματα των ταυτοτήτων:

$$\alpha) (2\chi+3)^2 =$$

$$\beta) (2\psi+1)^3 =$$

$$\gamma) (\chi-\psi)^3 =$$

$$\delta) (7\chi-2\psi)(7\chi+2\psi) =$$

$$\epsilon) (5\chi^2 - \frac{1}{2})(5\chi^2 + \frac{1}{2}) =$$

$$\sigma\tau) (\alpha^3-2\beta)(\alpha^3+2\beta) =$$

$$\zeta) (\chi\psi - \frac{1}{2})^2 =$$

$$\eta) (4\chi - 3\psi)^2 =$$

$$\theta) (3\alpha - 4)^2 =$$

$$\iota) (\chi - 7)^2 =$$

$$\kappa) (\psi+5)^2 =$$

$$\lambda) (5\chi + 1)(5\chi - 1) =$$

$$\mu) (3\chi^2-2)(3\chi^2+2) =$$

$$\nu) (3\chi+2\psi)(3\chi-2\psi)$$

4. Δίνονται τα πολυώνυμα  $A=2\chi^4-3\chi^2+5\chi-3$ ,  $B=\chi^3-2\chi^2+\chi+1$  και  $\Gamma=3\chi-1$   
Να βρείτε : α)  $A - B$  β)  $B \cdot \Gamma$  γ)  $B+2\Gamma$  δ)  $\Gamma^2$

5. Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$A = 2\chi^2 - \chi + 9$$

$$B = \chi - 3$$

και

$$\Gamma = \chi^3 + 2\chi$$

Να βρείτε:

$$\alpha) A + B - 3\Gamma =$$

$$\beta) B \cdot \Gamma =$$

6. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

$$\alpha) (a+x)^2 - (a-x)^2 + 4ax = 8ax$$

$$\beta) (\chi+\psi)^2 - (\chi-\psi)(\chi+\psi) = 2\psi(\chi+\psi)$$

$$\gamma) \left(\frac{\chi+\psi}{4}\right)^2 + \left(\frac{\chi-\psi}{4}\right)^2 = \frac{\chi^2+\psi^2}{8}$$

7. Αν  $\chi + \frac{1}{\chi} = 7$  να υπολογίσετε την αλγεβρική παράσταση  $\chi^2 + \frac{1}{\chi^2}$ .

8. Αν  $\chi + \psi = -6$  και  $\chi\psi = -27$  να υπολογίσετε τις αριθμητικές τιμές των παραστάσεων:

$$\alpha) A = \chi^2 + \psi^2$$

$$\beta) \chi^3 + \psi^3$$

**Ενότητα 2: Παραγοντοποίηση – Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις****1. Να αναλύσετε τα πολυώνυμα σε γινόμενο πρώτων παραγόντων:**

α)  $25\chi^2 - 9 =$

β)  $\chi^2 - 8\chi\psi + 16\psi^2 =$

γ)  $\chi^2 - 11\chi + 18 =$

δ)  $125 - 8\chi^3 =$

ε)  $2\chi^3 + 12\chi^2 + 18\chi =$

στ)  $\chi^2 + 6\chi + 9 =$

ζ)  $2\chi^2 + \chi\psi + 10\chi + 5\psi =$

η)  $\alpha\chi + 2\alpha\psi - 3\chi - 6\psi =$

ι)  $2\chi^2 - 2\chi\psi =$

κ)  $\chi^2 - 6\chi\psi + 9\psi^2 - 4\omega^2 =$

λ)  $\chi^2 - 9\psi^2 =$

μ)  $(\chi - 1)(\psi + 2)^2 - 9(\chi - 1) =$

ν)  $(\alpha + \beta)x + \alpha^2 + \alpha\beta + 2\alpha + 2\beta =$

ξ)  $(x^2 - 6x + 3)^2 - (x - 9)^2 =$

ο)  $(\omega^3 - 1) - 2(\omega^2 - 1) - (\omega - 1)^2 =$

π)  $\alpha^3\chi^3 - \beta^3\chi^3 + \alpha^3 - \beta^3 =$

**2. Να κάνετε τις πράξεις:**

α)  $\frac{3\chi}{\psi - \chi} + \frac{2\psi}{\psi + \chi} - \frac{\chi^2 - 3\chi\psi}{\psi^2 - \chi^2} =$

ζ)  $\frac{\alpha}{a - 2\beta} - \frac{2\beta}{a + 2\beta} - \frac{4a\beta}{a^2 - 4\beta^2} =$

β)  $\frac{\chi^3 - 4\chi}{\chi^2 - 5\chi + 6} \div \frac{\chi}{\chi - 3} =$

η)  $\left(\frac{2}{\chi + 2} - \frac{2}{\chi - 2}\right) \div \frac{\chi^2 + 3\chi}{\chi^2 + 5\chi + 6} =$

γ)  $\frac{\chi^2 - 3\chi - 10}{\chi^2 - 25} \cdot \frac{\chi^2 + 6\chi + 5}{\chi^2 + 2\chi} =$

θ)  $\frac{\alpha}{\alpha + 1} - \frac{\alpha}{\alpha - 1} - \frac{2}{\alpha^2 - 1} =$

δ)  $\frac{4}{\chi^2 - 4} - \frac{2}{\chi^2 + 2\chi} + \frac{1}{\chi - 2} =$

ι)  $\frac{\chi^2 - 4}{\chi - 3} \cdot \frac{\chi^2 + \chi}{\chi^2 - \chi - 6} \div \frac{\chi - 2}{\chi^2 - 6\chi + 9} =$

ε)  $\left[\frac{x+1}{(x-2)^2} \cdot \frac{1}{(x+1)^2}\right] \div \frac{2}{(x-2)} =$

κ)  $\frac{1}{x^2 + 6x + 9} - \left(\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x^2 - 9}\right) =$

στ)  $\left[\frac{\psi}{\psi^2 - 4} - \frac{\psi - 2}{\psi^2 + 2\psi}\right] : \frac{\psi^3 - \psi^2}{\psi^2 - 3\psi + 2} =$

λ)  $\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta} - \alpha\right) \cdot \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^3 + \beta^3} : \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right) =$

**3. Να γίνουν τα κλάσματα απλά :**

α)  $\frac{2\chi^2\psi^3\omega}{4\chi^5\psi\omega} =$

β)  $\frac{\chi^2\psi^2 - 16}{2\chi\psi + 8} =$

γ)  $\frac{\frac{1}{\psi} - \frac{1}{\chi}}{\frac{\chi - \psi}{3\chi}} =$

$$\delta) \frac{\chi-1}{\chi^3-\chi} = \quad \epsilon) \frac{\alpha\chi-\beta\psi+\alpha\psi-\beta\chi}{\chi^2-\psi^2} = \quad \sigma\tau) \frac{\frac{\chi}{\psi}-1}{\frac{\chi^2}{\psi}-\psi} = \quad \zeta) \frac{\frac{\chi^2+\psi^2}{\chi\cdot\psi}+2}{\frac{1}{\psi^2}-\frac{1}{\chi^2}} =$$

**4. Να λύσετε τις εξισώσεις :**

α)  $\chi^2-3\chi=0$

γ)  $\chi^3-16\chi=0$

ε)  $\frac{1}{x+2} + \frac{6x+1}{x^2-x-6} = \frac{2}{5x-15}$

ζ)  $\frac{2\chi}{\chi+2} + \frac{\chi+2}{2\chi} = 2$

θ)  $\frac{2}{y+2} - \frac{10}{y^2-4} = \frac{1}{2-y}$

β)  $\chi^2-5\chi+6=0$

δ)  $\frac{2}{\chi-3} - \frac{\chi-4}{\chi^2-9} = \frac{\chi+1}{\chi^2+3\chi}$

στ)  $\frac{\chi-4}{9-\chi^2} + \frac{2}{\chi-3} = \frac{\chi+1}{\chi^2+3\chi}$

η)  $\frac{\chi-2}{\chi} + \frac{4}{\chi-2} = \frac{8}{\chi^2-2\chi}$

ι)  $\frac{2\chi}{\chi-1} - 4 = \frac{3}{\chi^2-3\chi+2} + \frac{\chi+1}{2-\chi}$

**Ενότητα 3: Γεωμετρία Ι (Ισα τρίγωνα)**

- Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ. Αν Δ είναι το μέσο της ΑΒ και Ε το μέσο της ΑΓ και Ζ το μέσο της ΒΓ, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισοσκελές.
- Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και ΑΔ ύψος του. Προεκτείνουμε το ύψος προς το μέρος του Δ και παίρνουμε τμήμα ΔΕ=ΑΔ. Να δείξετε ότι ΑΒ=ΓΕ.
- Δίνεται τυχόν τρίγωνο ΑΒΓ. Στις πλευρές ΑΓ και ΒΓ παίρνουμε τμήματα ΓΔ και ΓΕ αντίστοιχα, έτσι ώστε ΓΔ=ΓΕ. Αν Ζ τυχόν σημείο της διχοτόμου ΓΗ να δείξετε ότι:
  - ΖΔ=ΓΕ
  - οι αποστάσεις του Ζ από τις πλευρές ΑΓ και ΒΓ είναι ίσες.
- Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Τα Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι  $E\overset{\Delta}{B}\Gamma = \Delta\overset{\Delta}{G}B$ .
- Στη βάση ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ(ΑΒ=ΑΓ) να πάρετε δύο σημεία Δ και Ε έτσι ώστε ΒΔ=ΕΓ. Να δείξετε ότι
  - ΑΔ = ΑΕ
  - οι αποστάσεις των σημείων Δ και Ε από τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα είναι ίσες.
- Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ(ΑΒ=ΑΓ). Προεκτείνετε τις πλευρές ΒΑ και ΓΑ προς το μέρος του Α κατά τμήματα ΑΕ και ΑΖ αντίστοιχα, ώστε ΑΕ=ΑΖ.
  - Αν Κ είναι το μέσο της ΒΓ να φέρετε τα ΕΚ και ΖΚ και να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΖΚΓ και ΕΚΒ είναι ίσα.
  - Να δείξετε ότι το Κ απέχει ίσο από τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ.
- Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Προεκτείνουμε τη βάση ΒΓ προς το Β και προς το Γ και παίρνουμε τμήματα ΒΔ = ΓΕ. Αν Ζ είναι το μέσο της ΑΒ και Η το μέσο της ΑΓ, να δείξετε ότι ΔΖ=ΗΕ.

8. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ),  $\Delta$  το μέσο της  $AB$  και  $E$  το μέσο της  $A\Gamma$ . Από τα  $\Delta$  και  $E$  φέρουμε κάθετες  $\Delta Z$  και  $EH$  στη  $B\Gamma$ . Να δείξετε ότι:  
 α)  $\Delta Z = EH$  και  
 β) ότι  $AZH$  είναι ισοσκελές τρίγωνο.
9. Δίνεται τυχόν τρίγωνο  $AB\Gamma$  και  $B\Delta$  διάμεσος. Να δείξετε ότι οι κορυφές  $A$  και  $\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  απέχουν ίσο από τη διάμεσο  $B\Delta$ .
10. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ). Φέρουμε την διχοτόμο  $AX$  της εξωτερικής γωνίας  $A$  του τριγώνου. Από το  $B$  φέρουμε ευθεία κάθετη στην  $AX$  η οποία τέμνει την  $AX$  στο  $\Delta$  και την προέκταση της  $\Gamma A$  στο  $E$ . Να δείξετε ότι  $AE = A\Gamma$ .

#### Ενότητα 4: Ευθεία – Γραμμικά Συστήματα

1. Να λύσετε τα συστήματα :

$$\begin{aligned} \alpha) \quad & 3\chi + 4\psi = 7 \\ & 2\chi - \psi = 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma) \quad & 2\chi + \psi = 8 \\ & \frac{2\chi}{3} - \frac{3\psi}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

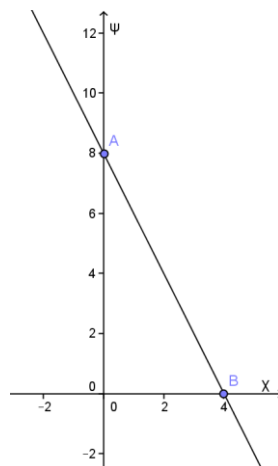
$$\begin{aligned} \beta) \quad & 2\chi - 4\psi = -10 \\ & 3(\chi + 2) + 5(\psi - 7) = -22 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta) \quad & \frac{2\chi + \psi}{7} = 1 \\ & \frac{\chi - 3\psi}{7} = -1 \end{aligned}$$

2. Δίνεται η ευθεία  $\psi = \alpha\chi + 5$ . Να υπολογιστεί το  $\alpha$  ώστε η ευθεία να περνά από το σημείο  $A(4,17)$ .
3. Η ευθεία  $\psi = (\alpha - \beta)\chi + \beta$  είναι παράλληλη με την ευθεία  $\psi = 3\chi + 2$  και περνά από το σημείο  $A(1,5)$ . Να υπολογίσετε τα  $\alpha$  και  $\beta$ .
4. Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$ , ώστε οι ευθείες  $\epsilon_1: (\alpha + 1)\chi - 8\psi = 10$  και  $\epsilon_2: 3\chi + 2\beta\psi = 5$  να είναι παράλληλες.
5. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της ευθείας  $\psi = 2\chi - 4$ . Να βρείτε τα σημεία  $A$  και  $B$  στα οποία η ευθεία τέμνει τους άξονες και στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου  $OAB$  ( $O$  η αρχή των αξόνων).
6. Η γραφική παράσταση της  $\psi = 2\chi + \beta$  περνά από το σημείο  $A(-1,1)$ . Να βρείτε το  $\beta$  και να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.
7. Δίνεται η εξίσωση της ευθείας  $3\chi - 4\psi = -2$   
 α) Να βρείτε την κλίση της  
 β) Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη με αυτή και περνά από την αρχή των αξόνων.
8. Η ευθεία  $\epsilon_1: \psi = (\lambda + 1)\chi + 5\kappa$  περνά από το σημείο  $A(-1,2)$  και είναι παράλληλη με την ευθεία  $\epsilon_2: \psi = 3\chi - 6$ .  
 α) να βρείτε τα  $\lambda$  και  $\kappa$ .  
 β) να βρείτε το σημείο τομής της  $\epsilon_1$  με τον άξονα  $\Psi'\Psi$ .
9. Για ποια τιμή του  $\lambda$  οι ευθείες  $\epsilon_1: (\lambda - 2)\chi - 3\psi = 2$  και  $\epsilon_2: \chi - 2\psi = 5$  είναι παράλληλες.

10. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλη με την ευθεία  $3\chi+4\psi=1$ .
11. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο  $A(4, -1)$  και είναι παράλληλη με την ευθεία  $\chi-2\psi=4$ .
12. α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από τα σημεία  $A(2,5)$  και  $B(-1,4)$ .  
β) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας.
13. α) Να βρείτε ποια από τα σημεία  $A(2, -8)$ ,  $B(1,5)$ ,  $\Gamma(-1,3)$  ανήκουν στην ευθεία  $\psi=3\chi+2$ .  
β) Να εξετάσετε αν οι ευθείες  $\epsilon_1: 2\chi-\psi=3$  και  $\epsilon_2: 4\chi-2\psi=5$  είναι παράλληλες.
14. Αν οι ευθείες  $\epsilon_1: \psi = (-5\kappa + 7)\chi + 3$  και  $\epsilon_2: \psi = 2\kappa\chi - 1$  είναι παράλληλες να βρείτε:  
α) Το  $\kappa$   
β) Την κλίση της ευθείας  $\epsilon_1$   
γ) Τα σημεία τομής της  $\epsilon_1$  με τους άξονες  $\chi'\chi$  και  $\psi'\psi$   
δ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της ευθείας  $\epsilon_1$ .
15. Η ευθεία  $\psi = \alpha\chi + \beta$  είναι παράλληλη με την  $5\psi - 4\chi = 2$  και περνά από το σημείο  $(-1,2)$ .  
Να βρείτε τις παραμέτρους  $\alpha$  και  $\beta$  και την εξίσωση της ευθείας.
16. Αν η ευθεία  $\psi = (\alpha+5)\chi + \beta$  είναι παράλληλη με την  $\psi = \chi - 3$  και περνά από την αρχή των αξόνων, να βρείτε τα  $\alpha$  και  $\beta$ .
17. Να βρείτε την τιμή του  $\kappa$  ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  
 $\psi = (\frac{3\kappa-2}{2})\chi + 4$  και  $\psi = (\frac{\kappa-14}{4})\chi - 2$  είναι ευθείες παράλληλες.
18. Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου  $\beta$  έτσι ώστε η ευθεία  $\psi = (\beta-1)\chi - 8$  να είναι κάθετη στην ευθεία  $\chi + 3\psi = 1$ .
19. Αν  $A(-2, 6)$ ,  $B(-3, 2)$  και  $\Gamma(5, 0)$  να αποδείξετε ότι οι ευθείες  $AB$  και  $B\Gamma$  είναι κάθετες.

20. Να βρείτε την εξίσωση ευθείας  $\epsilon$ .



21. Να βρείτε την τιμή του  $\kappa$  ώστε η ευθεία  $\psi = (\kappa-3)\chi + 6$  να είναι παράλληλη στην ευθεία  $2\psi + (2\kappa+3)\chi = 5$ .
22. Να βρείτε την τιμή του  $\lambda$  ώστε οι ευθείες  $2\psi - (\lambda-3)\chi = 1$  και  $3\psi + 4\chi = 5$  να είναι κάθετες

### Ενότητα 5: Συναρτήσεις – Παραβολή – Επίλυση εξίσωσης β' βαθμού

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των πιο κάτω συναρτήσεων:

α)  $f(x) = 4x - 2$

β)  $g(x) = 3x^3 - 1$

γ)  $h(x) = \sqrt{7 - x}$

δ)  $c(x) = \frac{3}{2 - x}$

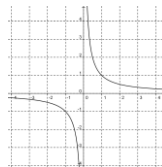
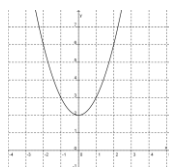
ε)  $d(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-5}}$

στ)  $p(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$

2. Να βρείτε το Π.Ο. και το Π.Τ. της κάθε μιας από τις πιο κάτω συναρτήσεις.

α)

β)



3. Να βρείτε το πεδίο τιμών των πιο κάτω συναρτήσεων:

α)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = -x + 1$

β)  $g: [-3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $g(x) = 2x + 1$

γ)  $h(x) = -2x + 2, x \in \{-2, 0, 1, 3, -1\}$

4. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Από τη γραφική παράσταση να βρείτε:

α) i)  $f(-3)$  ii)  $f(0)$  iii)  $f(2)$

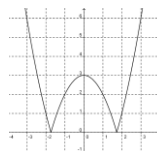
β) τις τιμές του  $x$  αν

i)  $f(x) = 1$  ii)  $f(x) = 3$  iii)  $f(x) = 6$

γ) το Π.Ο. και Π.Τ. της συνάρτησης

δ) τα σημεία τομής της  $f$  με τους άξονες

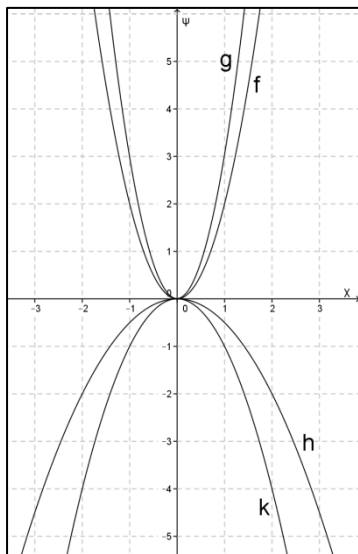
ε) τις τιμές του  $x$  για τις οποίες η γραφική παράσταση της  $f$  βρίσκεται πάνω από τον άξονα των  $x$ .



5. Να βρείτε τις πιθανές τιμές του  $k$ , ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = (4 - 2k)x^2$  να είναι παραβολή που να παρουσιάζει ελάχιστο.

6. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής  $f(x) = ax^2$ , αν το σημείο  $A(3, -9)$  ανήκει στην  $f(x)$  και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

7. Να αντιστοιχίσετε τη γραφική παράσταση της κάθε παραβολής με την εξίσωσή της.



- α)  $\psi = -\chi^2$   
 β)  $\psi = -\chi^2 + 1$   
 γ)  $\psi = -0,5\chi^2$   
 δ)  $\psi = 3\chi^2$   
 ε)  $\psi = 2\chi^2$

|   |  |
|---|--|
| f |  |
| g |  |
| h |  |
| k |  |

8. Να χαρακτηρίσετε τις πιο κάτω προτάσεις Σωστές ή Λανθασμένες:

- α) Το -1 είναι ρίζα της εξίσωσης  $-3\chi^2 - 5\chi + 8 = 0$ .  
 β) Η εξίσωση  $(2\chi + 1)(\chi - 3) = 5\chi(\chi - 1)$  είναι δευτέρου βαθμού.

9. Να αντιστοιχήσετε κάθε εξίσωση της στήλης Α με τις λύσεις της στη στήλη Β.

| Εξίσωση                                      | Λύσεις                                            |
|----------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| α) $\chi^2 - 2\chi - 15 = 0$                 | i) 0, -1                                          |
| β) $\chi^2 = 6\chi + 16$                     | ii) $-\frac{1}{2}, 7$                             |
| γ) $\chi^3 = \chi^2$                         | iii) 3, -3                                        |
| δ) $9 - \chi^2 = 0$                          | iv) 5, -3                                         |
| ε) $\frac{\chi+1}{\chi} = \frac{2\chi-6}{7}$ | v) 0, 1                                           |
|                                              | vi) 8, -2                                         |
|                                              | vii) -5, 3                                        |
|                                              | viii) Δεν έχει λύσεις στους πραγματικούς αριθμούς |

(α) → .....  
 (β) → .....  
 (γ) → .....  
 (δ) → .....  
 (ε) → .....

10. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α)  $\chi^2 - 8\chi - 9 = 0$

β)  $2\chi^2 + \chi - 6 = 0$

γ)  $\chi(\chi - 5) + 6 = 0$

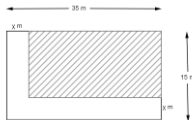
δ)  $\chi^2 - 20 = -2\chi^2 + 7$

ε)  $(\chi + 1)(\chi^2 - 4\chi + 3) = 0$

στ)  $2\chi(\chi - 3) - 5(\chi^2 + 2) = \chi(1 - \chi)(1 + \chi) - 10$

ζ)  $\frac{3\chi-1}{\chi+3} + \frac{2\chi-3}{4-\chi} = \frac{-7-7\chi}{\chi^2-\chi-12}$

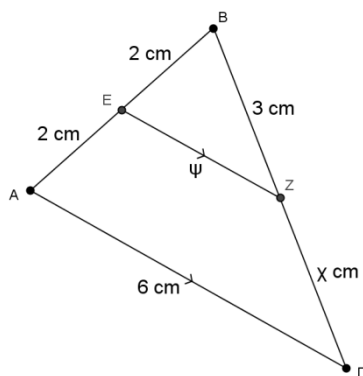
11. Από ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις 15 m και 35 m αποκόπτονται δύο λωρίδες ίσου πλάτους (όπως φαίνεται στο σχήμα), με σκοπό να γίνει διαπλάτυνση του υπάρχοντος δρόμου. Αν η τελική επιφάνεια του οικοπέδου (γραμμοσκιασμένη) είναι  $300 \text{ m}^2$ , να υπολογίσετε το πλάτος της κάθε λωρίδας.



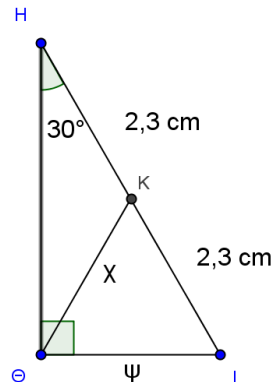
### Ενότητα 6: Γεωμετρία II (Παραλληλόγραμμα και Τραπεζίο – Ειδικά Θεωρήματα τριγώνων)

1. Να βρείτε τα  $\chi$  και  $\psi$  στα πιο κάτω σχήματα και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α)



β)



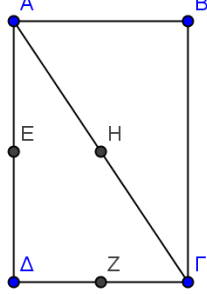
2.

|  |                                                                                                                                                                                                                                                       |
|--|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | <p>Το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο (<math>\hat{A}=90^\circ</math>).</p> <p><math>\hat{B} = 30^\circ</math> και η υποτείνουσα BΓ=8cm.</p> <p>Αν AM διάμεσος της BΓ να υπολογίσετε :</p> <p>α) τη γωνία <math>\phi</math></p> <p>β) το μήκος της AΓ.</p> |
|--|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

3. Δίνεται το παραλληλόγραμμο ABΓΔ. Από το A φέρνουμε την AE κάθετη στη BΔ και από το Γ τη ΓΖ κάθετη στη BΔ. Να δείξετε ότι :
- α) Τα τρίγωνα AΕΔ και ΓΖΒ είναι ίσα.
- β) Το AZΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.
4. Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ με  $\hat{A}=90^\circ$ . Στην πλευρά AB παίρνουμε ένα σημείο E και φέρνουμε την EZ κάθετη προς τη BΓ. Στην πλευρά ΓΔ παίρνουμε τμήμα ΓΗ=AE και φέρνουμε την ΗΘ κάθετη προς την ΑΔ. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο EZΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.

5. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Επί των πλευρών ΑΔ και ΒΓ παίρνουμε τμήματα ΔΕ και ΒΖ ώστε ΔΕ=ΒΖ . Να δείξετε ότι ΑΖ=ΓΕ .

6.

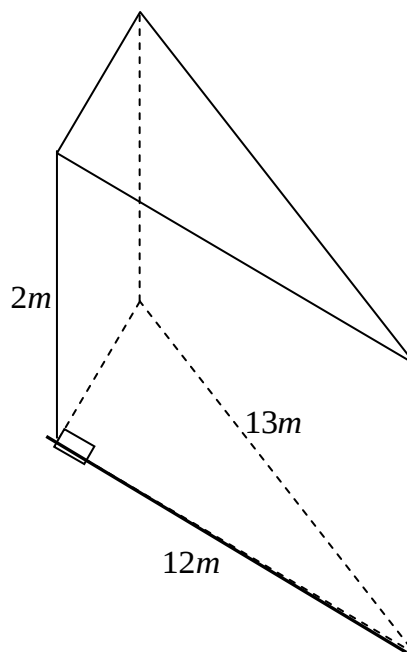
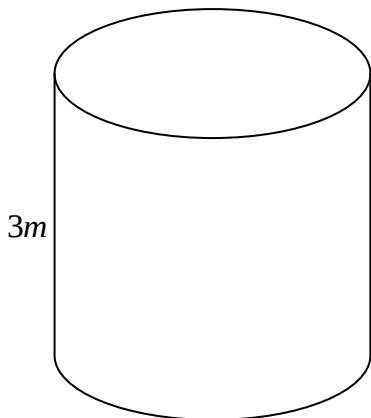
|                                                                                   | Δεδ.                                                                     | Ζητ.                  |
|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
|  | <p>ΑΒΓΔ ορθογ.<br/>Ε, Ζ, Η μέσα των<br/>ΑΔ, ΔΓ και ΑΓ<br/>αντίστοιχα</p> | <p>ΕΗΖΔ ορθογώνιο</p> |

7. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε την ΑΔ κατά τμήμα ΔΗ=ΑΔ. Η διχοτόμος της γωνίας Α τέμνει τη ΓΔ στο σημείο Ζ. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΖΑΗ είναι ορθογώνιο.
8. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με  $\angle \Gamma \Delta = 30^\circ$ . Προεκτείνουμε τη ΔΓ προς το Γ κατά τμήμα ΓΕ=ΔΓ. Να δείξετε ότι:
- α) Το ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο.      γ)  $A\Delta = \frac{BE}{2}$
- β) Το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές.
9. Στο τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε το ύψος ΑΗ. Αν Δ, Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, και ΑΓ αντίστοιχα, να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΗΔΖΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
10. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και το ύψος του ΑΕ. Αν Κ, Λ είναι τα μέσα των ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα, να δείξετε ότι το ΚΛΓΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
11. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΓΔ αντίστοιχα. Αν η ΕΖ τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο Η, να δείξετε ότι  $\Gamma H = \frac{A\Gamma}{4}$ .
12. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με  $\hat{A} = 90^\circ$  και  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ , η μεσοκάθετη της ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Δ. Να δείξετε ότι:
- α) η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Β.      β)  $\Delta M = \frac{A\Gamma}{3}$ .

## Ενότητα 7: Στατιστική

## Ενότητα 8: Στερεομετρία

1. Κύλινδρος έχει όγκο  $54\pi \text{ cm}^3$  και ύψος 6 cm. Να βρείτε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειάς του.
2. Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει όγκο  $120\text{m}^3$ , μήκος 8m και ύψος 3m. Να βρεθεί το πλάτος και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του.
3. Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει όγκο  $450 \text{ m}^3$ . Αν το ύψος του είναι 6m και το μήκος του είναι τριπλάσιο από το πλάτος του, να υπολογίσετε:  
α) Το μήκος και το πλάτος του. β) Το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας.
4. Να βρεθεί ο όγκος του κυλίνδρου που έχει περίμετρο βάσης  $10\pi \text{ m}$  και εμβαδόν κυρτής επιφάνειας  $40\pi \text{ m}^2$ . (Η απάντηση να δοθεί σε  $\pi$ )
5. Κώνος έχει ακτίνα 6m και γενέτειρα 10m. Να βρείτε τον όγκο του κώνου. (Η απάντηση να δοθεί σε  $\pi$ )
6. Στο σχήμα έχουμε δυο δοχεία A και B. Το δοχείο A έχει διάμετρο 28cm και περιέχει νερό που φθάνει σε ύψος 5cm από τη βάση του. Το δοχείο B έχει διάμετρο 18 cm και ύψος 8cm. Να εξετάσετε αν το νερό του δοχείου A χωράει στο δοχείο B.
7. Δίνονται κύλινδρος και ορθό πρίσμα με βάση ορθογώνιο τρίγωνο. Αν  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{4\pi}{5}$  όπου  $V_1$  : ο όγκος του κυλίνδρου και  $V_2$  : ο όγκος του πρίσματος να βρείτε το εμβαδό της ολικής επιφάνειάς ( $E_{ολ}$ ) του κυλίνδρου (συναρτήσει του  $\pi$ ).



## **Ενότητα 9: Τριγωνομετρία**