

Ενότητα 2: Αξιοσημείωτες Ταυτότητες

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα των ταυτοτήτων:

α) $(2\chi+3)^2 =$

β) $(2\psi+1)^3 =$

γ) $(\chi-\psi)^3 =$

δ) $(7\chi-2\psi)(7\chi+2\psi) =$

ε) $(5\chi^2 - \frac{1}{2})(5\chi^2 + \frac{1}{2}) =$

στ) $(\alpha^3-2\beta)(\alpha^3+2\beta) =$

ζ) $(\chi\psi - \frac{1}{2})^2 =$

η) $(4\chi - 3\psi)^2 =$

θ) $(3\alpha - 4)^2 =$

ι) $(\chi - 7)^2 =$

κ) $(\psi+5)^2 =$

λ) $(5\chi + 1)(5\chi - 1) =$

μ) $(3\chi^2-2)(3\chi^2+2) =$

ν) $(3\chi+2\psi)(3\chi-2\psi)(9\chi^2 - 4\psi^2) =$

2. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

α) $(a+x)^2 - (a-x)^2 + 4ax = 8ax$

β) $(\chi+\psi)^2 - (\chi-\psi)(\chi+\psi) = 2\psi(\chi+\psi)$

γ) $\left(\frac{\chi+\psi}{4}\right)^2 + \left(\frac{\chi-\psi}{4}\right)^2 = \frac{\chi^2 + \psi^2}{8}$

3. Αν $\chi + \frac{1}{\chi} = 7$ να υπολογίσετε την αλγεβρική παράσταση $\chi^2 + \frac{1}{\chi^2}$.

4. Αν $\chi + \psi = -6$ και $\chi\psi = -27$ να υπολογίσετε τις αριθμητικές τιμές των παραστάσεων:

α) $A = \chi^2 + \psi^2$

β) $\chi^3 + \psi^3$

Ενότητα 3: Παραγοντοποίηση - Ρητές Αλγεβρικές Παραστάσεις

1. Να κάνετε τις διαιρέσεις :

α) $(15\chi^3-14\chi^2+7\chi+6) \div (5\chi+2)$

β) $(6\chi^3+5\chi^2+9\chi+4) \div (2\chi+1)$

2. Να δείξετε ότι $(\alpha - \beta)$ είναι παράγοντας του $\alpha^3 - \beta^3$.

3. Να αναλύσετε τα πολυώνυμα σε γινόμενο πρώτων παραγόντων:

α) $25\chi^2-9 =$

β) $\chi^2-8\chi\psi+16\psi^2 =$

γ) $\chi^2-11\chi+18 =$

δ) $125-8\chi^3 =$

ε) $2\chi^3+12\chi^2+18\chi =$

στ) $\chi^2+6\chi+9 =$

ζ) $2\chi^2+\chi\psi+10\chi+5\psi =$

η) $\alpha\chi+2\alpha\psi-3\chi-6\psi =$

ι) $2\chi^2 - 2\chi\psi =$

κ) $\chi^2-6\chi\psi+9\psi^2-4\omega^2 =$

λ) $\chi^2 - 9\psi^2 =$

μ) $(\chi-1)(\psi+2)^2-9(\chi-1) =$

ν) $(a+\beta)x+a^2+a\beta+2a+2\beta =$

ξ) $(x^2-6x+3)^2-(x-9)^2 =$

ο) $(\omega^3-1)-2(\omega^2-1)-(\omega-1)^2 =$

π) $\alpha^3\chi^3-\beta^3\chi^3+\alpha^3-\beta^3 =$

4. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω αριθμητικές παραστάσεις , χρησιμοποιώντας κανόνες παραγοντοποίησης: α) $64^2 - 36^2 =$ β) $1000^2 - 999^2 =$

5. Ένα τετράγωνο έχει εμβαδόν $16\chi^2 - 8\chi + 1$. Να βρείτε την περίμετρό του.

6. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\alpha) \frac{3\chi}{\psi - \chi} + \frac{2\psi}{\psi + \chi} - \frac{\chi^2 - 3\chi\psi}{\psi^2 - \chi^2} =$$

$$\beta) \frac{\chi^3 - 4\chi}{\chi^2 - 5\chi + 6} \div \frac{\chi}{\chi - 3} =$$

$$\gamma) \frac{\chi^2 - 3\chi - 10}{\chi^2 - 25} \cdot \frac{\chi^2 + 6\chi + 5}{\chi^2 + 2\chi} =$$

$$\delta) \frac{4}{\chi^2 - 4} - \frac{2}{\chi^2 + 2\chi} + \frac{1}{\chi - 2} =$$

$$\epsilon) \left[\frac{x+1}{(x-2)^2} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} \right] \div \frac{2}{(x-2)} =$$

$$\sigma\tau) \left[\frac{\psi}{\psi^2 - 4} - \frac{\psi - 2}{\psi^2 + 2\psi} \right] : \frac{\psi^3 - \psi^2}{\psi^2 - 3\psi + 2} =$$

$$\zeta) \frac{\alpha}{a-2\beta} - \frac{2\beta}{a+2\beta} - \frac{4a\beta}{a^2 - 4\beta^2} =$$

$$\eta) \left(\frac{2}{\chi+2} - \frac{2}{\chi-2} \right) \div \frac{\chi^2 + 3\chi}{\chi^2 + 5\chi + 6} =$$

$$\theta) \frac{\alpha}{\alpha+1} - \frac{\alpha}{\alpha-1} - \frac{2}{\alpha^2 - 1} =$$

$$\iota) \frac{\chi^2 - 4}{\chi - 3} \cdot \frac{\chi^2 + \chi}{\chi^2 - \chi - 6} \div \frac{\chi - 2}{\chi^2 - 6\chi + 9} =$$

$$\kappa) \frac{1}{x^2 + 6x + 9} - \left(\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x^2 - 9} \right) =$$

$$\lambda) \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta} - \alpha \right) \cdot \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^3 + \beta^3} : \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} \right) =$$

7. Να γίνουν τα κλάσματα απλά :

$$\alpha) \frac{2\chi^2\psi^3\omega}{4\chi^5\psi\omega} = \quad \beta) \frac{\chi^2\psi^2 - 16}{2\chi\psi + 8} = \quad \gamma) \frac{\frac{1}{\psi} - \frac{1}{\chi}}{\frac{\chi - \psi}{3\chi}} =$$

$$\delta) \frac{\chi - 1}{\chi^3 - \chi} = \quad \epsilon) \frac{\alpha\chi - \beta\psi + \alpha\psi - \beta\chi}{\chi^2 - \psi^2} = \quad \sigma\tau) \frac{\frac{\chi}{\psi} - 1}{\frac{\chi^2}{\psi} - \psi} = \quad \zeta) \frac{\frac{\chi^2 + \psi^2}{1} + 2}{\frac{1}{\psi^2} - \frac{1}{\chi^2}} =$$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\alpha) \chi^2 - 3\chi = 0$$

$$\gamma) \chi^3 - 16\chi = 0$$

$$\beta) \chi^2 - 5\chi + 6 = 0$$

$$\delta) y^2(y - 2) + 4y(y - 2) + 4y - 8 = 0$$

$$\epsilon) \frac{1}{x+2} + \frac{6x+1}{x^2-x-6} = \frac{2}{5x-15}$$

$$\sigma\tau) \frac{x-4}{9-x^2} + \frac{2}{x-3} = \frac{x+1}{x^2+3x}$$

$$\zeta) \frac{2x}{x+2} + \frac{x+2}{2x} = 2$$

$$\eta) \frac{x-2}{x} + \frac{4}{x-2} = \frac{8}{x^2-2x}$$

$$\theta) \frac{2}{y+2} - \frac{10}{y^2-4} = \frac{1}{2-y}$$

$$\iota) \frac{x+5}{2x+2} + \frac{4}{x^2-x-2} = \frac{2x}{3x-6}$$

$$\kappa) \frac{2}{x-3} - \frac{x-4}{x^2-9} = \frac{x+1}{x^2+3x}$$

9. Να βρείτε δύο διαδοχικούς περιττούς ακραίους των οποίων το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι 394.

10. Δίνεται το ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο. Αν οι γωνίες $B=x^2-27$ και $\Delta=6x$, να υπολογίσετε τις γωνίες του παραλληλογράμμου.

11. α) Αν $A = \left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) : \left(1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)$ και $B = \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) : \left(1 - \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)$, να δείξετε ότι: $A+B=1$

Ενότητα 4: Γεωμετρία Ι (Ισα τρίγωνα)

- Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ. Αν Δ είναι το μέσο της ΑΒ και Ε το μέσο της ΑΓ και Ζ το μέσο της ΒΓ, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισοσκελές .
- Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και ΑΔ ύψος του. Προεκτείνουμε το ύψος προς το μέρος του Δ και παίρνουμε τμήμα ΔΕ=ΑΔ . Να δείξετε ότι ΑΒ=ΓΕ.
- Δίνεται τυχόν τρίγωνο ΑΒΓ. Στις πλευρές ΑΓ και ΒΓ παίρνουμε τμήματα ΓΔ και ΓΕ αντίστοιχα, έτσι ώστε ΓΔ=ΓΕ. Αν Ζ τυχόν σημείο της διχοτόμου ΓΗ να δείξετε ότι:
α) ΖΔ=ΓΕ
β) οι αποστάσεις του Ζ από τις πλευρές ΑΓ και ΒΓ είναι ίσες.
- Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Τα Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $\triangle E\overset{\Delta}{B}\Gamma = \triangle \overset{\Delta}{\Gamma}B$.
- Στη βάση ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ(ΑΒ=ΑΓ) να πάρετε δύο σημεία Δ και Ε έτσι ώστε ΒΔ=ΕΓ. Να δείξετε ότι
α) ΑΔ = ΑΕ
β) οι αποστάσεις των σημείων Δ και Ε από τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα είναι ίσες.
- Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ(ΑΒ=ΑΓ). Προεκτείνετε τις πλευρές ΒΑ και ΓΑ προς το μέρος του Α κατά τμήματα ΑΕ και ΑΖ αντίστοιχα , ώστε ΑΕ=ΑΖ.
α) Αν Κ είναι το μέσο της ΒΓ να φέρετε τα ΕΚ και ΖΚ και να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΖΚΓ και ΕΚΒ είναι ίσα.
β) Να δείξετε ότι το Κ απέχει ίσο από τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ.

7. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Προεκτείνουμε τη βάση $B\Gamma$ προς το B και προς το Γ και παίρνουμε τμήματα $B\Delta = \Gamma E$. Αν Z είναι το μέσο της AB και H το μέσο της $A\Gamma$, να δείξετε ότι $DZ = HE$.
8. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), Δ το μέσο της AB και E το μέσο της $A\Gamma$. Από τα Δ και E φέρουμε κάθετες DZ και EH στη $B\Gamma$. Να δείξετε ότι:
 α) $DZ = EH$ και
 β) ότι AZH είναι ισοσκελές τρίγωνο.
9. Δίνεται τυχόν τρίγωνο $AB\Gamma$ και $B\Delta$ διάμεσος. Να δείξετε ότι οι κορυφές A και Γ του τριγώνου $AB\Gamma$ απέχουν ίσο από τη διάμεσο $B\Delta$.
10. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Φέρουμε την διχοτόμο AX της εξωτερικής γωνίας A του τριγώνου. Από το B φέρουμε ευθεία κάθετη στην AX η οποία τέμνει την AX στο Δ και την προέκταση της ΓA στο E . Να δείξετε ότι $AE = A\Gamma$.

Ενότητα 6: Ευθεία – Γραμμικά Συστήματα

1. Να βρείτε τις αποστάσεις των σημείων A και B και το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις : α) $A(-3,-2)$ και $B(2, -13)$ και β) $A(3,-1)$ και $B(-3,1)$.
2. Να βρείτε τις δυνατές τιμές του β , αν η απόσταση των σημείων με συντεταγμένες $(3,3)$ και $(\beta,-1)$ είναι 5 μονάδες.

3. Να λύσετε τα συστήματα :

$$\begin{aligned} \alpha) \quad & 3\chi + 4\psi = 7 \\ & 2\chi - \psi = 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma) \quad & 2\chi + \psi = 8 \\ & \frac{2\chi}{3} - \frac{3\psi}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) \quad & 2\chi - 4\psi = -10 \\ & 3(\chi + 2) + 5(\psi - 7) = -22 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta) \quad & \frac{2\chi + \psi}{7} = 1 \\ & \frac{\chi - 3\psi}{7} = -1 \end{aligned}$$

4. Δίνεται η ευθεία $\psi = \alpha\chi + 5$. Να υπολογιστεί το α ώστε η ευθεία να περνά από το σημείο $A(4,17)$.
5. Η ευθεία $\psi = (\alpha - \beta)\chi + \beta$ είναι παράλληλη με την ευθεία $\psi = 3\chi + 2$ και περνά από το σημείο $A(1,5)$. Να υπολογίσετε τα α και β .
6. Να βρείτε τις τιμές των α και β , ώστε οι ευθείες $\epsilon_1: (\alpha + 1)\chi - 8\psi = 10$ και $\epsilon_2: 3\chi + 2\beta\psi = 5$ να είναι παράλληλες.
7. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της ευθείας $\psi = 2\chi - 4$. Να βρείτε τα σημεία A και B στα οποία η ευθεία τέμνει τους άξονες και στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου OAB (O η αρχή των αξόνων).

8. Η γραφική παράσταση της $\psi = 2\chi + \beta$ περνά από το σημείο $A(-1,1)$. Να βρείτε το β και να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

9. Δίνεται η εξίσωση της ευθείας $3\chi - 4\psi = -2$

α) Να βρείτε την κλίση της

β) Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη με αυτή και περνά από την αρχή των αξόνων.

10. Η ευθεία $\varepsilon_1: \psi = (\lambda + 1)\chi + 5\kappa$ περνά από το σημείο $A(-1,2)$ και είναι παράλληλη με την ευθεία $\varepsilon_2: \psi = 3\chi - 6$.

α) να βρείτε τα λ και κ .

β) να βρείτε το σημείο τομής της ε_1 με τον άξονα $\Psi'\Psi$.

11. Για ποια τιμή του λ οι ευθείες $\varepsilon_1: (\lambda - 2)\chi - 3\psi = 2$ και $\varepsilon_2: \chi - 2\psi = 5$ είναι παράλληλες.

12. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλη με την ευθεία $3\chi + 4\psi = 1$.

13. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο $A(4, -1)$ και είναι παράλληλη με την ευθεία $\chi - 2\psi = 4$.

14. α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από τα σημεία $A(2,5)$ και $B(-1,4)$.

β) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας.

15. α) Να βρείτε ποια από τα σημεία $A(2, -8)$, $B(1,5)$, $\Gamma(-1,3)$ ανήκουν στην ευθεία $\psi = 3\chi + 2$.

β) Να εξετάσετε αν οι ευθείες $\varepsilon_1: 2\chi - \psi = 3$ και $\varepsilon_2: 4\chi - 2\psi = 5$ είναι παράλληλες.

16. Αν οι ευθείες $\varepsilon_1: \psi = (-5\kappa + 7)\chi + 3$ και $\varepsilon_2: \psi = 2\kappa\chi - 1$ είναι παράλληλες να βρείτε:

α) Το κ

β) Την κλίση της ευθείας ε_1

γ) Τα σημεία τομής της ε_1 με τους άξονες $\chi'\chi$ και $\psi'\psi$

δ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της ευθείας ε_1 .

17. Η ευθεία $\psi = \alpha\chi + \beta$ είναι παράλληλη με την $5\psi - 4\chi = 2$ και περνά από το σημείο $(-1,2)$.

Να βρείτε τις παραμέτρους α και β και την εξίσωση της ευθείας.

18. Αν η ευθεία $\psi = (\alpha + 5)\chi + \beta$ είναι παράλληλη με την $\psi = \chi - 3$ και περνά από την αρχή των αξόνων, να βρείτε τα α και β .

19. Να βρείτε την τιμή του κ ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

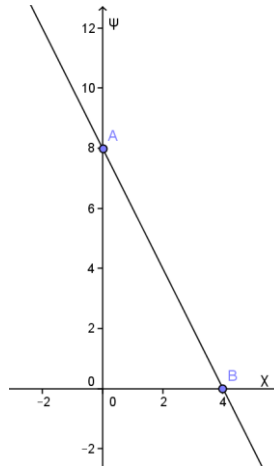
$$\psi = \left(\frac{3\kappa - 2}{2}\right)\chi + 4 \quad \text{και} \quad \psi = \left(\frac{\kappa - 14}{4}\right)\chi - 2 \quad \text{είναι ευθείες παράλληλες.}$$

20. Οι ευθείες $\varepsilon_1: \psi = (\kappa^2 - 2\kappa + 1)\chi + 7$ και $\varepsilon_2: \psi = 4\chi + 2$ είναι παράλληλες. Να υπολογίσετε τις τιμές του κ .

21. Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου β έτσι ώστε η ευθεία $\psi = (\beta - 1)\chi - 8$ να είναι κάθετη στην ευθεία $\chi + 3\psi = 1$.

22. Αν $A(-2, 6)$, $B(-3, 2)$ και $\Gamma(5, 0)$ να αποδείξετε ότι οι ευθείες σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο..

23. Να βρείτε την εξίσωση ευθείας ϵ .



24. Να βρείτε την τιμή του κ ώστε η ευθεία $\psi = (\kappa - 3)\chi + 6$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $2\psi + (2\kappa + 3)\chi = 5$.

25. Να αντιστοιχήσετε κάθε εξίσωση της στήλης Α με τις λύσεις της στη στήλη Β.

Εξίσωση	Λύσεις
α) $\chi^2 - 2\chi - 15 = 0$	i) 0, -1
β) $\chi^2 = 6\chi + 16$	ii) $-\frac{1}{2}, 7$
γ) $\chi^3 = \chi^2$	iii) 3, -3
δ) $9 - \chi^2 = 0$	iv) 5, -3
ε) $\frac{\chi + 1}{\chi} = \frac{2\chi - 6}{7}$	v) 0, 1
	vi) 8, -2
	vii) -5, 3
	viii) Δεν έχει λύσεις στους πραγματικούς αριθμούς

(α) $\rightarrow$

(β) $\rightarrow$

(γ) $\rightarrow$

(δ) $\rightarrow$

(ε) $\rightarrow$

26. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\chi^2 - 8\chi - 9 = 0$

β) $2\chi^2 + \chi - 6 = 0$

γ) $\chi(\chi - 5) + 6 = 0$

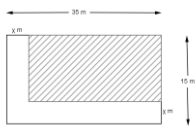
δ) $\chi^2 - 20 = -2\chi^2 + 7$

ε) $(\chi + 1)(\chi^2 - 4\chi + 3) = 0$

στ) $2\chi(\chi - 3) - 5(\chi^2 + 2) = \chi(1 - \chi)(1 + \chi) - 10$

$$\sigma\tau) \frac{3\chi-1}{\chi+3} + \frac{2\chi-3}{4-\chi} = \frac{-7-7\chi}{\chi^2-\chi-12}$$

27. Από ένα οικοπέδο σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις 15 m και 35 m αποκόπτονται δύο λωρίδες ίσου πλάτους (όπως φαίνεται στο σχήμα), με σκοπό να γίνει διαπλάτυνση του υπάρχοντος δρόμου. Αν η τελική επιφάνεια του οικοπέδου (γραμμοσκιασμένη) είναι 300 m^2 , να υπολογίσετε το πλάτος της κάθε λωρίδας.

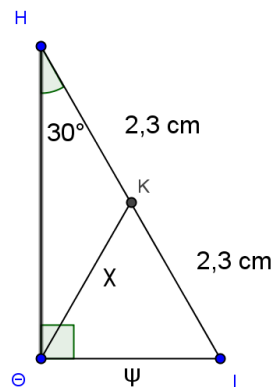
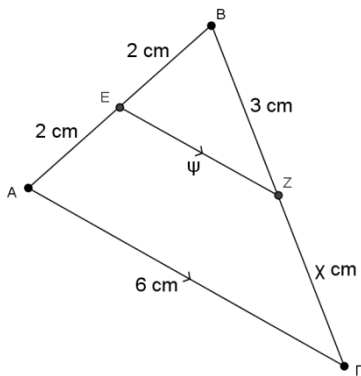


Ενότητα 11: Γεωμετρία II (Παραλληλόγραμμα και Τραπεζίο – Ειδικά Θεωρήματα τριγώνων)

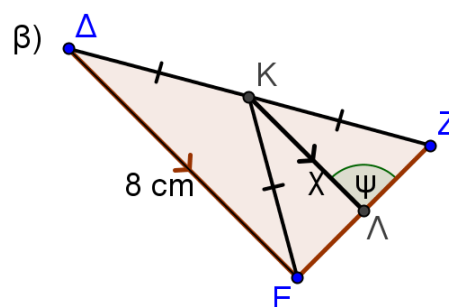
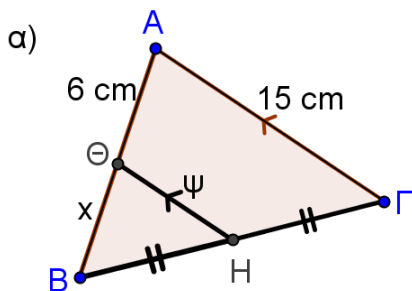
1. Να βρείτε τα χ και ψ στα πιο κάτω σχήματα και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α)

β)

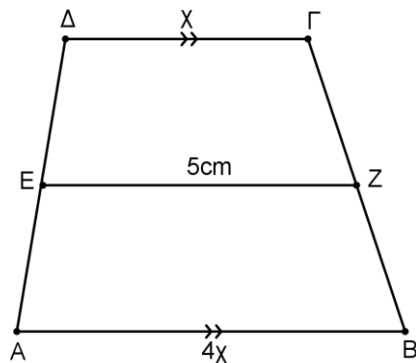


2. Να υπολογίσετε τα χ και ψ . (Να δικαιολογήσετε όλες τις απαντήσεις σας)

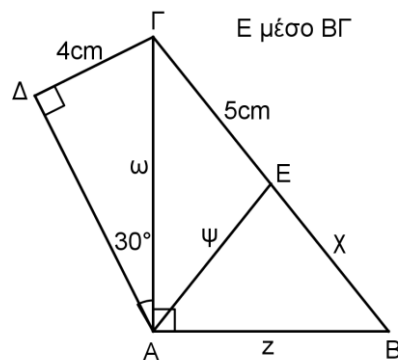


3. Στο πιο κάτω σχήμα να υπολογίσετε τα χ , ψ , ω και z .

(α)



(β)



4. Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Από το Α φέρνουμε την ΑΕ κάθετη στη ΒΔ και από το Γ τη ΓΖ κάθετη στη ΒΔ. Να δείξετε ότι :
 α) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΓΖΒ είναι ίσα.
 β) Το ΑΖΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.
5. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Στην πλευρά ΑΒ παίρνουμε ένα σημείο Ε και φέρνουμε την ΕΖ κάθετη προς τη ΒΓ. Στην πλευρά ΓΔ παίρνουμε τμήμα ΓΗ=ΑΕ και φέρνουμε την ΗΘ κάθετη προς την ΑΔ. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.
6. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Επί των πλευρών ΑΔ και ΒΓ παίρνουμε τμήματα ΔΕ και ΒΖ ώστε ΔΕ=ΒΖ . Να δείξετε ότι ΑΖ=ΓΕ .

	Δεδ.	Ζητ.
	ΑΒΓΔ ορθογ. Ε, Ζ, Η μέσα των ΑΔ, ΔΓ και ΑΓ αντίστοιχα	ΕΗΖΔ ορθογώνιο

7. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε την ΑΔ κατά τμήμα ΔΗ=ΑΔ. Η διχοτόμος της γωνίας Α τέμνει τη ΓΔ στο σημείο Ζ. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΖΑΗ είναι ορθογώνιο.

8. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\angle \Delta = 30^\circ$. Προεκτείνουμε τη ΔΓ προς το Γ κατά τμήμα ΓΕ=ΔΓ. Να δείξετε ότι:

- α) Το ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο. γ) $AD = \frac{BE}{2}$
 β) Το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές.

9. Στο τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε το ύψος ΑΗ. Αν Δ, Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, και ΑΓ αντίστοιχα, να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΗΔΖΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

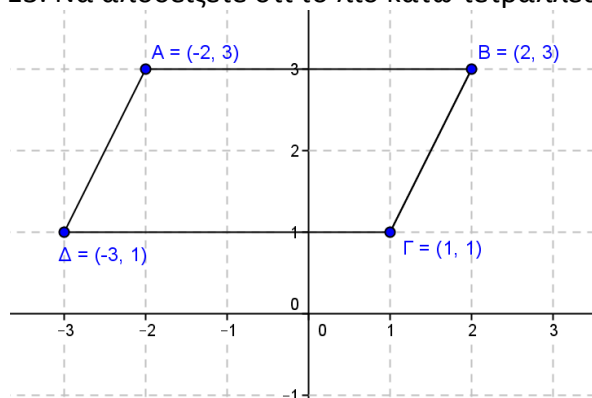
10. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και το ύψος του ΑΕ. Αν Κ, Λ είναι τα μέσα των ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα, να δείξετε ότι το ΚΛΓΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

11. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΓΔ αντίστοιχα. Αν η ΕΖ τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο Η, να δείξετε ότι $GH = \frac{AG}{4}$.

12. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, η μεσοκάθετη της ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Δ. Να δείξετε ότι:

- α) η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Β. β) $DM = \frac{AG}{3}$

13. Να αποδείξετε ότι το πιο κάτω τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.



14. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ.

Δεδομένα

Ε μέσο της ΑΔ

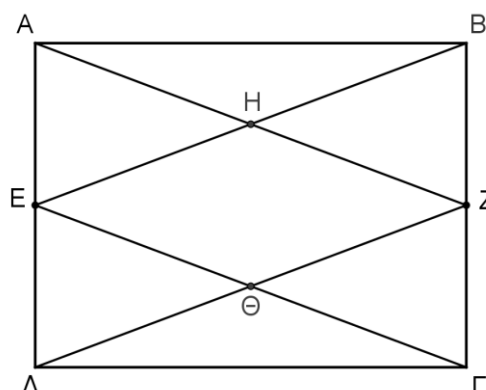
Ζ μέσο της ΒΓ

Η σημείο τομής των ΑΖ και ΒΕ

Θ τομή των ΔΖ και ΓΕ

Ζητούμενα

(α) $\angle H\epsilon = \angle H\zeta$



- (β) ΕΘΖΗ ρόμβος (Υπόδειξη:
Να φέρετε την ΕΖ)

15. Στο διπλανό σχήμα δίνεται το τετράπλευρο $ABΓΔ$.

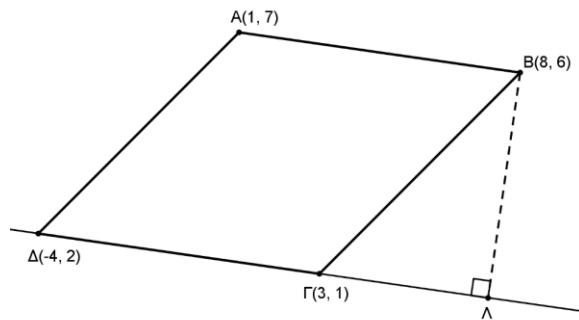
1) Να βρείτε τις κλίσεις:

$$\lambda_{AB}, \lambda_{B\Gamma}, \lambda_{\Gamma\Delta}, \lambda_{\Delta\Delta}$$

και να δείξετε ότι το

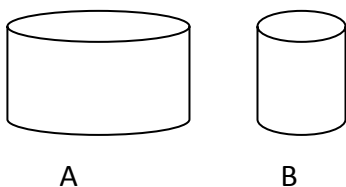
$AB\Gamma\Delta$ είναι

παραλληλόγραμμο.

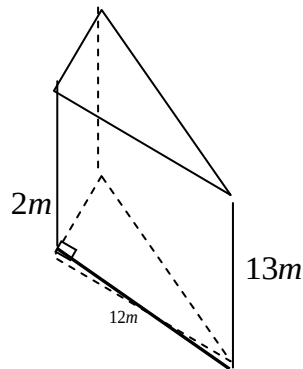
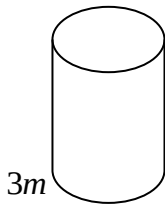


Ενότητα 8: Στερεομετρία

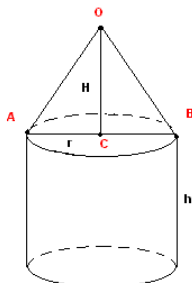
1. Να υπολογίσετε τον όγκο κύβου που έχει εμβαδόν ολικής επιφάνειας 96 m^2
2. Κύλινδρος έχει όγκο $54\pi \text{ cm}^3$ και ύψος 6 cm . Να βρείτε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειάς του.
3. Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει όγκο 120 m^3 , μήκος 8 m και ύψος 3 m . Να βρεθεί το πλάτος και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του.
4. Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει όγκο 450 m^3 . Αν το ύψος του είναι 6 m και το μήκος του είναι τριπλάσιο από το πλάτος του, να υπολογίσετε:
 - α) Το μήκος και το πλάτος του.
 - β) Το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας.
5. Να βρεθεί ο όγκος του κυλίνδρου που έχει περίμετρο βάσης $10 \pi \text{ m}$ και εμβαδόν κυρτής επιφάνειας $40 \pi \text{ m}^2$. (Η απάντηση να δοθεί συναρτήσει του π)
6. Κώνος έχει ακτίνα 6 m και γενέτειρα 10 m . Να βρείτε τον όγκο του κώνου. (Η απάντηση να δοθεί συναρτήσει του π)
7. Στο σχήμα έχουμε δυο δοχεία Α και Β. Το δοχείο Α έχει διάμετρο 28 cm και περιέχει νερό που φθάνει σε ύψος 5 cm από τη βάση του. Το δοχείο Β έχει διάμετρο 18 cm και ύψος 8 cm . Να εξετάσετε αν το νερό του δοχείου Α χωράει στο δοχείο Β.



8. Δίνονται κύλινδρος και ορθό πρίσμα με βάση ορθογώνιο τρίγωνο. Αν $\frac{V_1}{V_2} = \frac{4\pi}{5}$ όπου V_1 : ο όγκος του κυλίνδρου και V_2 : ο όγκος του πρίσματος, να βρείτε το εμβαδό της ολικής επιφάνειάς ($E_{ολ}$) του κυλίνδρου (συναρτήσει του π).

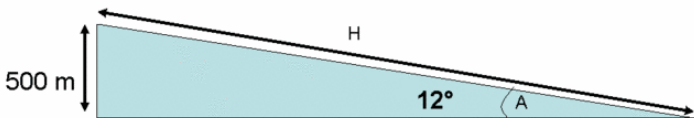


9. Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας κυλίνδρου είναι $72\pi \text{ cm}^2$. Αν το ύψος του είναι τετραπλάσιο της ακτίνας του, να βρείτε το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας και τον όγκο του.
10. Σοκολατένιος κύβος με ακμή 12cm λιώνεται και μετατρέπεται σε πλάκες σοκολάτας σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις 6cm , 4cm , 1cm . Πόσες τέτοιες πλάκες μπορούν να γίνουν;
11. Το στερεό του σχήματος αποτελείται από ένα κώνο και ένα κύλινδρο. Αν ο κώνος έχει $E_{ολ} = 96\pi \text{ m}^2$ και $E_{κ} = 60\pi \text{ m}^2$ και ο κύλινδρος έχει $u = 4\text{m}$.
 α) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού και
 β) πόσα θα πληρώσουμε αν βάψουμε όλη την επιφάνεια του στερεού (εξωτερικά) πληρώνοντας €7 το τετραγωνικό μέτρο.



www.analyzemath.com

Ενότητα 5: Τριγωνομετρία

1. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $AB = 12\text{ cm}$ και $A\Gamma = 5\text{ cm}$.
Να υπολογίσετε: (α) την υποτείνουσα $B\Gamma$,
(β) Τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας B .
 2. Ένας ζωγράφος παρατηρεί άγαλμα ύψους $4,70\text{m}$ και βρίσκεται σε απόσταση 8m από αυτό. Αν το ύψος του ζωγράφου είναι $1,70\text{m}$ να βρείτε το μέτρο της γωνίας $\hat{\omega}$ υπό την οποία ο ζωγράφος βλέπει το άγαλμα.
 3. Ο Γιάννης ανεβαίνει ένα λόφο ύψους 500m . Η γωνία κλίσεως είναι 12 μοίρες. Πόσο μακριά θα χρειαστεί να περπατήσει για να φθάσει στην κορυφή του λόφου.
- 
- The diagram shows a right-angled triangle representing a hill. The vertical side (opposite to the angle) is labeled 500 m . The angle at the bottom right vertex is labeled 12° . The hypotenuse is labeled H . The angle at the bottom left vertex is labeled A .
4. Ένας άντρας βλέπει την κορυφή ενός δέντρου υπό γωνία 50° . Αν ο άντρας απέχει από το δέντρο 6m και το ύψος του δέντρου είναι 9m να υπολογίσετε το ύψος του άντρα .
 5. Ένα πλοίο βλέπει την κορυφή του φάρου υπό γωνία 12° . Αν το ύψος του φάρου είναι 10 μέτρα να βρείτε την απόσταση του πλοίου από τον φάρο.



ΚΑΛΟ ΔΙΑΒΑΣΜΑ!!!!