

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΣΤΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

A . Ορισμός παραγώγου :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

B . Κανόνες παραγώγισης :

$$1) (cu)' = cu' \quad 2) (u \pm v)' = u' \pm v' \quad 3) (uv)' = u'v + uv' \quad 4) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Γ . Τύποι παραγώγισης :

1) $(c)' = 0$	
2) $(x^v)'$	$= vx^{v-1}$
3) $\left(\frac{1}{x^v}\right)'$	$= -\frac{v}{x^{v+1}}$
4) $(e^x)'$	$= e^x$
5) $(\sqrt{x})'$	$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$
6) $(\eta\mu x)'$	$= \sigma\upsilon\nu x$
7) $(\sigma\upsilon\nu x)'$	$= -\eta\mu x$
8) $(\epsilon\varphi x)'$	$= \tau\epsilon\mu^2 x$
9) $(\sigma\varphi x)'$	$= -\sigma\tau\epsilon\mu^2 x$
10) $(\tau\epsilon\mu x)'$	$= \tau\epsilon\mu x \epsilon\varphi x$
11) $(\sigma\tau\epsilon\mu x)'$	$= -\sigma\tau\epsilon\mu x \sigma\varphi x$
12) $(\ln x)'$	$= \frac{1}{x}$
13) $(\log_a x)'$	$= \frac{1}{x \ln a}$
14) $(a^x)'$	$= a^x \ln a$
$[f^v(x)]'$	$= v[f^{v-1}(x)] \cdot f'(x)$
$\left[\frac{1}{f^v(x)}\right]'$	$= -\frac{vf'(x)}{f^{v+1}(x)}$
$[e^{f(x)}]'$	$= f'(x) e^{f(x)}$
$[\sqrt{f(x)}]'$	$= \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$[\eta\mu f(x)]'$	$= f'(x) \sigma\upsilon\nu f(x)$
$[\sigma\upsilon\nu f(x)]'$	$= -f'(x) \eta\mu f(x)$
$[\epsilon\varphi f(x)]'$	$= f'(x) \tau\epsilon\mu^2 f(x)$
$[\sigma\varphi f(x)]'$	$= -f'(x) \sigma\tau\epsilon\mu^2 f(x)$
$[\tau\epsilon\mu f(x)]'$	$= f'(x) \tau\epsilon\mu f(x) \epsilon\varphi f(x)$
$[\sigma\tau\epsilon\mu f(x)]'$	$= -f'(x) \sigma\tau\epsilon\mu f(x) \sigma\varphi f(x)$
$[\ln(f(x))]'$	$= \frac{f'(x)}{f(x)}$
$[\log_a f(x)]'$	$= \frac{f'(x)}{f(x) \ln a}$
$[a^{f(x)}]'$	$= f'(x) a^{f(x)} \ln a$

Δ . Παράγωγος πεπλεγμένης συνάρτησης

Παραγωγίζουμε ως προς x κάθε όρο της $f(x, \psi) = 0$ και λύουμε ως προς $\frac{dy}{dx}$ την εξίσωση που προκύπτει

Ε . Παράγωγος της συνάρτησης $\psi = [f(x)]^{g(x)}$

Λογαριθμίζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με βάση το e και αφού εφαρμόσουμε την ιδιότητα της δύναμης στον λογάριθμο, την παραγωγίζουμε σαν πεπλεγμένη συνάρτηση.

ΣΤ . Γεωμετρική σημασία της παραγώγου

Η κλίση $\lambda_{\epsilon\varphi}$ της εφαπτομένης μιας καμπύλης $\psi = f(x)$ στο σημείο $A(x_1, \psi_1)$ δίνεται από τον $\lambda_{\epsilon\varphi} = f'(x_1)$ και η εξίσωση της εφαπτομένης στο A από τον τύπο $\psi - \psi_1 = \lambda_{\epsilon\varphi} (x - x_1)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

A. Να βρεθούν οι παράγωγοι των πιο κάτω συναρτήσεων. (οι απαντήσεις να δοθούν στην πιο απλή τους μορφή)

$$1) \psi = 2e^x - x^4 + \frac{1}{x^3} - 4\sqrt[4]{x^3} - 6$$

$$2) \psi = (x^3 + x)^4 + \frac{1}{(x^2 - 2x)^4}$$

$$3) \psi = x^2 \tan^3 4x$$

$$4) \psi = \frac{x - \sin x}{x + \eta \mu x}$$

$$5) \psi = \ln \sqrt{\frac{e^{x^2}}{1 + \sigma \phi x}}$$

$$6) \psi = \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$$

$$7) \psi = e^{5x-7} + \epsilon \phi^4 x^3$$

$$8) \psi = 3^{\frac{x^4}{\sin 2x}}$$

$$9) \psi = (\ln x)^{\ln(x+1)}$$

$$10) \psi = 7^x \cdot \log_7^2 x$$

$$11) 4x^2 - \psi^2 = \ln 3\psi + 3^{2x}$$

$$12) \psi = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

$$13) \psi = \sqrt{\sigma \tau \epsilon \mu 2x} + \sigma \tau \epsilon \mu \sqrt{2x}$$

$$14) \psi - x\psi + \eta \mu^2 2\psi = \sin 3x$$

$$15) \psi = \frac{x^2 \sigma \tau \epsilon \mu x}{x^2 + 1}$$

B. 1) Αν $\psi = e^{-x} \sin 2x$ να δείξετε ότι : $\frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + 5\psi = 0$

2) Αν $\psi = x^2 \ln x$ να δείξετε ότι : $x \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2x = 0$

3) Αν $\psi = \ln \sqrt{1+5x^2}$ να δείξετε ότι: (α) $\frac{dy}{dx} e^{2\psi} = 5x$ και (β) $e^{2\psi} \left[\frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = 5$

4) Αν $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ να δείξετε ότι $(1+x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} = 0$

5) Αν $x^3 - \psi^3 = 10$ να δείξετε ότι : $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{20x}{\psi^5}$

6) Αν $\eta \mu \psi = 2\eta \mu x$ να δείξετε ότι : (α) $\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 1 + 3\tau \epsilon \mu^2 \psi$ και (β) $\frac{d^2 y}{dx^2} = 3\tau \epsilon \mu^2 \psi \epsilon \phi \psi$

Γ. 1) Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης $x^2 + x\psi - \psi^2 = 1$ στο σημείο της όπου $x=2$ και $\psi < 0$

2) Αν $f(x) = 3x^2 - \alpha x + \beta$, να βρείτε τις τιμές $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η εφαπτομένη της συνάρτησης στο $A(1,4)$ να έχει κλίση -2

3) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της καμπύλης $x\psi = 3^x$ στο σημείο της όπου $x=1$ έχει εξίσωση: $\psi = 3x(\ln 3 - 1) + 6 - \ln 27$

4) Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^{v+1} + x^{2v-1}$, με v σταθερό. Να βρείτε την τιμή του v ώστε η ευθεία $x+3\psi-8=0$, να είναι κάθετη στην εφαπτομένη της $f(x)$ στο σημείο με τετμημένη $x = -1$.

5) Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(x^2+1) = x^3 + 4x$, να βρεθεί η $f''(5)$.

6) Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2 + \alpha x + 1$, $g(x) = 2x^2 + x + \beta$ να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x=1$

7) Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εφαπτομένη της $f(x) = 4x - x^2$ στο σημείο της για $x=1$ να είναι και εφαπτομένη της $g(x) = e^x + \alpha$

8) Να βρείτε την τιμή του $\beta \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $\psi = 2x + 1$ να είναι εφαπτομένη της γραφικής $f(x) = x^2 + 2\beta x + 1$, $x \in \mathbb{R}$ και να βρεθεί το κοινό σημείο επαφής.

Απαντήσεις :

Α . 1) $2e^x - 4x^3 - \frac{3}{x^4} - \frac{3}{\sqrt[4]{x}}$ 2) $4(3x^2+1)(x^3+x)^3 - \frac{8(x-1)}{(x^2-2x)^5}$ 3) $2x\text{τεμ}^3 4x(1+6x\epsilon\phi 4x)$

4) $\frac{1+\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x + x(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)}{(x+\eta\mu x)^2}$ 5) $\frac{1}{2}[2x + \frac{\sigma\tau\epsilon\mu^2 x}{1+\sigma\phi x}]$ 6) $\frac{-3\sqrt{x-1}}{2(x-1)^2\sqrt{x+2}}$

7) $5e^{5x-7} + 12x^2 \epsilon\phi^3 x^3 \text{τεμ}^2 x^3$ 8) $\frac{2x^3(2\sigma\upsilon\nu 2x + x\eta\mu 2x)}{\sigma\upsilon\nu^2 2x} 3^{\frac{x^4}{\sigma\upsilon\nu 2x}} \ln 3$

9) $(\ln x)^{\ln(x+1)} [\frac{\ln(\ln x)}{(x+1)} + \frac{\ln(x+1)}{x \ln x}]$ 10) $7^x \cdot \log_7 x (\ln 7 \log_7 x + \frac{2}{x \ln 7})$ 11) $\frac{8x\psi - 2 \cdot 3^{2x} \cdot \psi \cdot \ln 3}{1+2\psi^2}$

12) $\frac{4e^{-2x}}{(1+e^{-2x})^2}$ 13) $-\sigma\phi 2x \sqrt{\sigma\tau\epsilon\mu 2x} - \frac{1}{\sqrt{2x}} \sigma\tau\epsilon\mu \sqrt{2x} \sigma\phi \sqrt{2x}$ 14) $\frac{\psi - 3\eta\mu 3x}{1-x+2\eta\mu 4\psi}$

15) $\frac{x\sigma\tau\epsilon\mu x(2 - x^3\sigma\phi x - x\sigma\phi x)}{(x^2+1)^2}$

Γ . 1) $4x - 3\psi = 11$ 2) $\alpha=8, \beta=9$ 4) $v=5$ 5) $\pm \frac{1}{4}$ 6) $\alpha=3, \beta=2$

7) $\alpha = 2 \ln 2 - 1$ 8) $\beta = 1, (0,1)$