Θέματα Τελικών Εξετάσεων Γ΄ Λυκείου Μαθηματικά Κατεύθυνσης 1984 – 2005

Παραμετρικές Συναρτήσεις

Άσκηση 1

(Μαθηματικά 4 1984) Αν $u(t)$ παραγώγιση συνάρτηση στο R, με $u(0)=\frac{\pi}{6}$, $u'(0)=1$, $u''(0)=-1$ και $y=\eta\mu(u(t))$ όπου $x=\ln(1+t)$ να βρείτε τις τιμές των παραγώγων $\frac{dy}{dx}$ και $\frac{d^2y}{dx^2}$ όταν $t=0$.

Άσκηση 2

(Μαθηματικά 4 1985) Αν $x=\tau\varepsilon\mu\theta$ και $y=\ln(\tau\varepsilon\mu\theta+\varepsilon\phi\theta)$ να δείξετε ότι $(x^2-1)\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-1=0$.

Άσκηση 3

(Μαθηματικά 4 1986) Αν $x=e^t$ και $y=e^{-2t}$, να δείξετε ότι $y^{-2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+2x^3\frac{dy}{dx}-2=0$

Άσκηση 4

(Μαθηματικά 8 1989) Οι παραμετρικές εξισώσεις καμπύλης είναι: $x=\alpha(2\sigma\upsilon\nu(t)-\sigma\upsilon\nu(2t))$ και $y=\alpha(2\eta\mu(t)-\eta\mu(2t))$. Να δείξετε ότι η γωνιά που σχηματίζεται μεταξύ της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο με παράμετρο t και του θετικού άξονα των Χ είναι $\frac{3t}{2}$.

Άσκηση 5

(Μαθηματικά 8 1990)

Οι παραμετρικές εξισώσεις μιας καμπύλης είναι $\left.\begin{array}{l} x=\eta\mu\theta \\ y=\sigma\upsilon\nu^2\theta \end{array}\right\}, -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$.

a) Να δείξετε ότι η εξίσωση της κάθετης στο σημείο Α που αντιστοιχεί στο $\theta=\frac{\pi}{6}$ είναι $4x-4y+1=0$

b) Να βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση της καμπύλης καθώς και τα τοπικά ακρότατα και τον άξονα συμμετρίας της.

Άσκηση 6

(Μαθηματικά 4 1992) Αν $x=t+\ln t$ και $y=t-\ln t$ να δείξετε ότι $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{8(x+y)}{(x+y+2)^3}$.

Άσκηση 7

(Μαθηματικά 4 1993) Οι παραμετρικές εξισώσεις μιας καμπύλης είναι $x=\eta\mu^3\theta-1$ και $y=\sigma\upsilon\nu^3\theta+1$. Να δείξετε ότι $\frac{dy}{dx}=-\sigma\varphi\theta$

Άσκηση 8

(Μαθηματικά 4 1999) Δίνεται η καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις $x=\alpha\cdot\left[\ln\left(\sigma\varphi\frac{\theta}{2}\right)-\sigma\upsilon\nu\theta\right]$ και $y=\alpha\cdot\eta\mu\theta$ με $\alpha>0$ και $0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

a) Να δείξετε ότι $\frac{dy}{dx}=-\varepsilon\varphi\theta$

b) Η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο $\mathrm{P}\left(\alpha\cdot\left[\ln\left(\sigma\varphi\frac{\theta}{2}\right)-\sigma\upsilon\nu\theta\right],\ \alpha\cdot\eta\mu\theta\right)$ τέμνει τον άξονα των Χ στο σημείο Τ. Να δείξετε ότι $\mathrm{PT}=\alpha$.

Άσκηση 9

(Μαθηματικά 4 2002) Δίνεται η συνάρτηση $\left.\begin{array}{l} x=t^3-1 \\ y=t^5+1 \end{array}\right\}$. Να βρείτε την πρώτη και δεύτερη παράγωγο.

Άσκηση 10

(Ενιαίες 2003) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης με παραμετρικές εξισώσεις $x = \eta\mu 2t$ και $y = \sigma\upsilon\nu 3t$ στο σημείο για το οποίο $t = \frac{\pi}{6}$.

Άσκηση 11

(Προεισαγωγικές 2003) Καμπύλη ορίζεται παραμετρικά από τις εξισώσεις $x = t^3 + 4t$ και $y = 6t^2$, $t \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της με $t = 1$.

Άσκηση 12

(Ενιαίες 2004) Αν $x = e^{-t}$ και $y = \eta\mu t - \sigma\upsilon\nu t$, να δείξετε ότι $x^2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + x \cdot \frac{dy}{dx} + y = 0$.

Άσκηση 13

(Προεισαγωγικές 2004) Καμπύλη ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις $x = t^2 - 2$ και $y = \frac{t^3}{3}$, $t > 0$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της με $t = 3$.

Άσκηση 14

(Ενιαίες 2005) Αν $x = 3\sigma\upsilon\nu t - 1$ και $y = 2 + \eta\mu t$, να δείξετε ότι $9(y-2)\frac{d^2y}{dx^2} + 9\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$

Άσκηση 15

(Προεισαγωγικές 2005) Δίνεται η καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις x = 2τοξεφt και y = $3t^2$-2t+1. Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης στο σημείο της με t =1.